

무차원 동영향 함수를 이용한 자유단 경계를 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석

Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions

강 상 욱† · 김 일 순* · 이 장 무**

S. W. Kang, I. S. Kim and J. M. Lee

(2003년 7월 15일 접수 : 2003년 9월 18일 심사완료)

Key Words : Non-dimensional Dynamic Influence Function(무차원 동영향 함수), Free Vibration(자유 진동), Arbitrarily Shaped Plate(임의 형상 평판), Free Boundary Condition(자유단 경계조건)

ABSTRACT

The so-called boundary node method (or NDIF method) that was developed by the authors has been extended for free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with free edges. Since the proposed method requires no interpolation functions, no integration procedure is needed on boundary edges of the plates and only a small amount of numerical calculation is involved, compared with FEM and BEM. In order to explain the reason why spurious eigenvalues are generated when the NDIF method is applied to free plates, the NDIF method has been considered for free vibration analysis of both a fixed string and a free beam. Finally, verification examples show that natural frequencies obtained by the present method agree well with those given by an exact method or a numerical method (ANSYS).

1. 서 론

본 논문의 저자에 의해 제안된 NDIF 법은 유한요소법(FEM)과 경계요소법(BEM)과는 달리 어떠한 보간함수도 사용하지 않는 특징 덕분에, 간결한 이론 체계와 빠른 수렴성이라는 장점을 가지고 있다. 임의 형상 멤브레인의 자유진동해석을 위해 경계노드법(NDIF 법)이 처음으로 제안되었으며,⁽¹⁾ 이 방법은 나중에 2차원 음향공동의 고유진동수와 고유모드를 구하기 위해 확장되어졌다.⁽²⁾ 더 나아가, 경계에 아주 모퉁한 부분 또는 내부에 구멍을 가진 임의 형상 멤

브레인의 고유모드해석에도 경계노드법이 적용되어졌다.⁽³⁾

멤브레인 또는 음향 공동과는 달리, 다양한 경계조건들을 가지고 있는 평판의 자유진동문제를 해결하기 위하여, NDIF 법의 확장 가능성도 모색되어졌다. 먼저, 고정단 경계를 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석을 위해서 NDIF 법이 고려되어졌으며,⁽⁴⁾ 최근에는 고정단 및 단순지지 경계로 이루어진 복합 경계조건을 가진 임의 형상 평판에 대한 자유진동해석 방법이 정립되어졌다.⁽⁵⁾ 본 논문에서는 지금까지 저자에 의해 꾸준히 연구되어진 NDIF법을 자유단 경계조건(free boundary condition)을 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석에 적용하고자 한다. 한편, 임의 평판의 자유 진동 해석 기법과 관련된 대표적인 국내 연구로서, 단순 급수 함수(simplified series function)를 진동 해로 가정하는 방법이 제안되어졌다.⁽⁷⁾

† 책임저자, 정희원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
TEL : (02)760-4228, FAX : (02)760-4329

* 서울대학교 대학원 기계항공공학부

** 정희원, 서울대학교 기계항공공학부

지금까지 저자의 연구에 의하면, 어떤 평판의 고유치를 NDIF법에 의해 구하게 되면, 그 고유치 속에는 반드시 평판과 같은 형상을 갖는 멤브레인의 고유치가 포함되게 되는 현상이 존재한다. 과거의 연구에서는 이러한 멤브레인의 고유치를 잉여 고유치(spurious eigenvalues)로 정의했으며, 잉여고유치의 발생 메커니즘을 설명하는 데에는 미흡한 부분이 있었다. 본 논문에서는 잉여고유치의 발생 메커니즘을 보다 명확히 설명하기 위해서, 현과 빔의 자유진동 문제(1차원 진동 문제)에 NDIF법을 적용하여 빔의 고유치 속에 잉여 고유치에 해당하는 현의 고유치가 포함되고 있음을 이론적으로 설명할 것이다.

