

## 환원판이 결합된 원통셀의 진동해석

### Vibration Analysis of Combined Cylindrical Shells with an Annular Plate

김 영 완\* · 정 강\*

Young-Wann Kim and Kang Chung

(2003년 5월 26일 접수 : 2003년 9월 22일 심사완료)

**Key Words** : Combined Cylindrical Shell(결합셀), Annular Plate(환원판), Structural Coupling(구조연성), Artificial Spring(가상 스프링), Rayleigh-Ritz Method(Rayleigh-Ritz법)

#### ABSTRACT

The theoretical method is developed to investigate the vibration characteristics of the combined cylindrical shells with an annular plate joined to the shell at any arbitrary axial position. The structural coupling between shell and plate is simulated using two types of artificial springs : a translational spring is introduced for translational coupling and a rotational spring is used for rotational coupling. The springs are continuously distributed along circumferential direction. Using the Rayleigh-Ritz method the natural frequencies and mode shapes of the combined shell with an annular plate examine. The effect of inner-to-outer radius ratio, axial position of annular plate and length-to-radius ratio of shell on vibration characteristics of combined cylindrical shells is studied. The theoretical results are verified by comparison with FEM results.

#### 1. 서 론

일반적으로 항공기, 선박 등의 연료탱크나 지상에 설치된 각종 저장형 탱크, 반응로 등은 대부분 원통형 구조형상을 가지고 있다. 또한 이들은 유체를 포함하는 구조물로서 외부 가진력으로 인하여 탱크에 포함된 액체연료의 주기적인 거동, 즉 유체가 출렁거리는 현상인 슬로싱을 일으키게 된다. 유체의 자유표면에서 발생하는 유체 출렁거림은 구조물에 치명적인 영향을 미칠 수 있기 때문에 유체의 출렁거림을 방지 또는 억제하기 위해 연료탱크 내에 적당한 간격의 격막이나 배플(baffle) 등을 설치하고 있다. 원통셀의 유체 출렁거림을 억제하기 위해 사용되는 배플형태는 주로 링형태의 원판인 환원판이 이용되고 있다. 이와

같이 셀에 환원판이 결합됨으로써 판이 결합되지 않은 셀에 비해 진동특성은 매우 복잡해진다. 셀과 판이 결합된 원통셀에 대해 몇몇 연구자가 진동특성에 대한 연구를 수행하였다. Yamada 등<sup>(1)</sup>은 원통셀의 양단이 환원판으로 닫혀진 이중셀에 대해, Cheng과 Nicolas<sup>(2)</sup>는 가상스프링을 이용하여 원통셀의 양단에 원판이 결합된 셀에 대해, Yuan과 Dickinson<sup>(3)</sup>은 가상 스프링법을 이용하여 셀의 양단에 원판이 결합된 원통셀과 환원판이 결합된 이중 원통셀에 대한 진동 해석을 수행하였다. 동적응답법을 이용하여 Huang과 Soedel,<sup>(4)</sup> Huang<sup>(5)</sup>은 셀의 양단에 원판이 결합된 셀에 대해 진동해석을 수행하였다. 같은 방법으로 Huang과 Soedel,<sup>(6)</sup> 임정식과 손동성<sup>(7)</sup>은 하나의 원판이 셀의 임의의 지점에 결합되는 셀에 대한 진동특성을 연구하였다. Cho 등<sup>(8)</sup>은 유한요소법을 이용하여 임의의 지점에 환원판이 결합되고 유체가 채워진 원통셀에 대한 진동해석을 수행하였다. Missaoui 등<sup>(9)</sup>은 원통셀의 내부에 사각판이 결합된 경우 가상 스프링법을 이용하여 진동해석을 수행하였으며, Lee와

\* 책임저자, 정회원, 여수대학교 기계공학과  
E-mail : ywkim@yosu.ac.kr  
Tel : (061) 659-3285, Fax : (061) 652-3655  
\* 여수대학교 기계공학과

the vehicles, some of the surface plate parts of the vehicle bodies, or the covers of the machinery, etc. can be good examples where large response can occur, hence fatigue can occur.

The goal of this research was to reduce the vibration amplitude of a rectangular plate with corner supports caused by acoustic excitation by placing one piezoelectric actuator on the central position which has maximum deflection of plate. The range of the frequency and sound pressure level of the acoustic excitation was selected from the region of annoying noise environments. There is only a small amount of general literature on the vibration of corner-pinned plates.<sup>(7, 9, 11)</sup>

Analytical methods, kept as simple as possible, were used to size the panels, to design experiments, and to develop the controller concepts. It was also necessary to try to define plate frequencies to match the range of the speakers. It was necessary also to produce response large enough to be measured. These two opposing requirements drove the design. Three different sized rectangular plate models were used. Vibration control equipment was used to attempt to reduce the acoustic and mechanical responses of the vibrating plate. With these models, the frequencies and bending properties of the corner-pinned plates were calibrated, and finally, the control of the piezoelectric wafer was designed. A comparison of the experimental data with the theoretical results was also made.

## 2. Theoretical Analysis for the Vibration of a Corner-pinned Rectangular Plate

There are many different methods to get the natural frequencies of the corner-pinned plate vibration. Although the tradition PDE (partial derivative equation) method is valid here, the Rayleigh method was used more extensively here. The motion of rectangular plate was analyzed and then boundary conditions for the corner-pinned plate are applied to it.<sup>(5)</sup> The basic equation of motion for a vibrating rectangular plate:

$$D \nabla^4 w(x, y, t) + \rho_a \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

where

$$D = \text{Flexible Rigidity} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ (in-lb)} \quad (2)$$

$E$  = Young's Modulus (lb/in<sup>2</sup>)

$h$  = plate thickness (in)

$\nu$  = Poisson's ratio

$\rho_a$  = mass density per unit area (slug/in<sup>2</sup>)

$t$  = time (sec)

$w(x, y, t)$  = deflection (in)

$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$  ( $\nabla^2 =$  Laplacian operator)

For the free vibration, the motion is expressed as

$$w = W \cos(\omega t) \quad (3)$$

Substituting equation (3) into equation (1) yields

$$(\nabla^4 - k^4) W = 0 \quad (4)$$

$$\text{where } k^4 = \frac{\rho_a \omega^2}{D} \quad (5)$$

By the theory of linear differential equations, the complete solution to (4) can be obtained by superimposing the solutions to the equations

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2) W &= 0 \\ \nabla^2 W_1 + k^2 W_1 &= 0 \\ \nabla^2 W_2 - k^2 W_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Applying to equation (1) with the boundary conditions of a corner-pinned plate as equation (7) and from the Rayleigh's energy method for the frequency of mode shape  $\psi_i$ <sup>(15)</sup> it yields,

$$\begin{aligned} w(0, 0, t) = w(0, 0) &= 0 \\ w(0, b, t) = w(0, b) &= 0 \\ w(a, 0, t) = w(a, 0) &= 0 \\ w(a, b, t) = w(a, b) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\omega_n = \frac{\lambda_i^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_a}} \text{ (cycle/sec) or } f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ (Hz)} \quad (8)$$

Equation (8) is identical to the exact solution formula except for  $\lambda_i^2$  (frequency parameter). The exact solution gives lower values in the lower modes.

The inclusion of ball joint mass, piezoelectric wafer mass stiffness will complicate the exact solution. By establishing a ratio between the Rayleigh solution (simple mode shape) and the exact solutions, this ratio can be applied to the plate frequency calculated by the Rayleigh method considering ball joint mass and inertia, and piezoelectric mass and inertia to obtain close prediction with test as equation (9). Also, the Rayleigh method is easier to use to design the original test setup.

$$\omega_n^2 = \frac{U_{plate} + U_{piezo}}{M_{plate} + M_{piezo} + M_{ball-joint}} \quad (9)$$

where

$$U_{plate} = \frac{D}{2} \iint_{plate} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA,$$

$$U_{piezo} = \frac{D}{2} \iint_{piezo} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA,$$

$$M_{plate} = \frac{(\rho_a)_{plate}}{2} \iint_{plate} w^2 dA,$$

$$M_{piezo} = \frac{(\rho_a)_{piezo}}{2} \iint_{piezo} w^2 dA,$$

$$M_{ball-joint} = 4 \left[ (I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta) w_x^2 + (I_{xx} \sin^2 \theta + I_{yy} \cos^2 \theta) w_y^2 \right]$$

where  $I_{xx}, I_{yy}$  is inertia moment of 4 ball joints at hinge point,  $\theta$  is the inclined angle of ball joints and it is  $45^\circ$ . Fig. 1 shows that the difference of between 2 natural frequencies calculated with equation (8) and (9) is not small.

### 3. Experimental Setup

#### 3.1 Corner-pinned Rectangular Plate Model

The plate model is a thin rectangular plate of aluminum alloy (AL 2024) with a certain homogeneous thickness. This plate will be pinned at the four corners by ball-joints. On one side of the plate some strain gages will be attached to

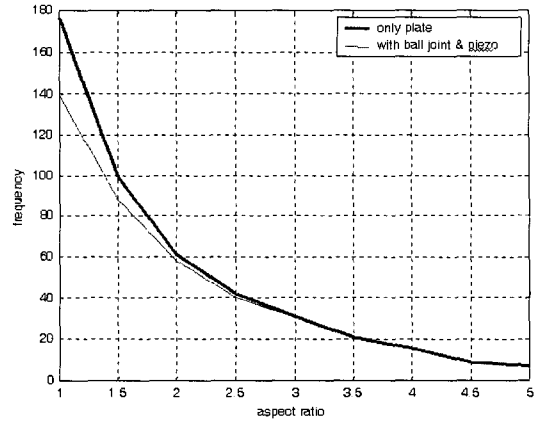


Fig. 1 Ball joint and piezoelectric sensor and actuator effect for the frequency responses at different aspect ratio