마지막으로, 본 논문에서 제안된 방법의 검증을 위해, 자유단 경계 조건을 가진 원형 평판과 타원 평판의 고유치가 NDIF법에 의해 구해진다. 원형 평판의 경우, 해석 결과가 엄밀해(exact solution)와 비교되어졌다. 엄밀해가 존재하지 않는 타원 평판의 경우는 유한요소법(ANSYS)에 의해 구해진 결과와 비교되어진다.

2. 일차원 문제

NDIF 법을 일차원 평판의 고유치 문제에 적용하기에 앞서, 먼저 일차원 현(string)과 빔(beam)의 고유치 문제에 적용해보자.

2.1 고정단 현(Fixed String)

Fig. 1과 같이 길이 L , 단위 길이당 질량 ρ 를 갖는 균일한 현을 고려하자. $w(x, t)$ 를 현의 횡 방향 변형량(transverse deflection)이라 하면, 지배방정식과 경계조건은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0 \tag{2}$$

여기서 $C = \sqrt{T/\rho}$ 는 음속이다. (T 는 장력)

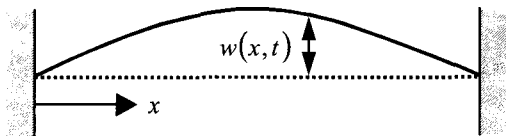


Fig. 1 String of which both ends are fixed

현의 진동을 각진동수(angular frequency) ω 를 갖는 조화운동으로 가정하면, 횡 방향 변형량은 $w(x, t) = W(x)e^{j\omega t}$ 로 쓸 수 있다. 이것을 식 (1)과 식 (2)에 대입하면 다음과 같이 시간 변수 t 에 무관한 지배방정식과 경계조건이 구해진다.

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \Lambda^2 W = 0 \tag{3}$$

$$W(0) = 0, W(L) = 0 \tag{4.5}$$

여기서 $\Lambda = \omega/c$ 는 주파수 파라미터(frequency parameter)이다.

NDIF법을 이용하여 식 (3)의 지배방정식과 식 (4.5)의 경계조건을 만족하는 자유진동 해(solution)을 구하기 위해서는, 현에서의 무차원동영함수(NDIF)를 먼저 구해야 한다. 현 위의 한 점 $x = x_k$ 에서 정의되어지는 NDIF는 지배방정식 (3)을 만족하고 동시에 $x = x_k$ 에서의 변위 조건 $W(x = x_k) = 1$ 을 만족해야 한다. 이를 위해 지배방정식 (3)을 만족하는 일반해(general solution) 식 (6)을 먼저 고려한다.

$$W(x) = A \cos \Lambda x + B \sin \Lambda x \tag{6}$$

식 (6)에 변위 조건 $W(x = x_k) = 1$ 을 적용하면, 현에서의 NDIF는 $\cos(\Lambda|x - x_k|)$ 로 구해진다. 이 함수는 무한 길이의 현에서, 위치 x_k 에 단위 조화 변위가 가진 되어졌을 때 위치 x 에서 발생하는 조화 응답의 진폭을 뜻한다.

멤브레인에 NDIF 방법을 적용한 과거의 연구⁽¹⁾에서와 같이, 현의 자유진동 해를 현의 양쪽 경계 $x = x_1$ 과 $x = x_2$ 에서 각각 정의되어지는 두 NDIF들의 선형결합, 식 (7)과 같이 가정한다.

$$W(x) = \sum_{k=1}^2 A_k \cos(\Lambda|x - x_k|) \tag{7}$$

여기서 A_k 는 가진 진폭의 크기와 관련된 미지 계수(unknown coefficient)이다.