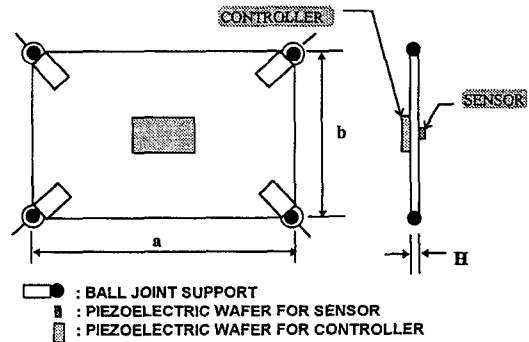


Fig. 2 Corner-pinned aluminum plate with piezoelectric sensor and piezoelectric controller

$$w(x, \theta) = \sum_{m=1}^M W_{mn} \psi_m \cos n\theta \quad (18)$$

여기서  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{mn}$ 는 각 방향 진폭,  $m$ 과  $n$ 은 축방향 및 원주방향 반파수,  $M$ 은 급수항이다.

원통셀에 대한 변형에너지 (13) 및 기준운동에너지 (16)를 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$U_c = \frac{1}{2} \{X\}^T [K] \{X\}, T_c = \frac{1}{2} \{X\}^T [M] \{X\} \quad (19)$$

$$\{X\}^T = \{U_{mn} \quad V_{mn} \quad W_{mn}\} \quad (20)$$

여기서  $[K]$ ,  $[M]$ 은 원통셀의 강성 및 질량행렬로 (3×3)의 부분행렬로 구성되며 부록에 주어졌다.

### 2.3 환원판 결합 원통셀

셀과 환원판을 결합시키는 회전 스프링은 결합지점에서의 회전을, 병진스프링은 반경방향으로의 변위를 판과 셀에 대해 연성시키므로 스프링에 저장되는 변형에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{sp} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ k_r \left[ (\partial w / \partial x)_{x=x^*} + (\partial w_p / \partial r)_{r=R} \right]^2 + k_t \left[ (w)_{x=x^*} - (u_p)_{r=R} \right]^2 \right\} R d\theta \quad (21)$$

환원판의 내평면 진동수는 횡방향 진동수에 비해 매우 큰 값을 갖기 때문에 판을 내평면 변형에 대해 비탄성으로 가정하고 횡방향으로만 변형이 된다면 판은 반경방향으로 단지 강제운동만을 하게 되므로 판의 반경방향 변위  $u_p$ 를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$u_p = q \cos \theta \quad (22)$$

따라서 식 (21)는 다음의 행렬형태로 표현된다.

$$U_s = \frac{1}{2} \{\bar{X}\}^T [K_s] \{\bar{X}\}, \{\bar{X}\}^T = \{W_{mn} \quad p_k \quad q\} \quad (23)$$

여기서 행렬  $[K_s]$ 는 (3×3)의 부분행렬로 구성되며 부록에 주어졌다.

환원판이 결합된 원통셀에 대한 진동수방정식은 식 (19)과 (23)을 이용하면, Rayleigh-Ritz식으로부터 다음과 같이 정리된다.

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} [K_{11}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K_{12}]^T & [M_{22}] & 0 & 0 & 0 \\ [K_{13}]^T & 0 & [M_{33}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_p] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ p_k \\ q \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

식 (24)의 마지막 식에서  $q = -[K_{33}]^{-1} [K_{313}]^T W_{mn}$ 의 관계식을 구한 후 세 번째 식에 적용하면 다음과 같이 보다 간단히 정리된다.

$$[K_t] \{\hat{X}\} - \omega^2 [M_t] \{\hat{X}\} = 0 \quad (25)$$

$$\{\hat{X}\}^T = \{U_{mn} \quad V_{mn} \quad W_{mn} \quad p_k\}$$

여기서 행렬  $[K_t]$ ,  $[M_t]$ 는 부록에 주어졌으며,  $\omega$ 는 결합셀의 고유진동수이다.

### 3. 수치결과

본 이론적 방법의 타당성을 검증하기 위해 상용 유한요소 프로그램인 ANSYS<sup>(11)</sup>를 이용한 2차원 해석을 통해 그 결과를 비교, 검토하였다. 유한요소해석에서 2차원 축대칭 구조 셀요소(Shell61)가 이용되었다. 이 요소는 2개의 절점으로 구성되고 각 절점은 4-자유도를 갖는다. 본 연구에서는 탄성계수  $E = 72 \text{ GPa}$ , 프와송 비  $\nu = 0.3$ , 밀도  $\rho = 2780 \text{ kg/m}^3$ 의 물성을 갖는 알루미늄을 고려하였다. 각 스프링에 대한 강성계수를  $k_L^* = k_L R^3 / D_p$ ,  $k_R^* = k_R R / D_p$ 와 같이 판의 굽힘 강성계수에 대한 비로 무차원화 하였다.

Rayleigh-Ritz법을 적용하여 정확한 해를 얻기 위해서는 셀의 변위식에 대한 급수항  $M$ 과 판에 대한 급수항  $K$ 에 따른 수렴성을 검토하여야 한다. 수렴성 검토를 위해 환원판이 셀의 중앙에 결합된 셀에 대한 결과를 Table 1에 제시하였다. 고려된 셀 및 판에 대해 각각 반지름  $R = 0.2 \text{ m}$ , 길이  $L = 2R$ , 환원판의 반지름 비  $a/R = 0.5$ , 셀 및 판의 두께  $t_s = t_p = 2 \text{ mm}$ , 스프링의 무차원 강성계수  $k^* = 10^6$ 를 이용

하였다. Table 1에서처럼 급수항이 증가함에 따라 진동수가 일정한 값 즉, 급수항 증가에 따라 진동수변화가 1%미만으로 접근하는 것을 볼 수 있다.  $M \times K = 15 \times 15$  이상으로 하면 해가 보다 잘 수렴될 것으로 예측되나, 급수항이 너무 크면 풀어야 할 행렬이 너무 커져 수렴성에 비해 계산시간이 많이 소요되어 비효율적이다. 따라서 제시될 수치결과는 비교적 수렴성이 좋은  $M \times K = 15 \times 15$ 를 이용하여 계산된다.

환원판과 원통셀의 결합조건은 스프링 강성계수의 크기에 따라 자유상태에서 강건한 결합상태로 될 것이다. 따라서 판과 셀의 완전한 결합상태를 구현하기 위해 스프링 강성계수에 따른 진동수변화를 살펴봄으로써 적당한 강성계수를 선정할 수 있다. Fig. 2는 Table 1에서 제시된 원통셀에 대해  $n=5$ 모드에서 스프링의 무차원 강성계수에 따른 진동수변화를 나타낸 것이다. 일반적으로 고려된 모든 모드에 대해 세가지 다른 영역(A, B, C)으로 진동수변화를 설명할 수

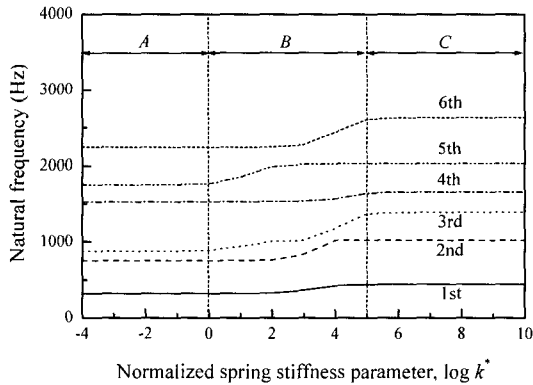


Fig. 2 Effect of spring stiffness on frequency for  $n=5$  mode of combined shell used in Table 1

Table 1 Convergence study of natural frequencies

| n | Mode | $M \times K$ |        |        |        |        |
|---|------|--------------|--------|--------|--------|--------|
|   |      | 5×5          | 10×10  | 10×15  | 15×10  | 15×15  |
| 1 | 1st  | 284.89       | 275.28 | 272.73 | 271.63 | 269.23 |
|   | 2nd  | 1194.2       | 1178.8 | 1178.2 | 1174.7 | 1173.4 |
|   | 3rd  | 1290.1       | 1226.1 | 1211.5 | 1204.0 | 1191.6 |
|   | 4th  | 3081.3       | 3043.2 | 3042.6 | 3028.2 | 3026.4 |
|   | 5th  | 3384.0       | 3170.2 | 3133.8 | 3101.5 | 3073.0 |
| 5 | 1st  | 453.07       | 443.86 | 443.81 | 441.26 | 441.21 |
|   | 2nd  | 1058.9       | 1035.0 | 1029.4 | 1026.2 | 1021.7 |
|   | 3rd  | 1476.0       | 1413.2 | 1413.1 | 1388.2 | 1388.0 |
|   | 4th  | 1828.5       | 1675.3 | 1675.3 | 1655.1 | 1655.1 |
|   | 5th  | 2166.0       | 2074.8 | 2058.1 | 2048.8 | 2034.4 |

있다. 영역 A에서는 강성계수가 진동수에 미치는 영향이 거의 없는 구간이며, 영역 B는 강성계수 변화에 대해 진동수가 민감하게 반응하는 구간이다. 영역 C에서는 강성계수의 증가에 대해 진동수가 안정되게 일정한 값으로 수렴되는 구간이다. 이와 같은 경향으로부터 연결부위에서의 강건한 연결조건을 충분히 만족시킬 만큼 구조물의 강성계수에 비해 영역 C에서의 강성계수가 충분히 크다는 것을 알 수 있다. 진동차수의 증가에 따라 영역 C로 접근하는 스프링 강성계수가 커지는 것을 볼 수 있다. 이와 같이 고차 진동특성을 얻기 위해서는 충분히 큰 스프링 강성계수를 선택하여야 한다. 따라서 앞으로 제시될 결합셀에 대한 수치결과는 고차 진동특성에 대해서도 강건한 결합조건을 구현할 수 있도록 충분히 큰  $10^{12}$ 의 무차원 강성계수를 이용한다.