NDIF는 기본적으로 지배방정식을 만족하기 때문에, NDIF들의 선형 결합으로 표시된 식 (7) 또한 지배방정식을 만족한다. 그래서 식 (7)에 경계조건 (4.5)를 적용하는 방법에 의해 길이 L 인 유한 현의 자유진동 해가 구해진다. 식 (7)에 경계조건 식

(4, 5)를 적용하면 다음과 같은 행렬식이 얻어진다.

$$\mathbf{SM}_{\text{string}} \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (8)$$

여기서

$$\mathbf{SM}_{\text{string}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \Lambda L \\ \cos \Lambda L & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

식 (8)에서 $\mathbf{ST}_{\text{string}}$ 와 \mathbf{A} 은 각각 시스템 행렬과 시스템 벡터로 정의되어 있다. 시스템 행렬식 (8)이 유용한 해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 시스템 행렬의 행렬식 (determinant)이 영(zero)이 되어야 한다. 즉,

$$\det[\mathbf{SM}_{\text{string}}] = 0 \quad (11)$$

식 (11)에 식 (9)를 적용하면 다음과 같은 고유치 결정식이 구해진다.

$$\det[\mathbf{SM}_{\text{string}}] = \sin^2 \Lambda L = 0 \quad (12)$$

최종적으로 식 (12)의 근(root)으로부터 현의 고유치가 구해진다.

이상과 같이 NDIF 방법을 이용하여 유한 현의 고유치(eigenvalue)를 구하는 방법이 설명되어졌다. 다음 절에서는 자유단 경계를 가진 빔의 자유 진동 문제에 NDIF법이 적용되어질 것이다.

2.2 자유단 빔

길이 L , 단위 길이당 질량 m 을 갖는 자유단 균일 빔을 고려해 보자. 빔 위의 임의의 지점 x 에서의 횡방향 변위를 $w(x, t)$ 라고 하면, (Fig. 1 참조) 지배방정식과 경계조건들은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

빔의 양단 $x = x_1$ 와 $x = x_2$ 에서

$$EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (14, 15)$$

빔의 운동 양상을 조화운동으로 가정하여, 횡 방향 변형량은 $w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ 을 식 (13~15)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \Lambda^4 W(x) = 0 \quad (16)$$

빔의 양단 $x = x_1$ 와 $x = x_2$ 에서

$$EI \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 W(x)}{dx^3} = 0 \quad (17, 18)$$

여기서 $\Lambda = (\omega^2 m/EI)^{1/4}$ 는 주파수 파라미터를 나타낸다.

NDIF법을 길이 L 의 자유단 빔에 적용하기 위하여, 빔 위의 임의의 점 $x = x_k$ 에서 정의된 NDIF 구해보자. 빔에서의 NDIF는 지배방정식 (13)과 $x = x_k$ 에서의 변위 조건 $W(x = x_k) = 1$ 을 만족하는 함수를 뜻한다. 그래서, 빔의 일반해 (general solution)에 경계조건 $W(x = x_k) = 1$ 을 적용하면, 빔에서의 NDIF는 식 (19)와 같이 구해진다.

$$C_k \cos(\Lambda|x - x_k|) + D_k \cosh(\Lambda|x - x_k|) \quad (19)$$

여기서 C_k 와 D_k 는 미지 계수이다.

현에서와 마찬가지로 자유단 빔의 자유 진동 해는 식 (20)과 같이 식 (19)에서 주어진 NDIF들의 선형 결합으로 가정되어진다.

$$W(x) = \sum_{k=1}^2 \{ A_k \cos(\Lambda|x - x_k|) + B_k \cosh(\Lambda|x - x_k|) \} \quad (20)$$

여기서 x_1 과 x_2 는 빔 양단의 좌표를 뜻한다. 이제 식 (20)에 자유단 빔의 경계조건 식 (14, 15)를 적용하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}_{\text{beam}} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (21)$$

여기서 시스템 행렬과 시스템 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_{\text{beam}} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_M^c & \mathbf{SM}_M^h \\ \mathbf{SM}_V^c & \mathbf{SM}_V^h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} \quad (22, 23)$$

그리고,

$$\mathbf{SM}_M^c(i, k) = \frac{d^2}{dx_i^2} \cos(\Lambda |x_i - x_k|) \quad (24a)$$

$$\mathbf{SM}_M^h(i, k) = \frac{d^2}{dx_i^2} \cosh(\Lambda |x_i - x_k|) \quad (24b)$$

$$\mathbf{SM}_V^c(i, k) = \frac{d^3}{dx_i^3} \cos(\Lambda |x_i - x_k|) \quad (24c)$$

$$\mathbf{SM}_V^h(i, k) = \frac{d^3}{dx_i^3} \cosh(\Lambda |x_i - x_k|) \quad (24d)$$

$i, k = 1 \text{ or } 2$

식 (21)이 유용한 해를 갖기 위해서는 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_{\text{beam}}$ 의 행렬식 (determinant)이 영(zero)이 되어야 한다는 조건

$$\det[\mathbf{SM}_{\text{beam}}] = 0 \quad (25)$$

으로부터 고유치가 구해질 수 있다. 식 (22)와 식 (24)를 식 (25)에 적용하면, 행렬식은 다음과 같이 된다.

$$\det[\mathbf{SM}_{\text{beam}}] = (\cos AL \cdot \cosh AL - 1) \sin AL = 0 \quad (26)$$

식 (26)은 NDIF방법에 의해 구해진 길이 L 인 빔의 고유치 결정식을 뜻한다. 한편, 식 (26)은 다음과 같이 두개의 식으로 표현되어질 수 있다.

$$(\cos AL \cdot \cosh AL - 1) = 0 \quad (27)$$

$$\sin AL = 0 \quad (28)$$

식 (27)의 근들만이 자유단 빔의 고유치에 해당함이 확인되었으며,⁽⁶⁾ 식 (28)의 근은 잉여 고유치(spurious eigenvalue)에 해당함을 알 수 있다.(앞 절의 식 (12) 참조) 이상과 같이 NDIF법을 이용하여 빔의 고유치를 구하면, 현의 고유치에 해당하는 잉여 고유치도 함께 구해짐이 확인되어졌다. 더 나아가, 잉여고유치를 제외한 빔의 고유치만을 제공하는 고유치 결정식은 식 (29)와 같이 구해질 수 있음을 예측할 수 있다.

$$\frac{\det[\mathbf{SM}_{\text{beam}}]}{\det[\mathbf{SM}_{\text{string}}]} = 0 \quad (29)$$

3. 자유단 경계를 갖는 평판

2장에서는 NDIF법을 1차원 고정 현(fixed string)과 자유단 빔(free beam)의 자유진동해석에 적용하여, 시스템 행렬식을 구하는 방법과 잉여 고유치의 의미와 그 제거 방법에 대하여 고찰하였다. 본 장에서는 2장의 고찰 내용을 2차원 고정 멤브레인(fixed membrane)과 자유단 평판(free plate)의 자유진동해석에 확장한다. 2장에서 NDIF법에 의해 구한 자유단 빔의 고유치 결정식 속에는 현의 고유치 결정식이 포함되어 있음을 확인하였듯이, NDIF법에 의해 구해진 자유단 평판의 고유치 결정식 속에도 고정단 멤브레인의 고유치 결정식이 포함되어 있으리라 예측할 수 있을 것이다. 그래서, 잉여 고유치를 배제한 자유단 평판의 고유치를 구하기 위하여, 2장에서와 동일한 방법(식 (29) 참조)이 사용될 것이다.

3.1 고정단 멤브레인(Fixed Membrane)

면밀도가 ρ 인 멤브레인이 단위 길이당 장력 T 를 받고 있을 때 횡 방향의 자유 진동에 대한 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (30)$$

$$w|_{\Gamma} = 0 \quad (31)$$

여기서 $w = w(\mathbf{r}, t)$ 는 횡방향 변위, $c = \sqrt{T/\rho}$ 는 파의 전파 속도, Γ 는 멤브레인의 경계를 뜻한다. 만약 멤브레인의 진동을 조화 운동 $w(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$ 로 가정한다면, 식 (30)과 식 (31)은 다음과 같이 간단히 된다.