Table 2은 본 이론해의 타당성을 검증하기 위해 유한요소해석 및 이론해석결과를 비교한 것이다. 고려된 셀은 앞에서 이용된 경우와 동일하다. 표에 나타난 것처럼 원주 방향 반파수  $n$ 이 작은 경우 다른 반파수에 비해 비교적 큰 차이가 나지만 원주방향 반파수가 커질수록 차이가 작아지는 것을 볼 수 있고, 전반적으로 두 해석방법에 따른 결과가 비교적 잘 일치하고 있다.

Fig. 3은 Table 2의 결과에 대해 선택적으로 원주

Table 2 Comparison study with FEM

| n | Method    | Natural frequency (Hz) |         |         |         |         |
|---|-----------|------------------------|---------|---------|---------|---------|
|   |           | 1st                    | 2nd     | 3rd     | 4th     | 5th     |
| 1 | Theory    | 267.27                 | 1147.3  | 1179.0  | 2949.5  | 3070.0  |
|   | FEM       | 255.94                 | 1088.7  | 1125.2  | 2771.3  | 2932.3  |
|   | Disc. (%) | 4.4268                 | 5.3826  | 4.7814  | 6.4302  | 4.6960  |
| 2 | Theory    | 390.66                 | 928.51  | 1298.0  | 2301.6  | 3111.3  |
|   | FEM       | 377.70                 | 941.28  | 1242.7  | 2278.8  | 2995.1  |
|   | Disc. (%) | 3.4313                 | -1.3567 | 4.4500  | 1.0005  | 3.8797  |
| 3 | Theory    | 557.75                 | 639.72  | 1499.0  | 1923.0  | 2505.1  |
|   | FEM       | 541.83                 | 654.17  | 1430.8  | 2018.8  | 2559.5  |
|   | Disc. (%) | 2.9382                 | -2.2089 | 4.7666  | -4.7454 | -2.1254 |
| 4 | Theory    | 468.62                 | 772.22  | 1593.8  | 1738.5  | 2014.1  |
|   | FEM       | 480.78                 | 747.90  | 1655.7  | 1687.1  | 2072.8  |
|   | Disc. (%) | -2.5292                | 3.2518  | -3.7386 | 3.0467  | -2.8319 |
| 5 | Theory    | 445.20                 | 1021.4  | 1391.5  | 1653.8  | 2032.9  |
|   | FEM       | 441.12                 | 995.75  | 1401.7  | 1705.8  | 1963.4  |
|   | Disc. (%) | 0.9249                 | 2.5760  | -0.7277 | -3.0484 | 3.5398  |
| 6 | Theory    | 498.39                 | 1232.0  | 1323.0  | 1470.1  | 2331.3  |
|   | FEM       | 503.98                 | 1222.5  | 1289.8  | 1477.0  | 2283.0  |
|   | Disc. (%) | -1.1092                | 0.7771  | 2.5740  | -0.4672 | 2.1156  |

방향 반파수  $n=1, 3$  및  $5$ 에 대한 축방향 진동형상을 이론 및 유한요소해석결과와 비교한 것으로 서로 잘 일치하고 있다. 여러 반파수에 대한 진동형상중에 반파수  $n=5$ 에 대한 특징은 다음과 같다. 1차 진동형상의 경우 판의 변형은 없고 셀의 윗부분만 변형되는 셀 모드이며, 2차 진동형상의 경우 판만 변형된 형태로  $k=0$ 의 1차 판 모드이다. 3차의 경우 판과 셀이 동시에 변형된 혼합 모드로써 판은  $k=0$ 모드로, 셀의 아래 부분에서는  $m=1$ 모드로 변형이 일어난다. 4차 진동형상의 경우 3차와 같이 혼합모드이지만 셀의 윗부분에서 큰 변형이 이루어 졌다. 5차 진동형상의 특징으로는  $k=1$ 의 2차 판 모드로 셀에서의 변형은 일어나지 않는다.

판의 결합위치가 진동수 및 진동형상에 미치는 영향을 알아보기 위해 Fig. 4와 5가 제시되었다. 고려된 셀 및 판은 각각 반지름  $R=0.2m$ , 길이  $L=2R$ , 환원판의 반지름 비  $a/R=0.7$ , 셀 및 판의 두께  $t_s=t_p=2mm$ 이다. 셀만 고려한 경우 원주방향 반파수

에 따라 진동수가 최소값까지 감소를 한 후 증가하는 거동을 하지만, 결합셀의 경우 거동이 매우 다르게 나타난다. 결합셀의 경우 각각의 원주방향 반파수에 대한 1차 진동수의 경우 원주방향 반파수가 작은  $n$

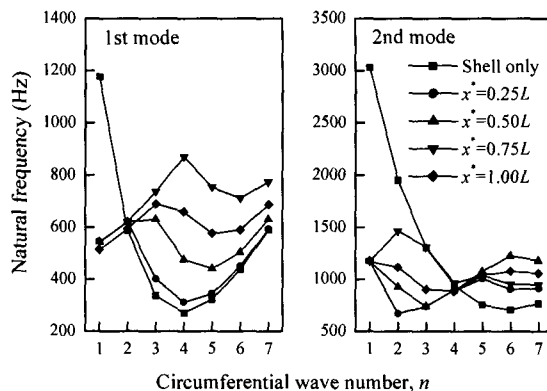


Fig. 4 Effect of axial position of plate on natural frequency with circumferential wave number