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}) + \Lambda^2 W(\mathbf{r}) = 0 \quad (32)$$

$$w|_{\Gamma} = 0 \quad (33)$$

여기서 $\Lambda = \omega/c$ 는 주파수 파라미터이다. 멤브레인의 자유진동 문제에 NDIF법을 적용하기 위하여, 먼저 멤브레인에서의 NDIF를 구해야만 한다. 지배방정식 (32)를 만족하고 동시에 무한 멤브레인 위의 임의 위치 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$ 에서의 변위 조건 $W(\mathbf{r} = \mathbf{r}_k) = 1$ 을 만족하는 NDIF는 제 1종 0차 베셀함수

$J_0(\Lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|)$ 로 구해진다.⁽¹⁾ Fig. 2에서 보여진 멤브레인의 자유진동 해는 멤브레인의 경계를 따라 설정된 N 개의 노드들 위에서 정의되어지는 NDIF들의 선형결합으로 다음과 같이 가정되어진다.⁽¹⁾

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N A_k J_0(\Lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|) \quad (34)$$

여기서 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ 은 멤브레인의 경계를 따라 설정된 노드들의 위치벡터를 뜻한다.

다음으로 경계를 따라 연속적으로 정의된 연속 경계조건(fixed boundary condition) 식 (33)은 이산 경계조건의 형식으로 다음과 같이 변형되어진다.

$$W(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (35)$$

마지막으로 이산 경계조건 식 (35)을 가정된 자유진동해 식 (34)에 적용하면 다음과 같은 N 개의 선형방정식이 얻어진다.

$$W(\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^N A_k J_0(\Lambda|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|) = 0 \quad (36)$$

$i=1, 2, \dots, N$

식 (36)을 하나의 행렬식으로 간단히 표현하면 다음과 같은 시스템 행렬식으로 정리된다.

$$\mathbf{SM}_{\text{mem}} \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (37)$$

여기서 시스템 행렬 \mathbf{SM}_{mem} 의 i 번째 행과 k 번째 열에 위치한 성분은

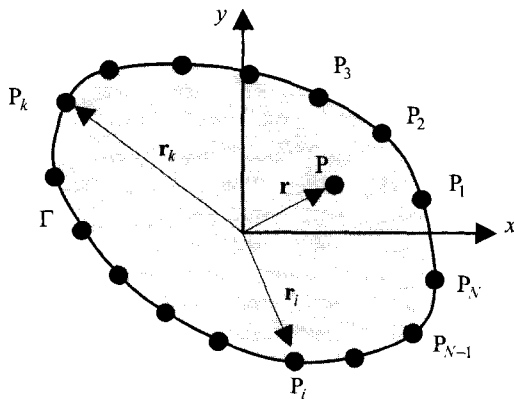


Fig. 2 Finite membrane(or plate) located on an infinite membrane(or plate)

$$\mathbf{SM}_{\text{mem}}(i, k) = J_0(\Lambda|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|) \quad (38)$$

에 의해 주어지며,

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}^T \quad (39)$$

는 시스템 벡터를 뜻한다. 식 (37)이 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 이외의 유용한 해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 시스템 행렬의 행렬식이 영(zero)이 되어야 한다. 즉,

$$\det[\mathbf{SM}_{\text{mem}}(\Lambda)] = 0 \quad (40)$$

고정단 멤브레인의 고유치는 식 (40)의 근으로부터 구해질 수 있다.

3.2 자유단 평판 (Free Plate)

자유단 경계를 가진 평판의 자유진동에 관한 지배방정식과 경계조건은 다음과 같이 주어진다.⁽⁶⁾

$$D_E \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (41)$$

$$M_n(w) = 0, \quad V_n(w) = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad (42, 43)$$

여기서 $w = w(\mathbf{r}, t)$ 는 횡 방향 진동 변위, ρ 는 면밀도, $D_E = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E 는 영 계수(Young's modulus), ν 는 포아송 비(Poisson ratio), h 는 평판의 두께이다. 또한 n 과 s 는 평판의 경계 위의 한 점에서의 법선 및 접선 방향 좌표를 뜻한다. 평판의 진동을 조화운동 $w(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{r})e^{j\omega t}$ 로 가정하면 식 (41~43)은 다음과 같이 된다.

$$\nabla^4 W - \Lambda^4 W = 0, \quad \Lambda = (\rho\omega^2 / D_E)^{1/4} \quad (44, 45)$$

$$M_n(W) = 0, \quad V_n(W) = 0 \quad (46, 47)$$

여기서 Λ 는 주파수 파라미터를 나타낸다.