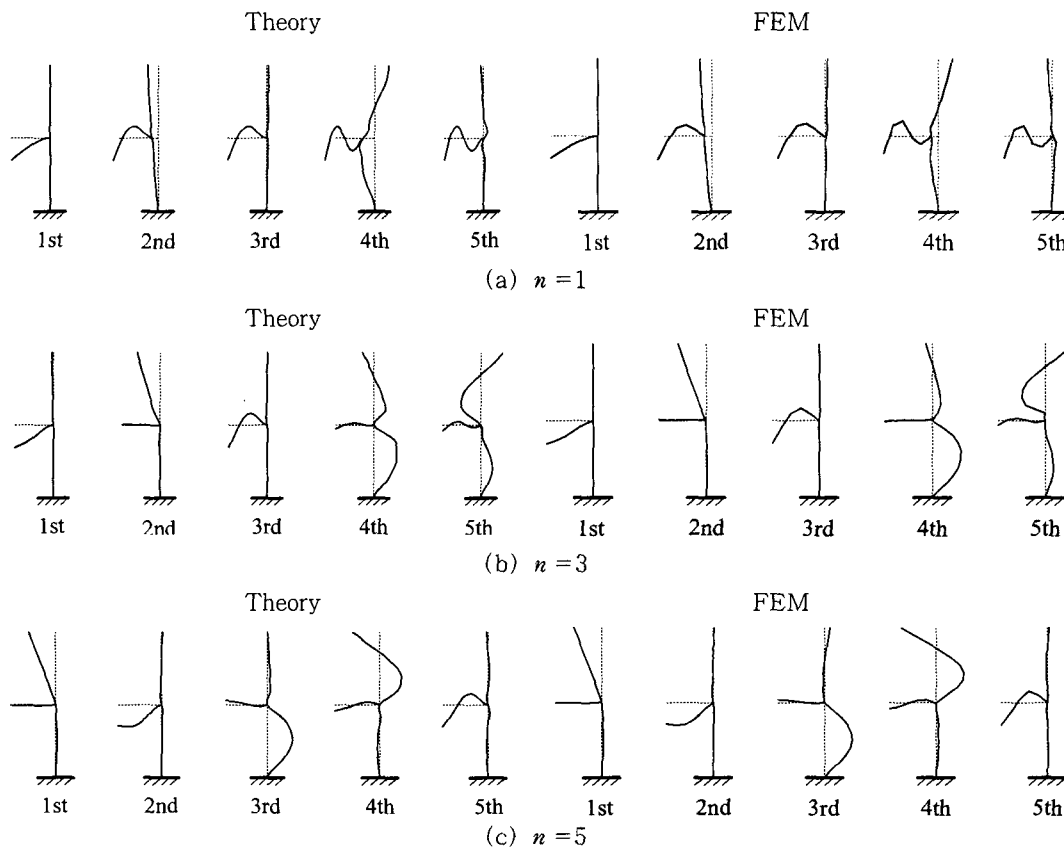


Fig. 3 Comparison of axial vibration mode shapes for some  $n$  modes of combined shells used in Table 2

=1, 2인 경우 판이 결합되는 축방향 위치에 관계없이 거의 같은 진동수를 갖는다. 이와 같은 현상은  $n=1, 2$  모드에서의 1차 진동형상이 판의 변형에 의해서만 이루어지는 1차 판 모드를 형성하기 때문이다. 셀만 고려하였을 때 최저 진동수를 보이는  $n=4$ 에서 판의 결합위치에 따른 영향이 가장 크게 나타난다. 이는 판이 결합됨으로써 판이 셀을 보강하는 보강재 역할을 하여 셀의 강성을 증가시켰기 때문으로 결합위치에 따라 셀의 강성에 미치는 영향이 민감하게 작용하여 진동수 변화가 크게 나타난 것이다. 가장 큰 진동수 증가를 보이는 판의 결합위치는  $x^* = 0.75L$ 에 결합되었을 때이며,  $x^* = 0.25L$ 에 결합되었을 때 영향이 가장 작다. 원주방향 반파수의 증가에 따라 결합셀의 진동수는 최초에 증가를 하다가 감소하는 거동을 한다. 이와 같은 이유는 작은 반파수에서의 진동형상은 판의 변형으로만 형성된 판 모드이기 때문이며, 진동수가 감소하는 지점부터는 셀 모드가 형성되어 진동수가 감소하다 증가하는 거동을 한다. (Fig. 6(a) 참조) 한편 반파수가 커질수록 결합위치에 따른 영향이 작아진다. 2차 진동수의 경우 1차 진동수의 거동과 매우 다른 모습을 보이고 있다.  $n=1$  모드인 경우 결합셀에 대해 판의 결합위치에 관계없이 진동수가 거의 같은 값을 갖는다. 이 모드에서의 진동형상은 셀만 변형되는 셀 모드로써 결합위치에 관계없이 판의 강제운동에 의해 판이 결합되지 않은

셀의 진동형상과 같은 형상을 하기 때문에 판의 결합 위치에 관계없이 같은 진동수를 갖는다. (Fig. 6(b) 참조)  $n=2$  모드에서 결합위치에 따른 영향이 가장 크게 나타나며,  $n=4$  모드에서 결합위치에 따른 영향이 가장 작게 나타나고 있다. 이 모드에서는 진동형상이 주로 판의 변형에 의해 지배를 받기 때문이다.