평판의 자유진동 문제에 NDIF법을 적용하기 위하여, 먼저 평판에서의 NDIF가 구해져야만 한다. 고정단 평판(clamped plate)에 대한 저자의 선행 연구 결과⁽⁴⁾를 참고로 하면, 평판에서의 NDIF는 다음과 같다.

$$C_k J_0(\Lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|) + D_k I_0(\Lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|) \quad (48)$$

여기서 J_0 와 I_0 는 각각 제 1 종 및 제 2 종 0 차 베셀 함수를 나타낸다. 그리고 평판의 자유진동해는 멤브레인에서와 마찬가지로 평판의 경계를 따라 설정된 N 개의 노드에서 정의되어진 NDIF들의 선형 결합으로 가정되어진다. 즉,

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \{A_k J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|)\} \quad (49)$$

식 (49)에 자유단 경계 조건을 적용하기 위하여, 식 (46, 47)은 다음과 같이 이산화 되어진다.

$$M_n(\mathbf{r}_i) = 0, \quad V_n(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (50, 51)$$

여기서 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ 은 자유단 평판의 경계를 따라 설정된 노드들의 위치벡터를 뜻한다.

한편, 차후의 수식 전개 과정을 간단히 하기 위해, 식 (50, 51)을 미분 연산자 L_M 과 L_V 을 사용하여 새로이 표현하자. 즉,

$$M_n(\mathbf{r}_i) \equiv L_M[W(\mathbf{r}_i)] = 0 \quad (52)$$

$$V_n(\mathbf{r}_i) \equiv L_V[W(\mathbf{r}_i)] = 0 \quad (53)$$

이제, 이산 자유단 경계조건 식 (52, 53)을 가정된 자유진동 해 식 (49)에 적용하면 $2N$ 개의 선형방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$L_M(W(\mathbf{r}_i)) = \sum_{k=1}^N A_k L_M[J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] + \sum_{k=1}^N B_k L_M[I_0(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] = 0 \quad (54)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

$$L_V(W(\mathbf{r}_i)) = \sum_{k=1}^N A_k L_V[J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] + \sum_{k=1}^N B_k L_V[I_0(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] = 0 \quad (55)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

식 (54, 55)는 하나의 행렬식으로 간단히 표현되어질 수 있다. 즉,

$$\mathbf{SM}_{\text{plate}} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (56)$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_{\text{plate}}$ 와 시스템 벡터 \mathbf{C} 는

다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{SM}_{\text{plate}} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_M^J & \mathbf{SM}_M^I \\ \mathbf{SM}_V^J & \mathbf{SM}_V^I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} \quad (57, 58)$$

마지막으로, 자유단 평판의 고유치는

$$\det[\mathbf{SM}_{\text{plate}}] = 0 \quad (59)$$

의 근들로부터 구해질 수 있다. 앞에서 고려되어진 1 차원 현과 빔의 자유진동 해석 결과를 참고로 하면, 멤브레인의 고유치에 해당하는 잉여 고유치가 식 (59)의 근 속에 포함되어 있을 것이라 예상할 수 있을 것이다. 이러한 잉여 고유치를 제거하기 위하여, 식 (29)와 같은 방법이 이용되어진다. 즉,

$$\frac{\det[\mathbf{SM}_{\text{plate}}]}{\det[\mathbf{SM}_{\text{mem}}]} = 0 \quad (60)$$

식 (60)은 잉여고유치를 배제한 자유단 평판의 고유치만을 제공하는 고유치 결정식을 뜻한다.