환원판의 결합위치에 따른 진동형상을 Fig. 5에 제시하였다. Fig. 5(a)는  $n=4$  모드중 1차 모드에 대한 것으로 결합위치가  $0.5L$  보다 작은 경우 셀만 변형되는 셀 모드,  $0.5L$  보다 큰 경우에는 혼합 모드가 나타난다. 이와 같이 판의 결합위치에 따라 셀의 강성이 변화되어 진동형상도 달라진다. 한편  $n=2$  모드중 2차 모드에 대한 진동형상을 제시한 Fig. 5(b)에서처럼 모든 진동형상이 혼합모드로 구성된다. 이상에서와 같이 판의 결합위치에 따른 영향이 반파수에서의 진동형상이 주로 혼합 모드로 나타날 때 가장 크다는 것을 예측할 수 있다.

Fig. 6은 Fig. 4에서 판의 결합위치  $x^* = 0.75L$  인 결합셀에 대해 원주방향 반파수 변화에 따른 진동형상의 변화를 나타낸 것이다. 1차 진동형상의 경우 반파수가 4일때 까지는 판 모드가 나타나고 그 이후에는 셀 모드가 지배적이다. 이와 같이 작은 반파수에서 진동형상이 판 모드로 나타나기 때문에 Fig. 4에서 설명된 것과 같이 반파수 증가에 따라 진동수가 증가를 하며,  $n=4$  이후 진동형상이 셀 모드가 지배

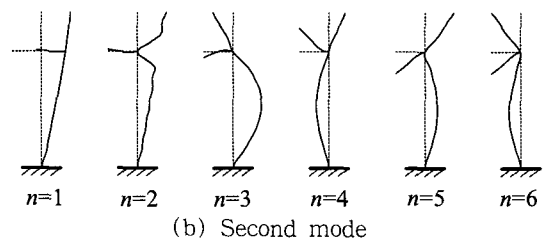
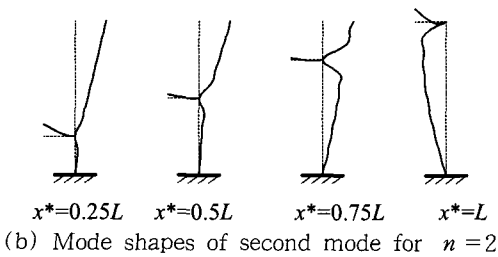
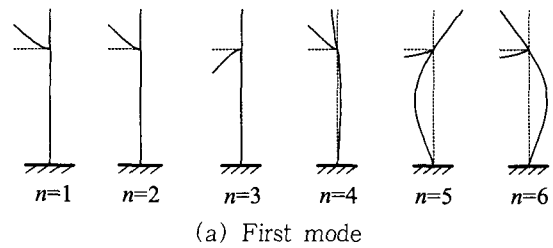
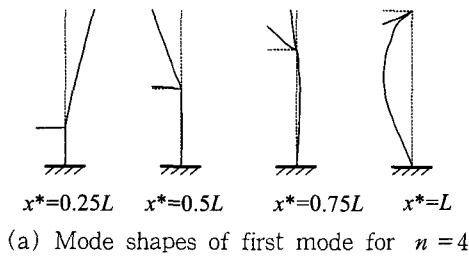


Fig. 5 Effect of axial position of annular plate on axial vibration mode shape

Fig. 6 Variations of axial vibration mode shapes with circumferential wave number  $n$

적이기 때문에 반파수 증가에 대해 진동수가 감소하다 증가하는 거동을 하게 된다. 2차 진동형상의 경우  $n=1$ 에서는 판이 강제운동을 하며 셸만 변형되는 셸 모드로 판이 결합되지 않은 전형적인 셸의 진동형상을 갖는다.  $n=2,3$ 인 경우 셸 모드를 구성하며,  $n=4$ 인 경우에는 혼합 모드를 갖지만 판의 변형이 셸의 변형보다 상대적으로 크게 일어난다.  $n=4$ 인 경우 앞의 설명에서와 같이 진동형상이 주로 판의 변형에 의해 형성되기 때문에 판의 결합위치에 큰 영향을 받지 않는다.  $n=4$  이상이 되면 혼합 모드가 나타난다. 이와 같이 2차 진동형상의 경우 반파수의 변화에 따라 셸 모드, 판 모드, 혼합 모드 순으로 변환되기 때문에 진동수가 증가/감소를 반복하는 것이다.