4. 비교 예제

4.1 자유단 원형 평판(Free Circular Plate)

NDIF법을 이용하여 단위 반지름을 갖는 원형 평판의 고유치를 구하기 위해, 평판 경계 위에 적절한 간격으로 16개의 노드를 설정하여 해를 구하였다. 그 결과는 Table 1에 요약되어져 있다. Table 1에서 첫번째 열은 잉여고유치를 제거하기 전인 식 (59)의 근을 의미한다. 두번째 열은 잉여고유치를 제거한 후인 식 (60)의 근을 의미한다. 두번째 열에 해당하는 자유단 평판의 고유치들을 엄밀해(세번째 열)와 비교해보면, 거의 오차가 없음을 확인할 수 있다. 이는 NDIF법이 적은 개수의 노드를 사용하더라도 정확한 결과를 제공한다는 사실을 말해준다. 이와 더불어, 12개 및 20개의 노드들이 사용된 경우에 대해서도 고유치결과가 엄밀해에 수렴되고 있음이 확인되어 졌다.

4.2 자유단 타원 평판(Free Elliptic Plate)

단축의 길이가 1 m이고, 단축에 대한 장축 비가 1.4 인 타원 평판의 경계를 16개의 노드들로 이산화한 다음, NDIF법에 의해 고유치를 구하였다. 그 결과는

Table 1 Eigenvalues of the circular plate obtained by the proposed method and the other method

NDIF법 (before sorting)	NDIF법 (after sorting)	Exact solution	
		Plate	Membrane
2.29	2.29	2.29	
2.40			2.40
3.01	3.01	3.01	
3.50	3.50	3.50	
3.83			3.83
4.53	4.53	4.53	
4.64	4.64	4.64	
5.14			5.14
5.52			5.52
5.75	5.75	5.75	
5.94	5.94	5.94	

Table 2 Eigenvalues of the elliptic plate obtained by the proposed method and the other method

NDIF법 (before sorting)	NDIF법 (after sorting)	Plate solution (FEM)	Membrane solution (exact)
1.81	1.81	1.81	
1.96	1.96	1.95	
2.08			2.08
2.73	2.73	2.74	
2.83	2.83	2.83	
2.91	2.91	2.91	
3.04			3.04
3.58			3.58
3.70	3.70	3.70	
3.80	3.80	3.80	
3.84	3.84	3.84	

Table 2에 요약되어 있다. Table 2에서 두번째 열은 식 (60)에 의해 잉여고유치가 제거된 결과에 해당한다. 이들 고유치들은 FEM(ANSYS: 4335 노드)의 해 구한 결과(세번째 열)와 잘 일치함을 확인할 수 있다. NDIF법에서 단지 16개의 노드 만이 사용되어졌음에도 불구하고, 4335개의 노드를 사용한 FEM 결과에 거의 근접하는 고유치를 구해짐을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 NDIF법을 일차원 현과 빔에 적용하여 잉여 고유치의 발생 원인과 제거 방안을 제시하였으며, NDIF법을 이용하여 자유단 경계를 가진 임의 형

상 평판의 자유진동해석 기법을 제안하였다. 이 방법은 적은 개수의 노드를 사용함에도 아주 정확한 해를 제공하는 것이 관련 예제를 통해 검증되어 졌다.(지면 관계상 모드 형상에 대한 결과는 생략되어졌음)

후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음.(KRF-2002-041-D00029)

참 고 문 헌

- (1) Kang, S. W., Lee, J. M. and Kang, Y. J., 1999, "Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membranes Using Non-dimensional Dynamic Influence Function," Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.
- (2) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the Method of Point-matching," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.
- (3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamic Influence Function," Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.
- (4) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.
- (5) Kang, S. W., 2002, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-Dimensional Dynamic Influence Functions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.
- (6) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations," New York: Macmillan Publishing, pp. 179~182.
- (7) 정대근, 1995, "단순급수함수를 이용한 임의 형상판의 자유진동해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 5 권, 제 3 호, pp. 345~352.