판의 반지름 비 ( $a/R$ )에 따른 영향이 Fig.7에 제시되었다. 이용된 셸은  $R=0.2\text{m}$ ,  $L=2R$  및  $t_s=t_p=2\text{mm}$ 이며, 판은  $x^*=0.75L$ 에 결합되어 있다. 원주방향 반파수에 따른 1차 진동수변화의 경우 결합셸에 대해 반파수의 증가에 따라 진동수가 증가하다가 어느 반파수 이상부터 감소 후 증가하는 거동을 한다. 이와 같은 이유는 초기 반파수에 따른 1차 진동형상이 판 모드를 갖기 때문에 최초 진동수가 증가하는 영역이 생기며, 셸 모드 또는 혼합 모드가 되면 진동수가 감소하다 다시 증가하는 거동을 한다. 마찬가지로 2차 진동수의 경우에도 최초로 진동수가 증가하다 감소/증가를 반복하게 된다. 이와 같은 현상은 1차 진동수의 거동과 같이 최초 증가 영역에서는 진동형상이 판 모드 또는 전형적인 셸 모드로 나타나다가 첫 번째 감소/증가 구간에서는 셸 변형이 주로 지배를 하는 혼합 모드, 두 번째 감소/증가하는 구간에

서는 셸과 판이 동시에 변형되는 혼합모드에 의해 진동형상이 결정되기 때문이다. 1, 2차 진동수 모두 진동형상이 판 모드 또는 판의 강제 운동을 포함하는 셸 모드에 의해서만 결정되는 작은 반파수에서 반지름 비의 영향이 나타나지만 셸의 변형에 의해 진동형상이 결정되는 큰 반파수에서는 반지름 비의 영향이 없어 진동수가 거의 같게 나타나며 단지 환원판이 존재함으로써 판의 크기에 관계없이 결합셸의 진동수가 증가하는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 판이 입의 위치에 존재함으로써 셸의 강성이 증가하였기 때문이다.

판의 길이 대 반경비에 따른 영향을 검토하기 위해 Fig.8이 제시되었다. 여기서 셸과 판의 두께를 2mm, 셸의 반지름은 0.2m로 고정하고 셸의 길이를 변화시켜 얻은 결과이며, 판의 반지름 비  $a/R=0.7$ 를 갖는 환원판이 축방향 중앙에 위치한다. 1차 진동수의 경우  $L/R$ 가 클수록 초기에는 반파수의 증가와 함께 진동수가 증가하는 구간이 작아지거나 나타나지 않는 것을 알 수 있다. 즉  $L/R=0.5$ 인 경우 진동수가 반파수의 증가와 함께 항상 증가하고,  $L/R=1$ 인 경우에는 반파수가 5일 때까지는 진동수가 증가하다 이를 기점으로 감소하다 다시 증가하는 거동을 한다. 이와 같은 이유는  $L/R$ 가 작은 경우 1차 진동형상은 주로 판의 변형에 의해 지배를 받게 되기 때문에 나타나는 현상으로  $L/R$ 가 1인 경우는 반파수가 5,  $L/R$ 가 2인 경우에는 반파수가 3인 지점을 기준으로 판 변형에서 셸 변형형태로 진동형상이 결정된다.  $L/R$ 가 4 이상인 경우에는 이러한 구간이 존재하지 않는다. 즉,  $L/R$ 가 큰 경우 1차 진동현상은 셸의 변형에 의해

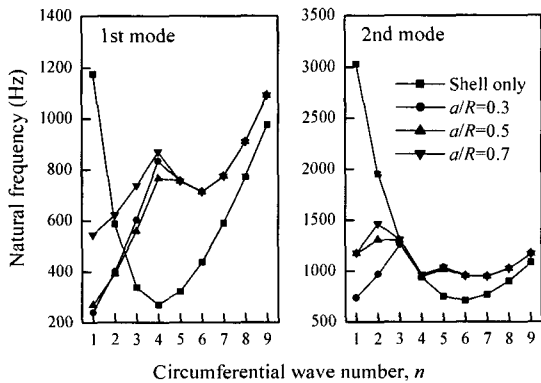


Fig. 7 Effect of annular plate's inner to outer radius ratio on natural frequency

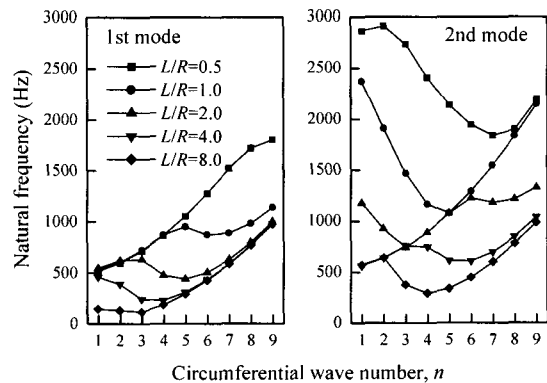


Fig. 8 Effect of shell's length to radius ratio on natural frequency



지배 받는다는 것을 알 수 있다. 2차 진동수의 변화의 경우 1차 진동수의 변화와는 다른 거동을 한다.  $L/R=0.5$ 인 경우 1차에서는 나타나지 않았던 최초 진동수 증가 구간이 초기에 나타나고 있다. 이것은 작은 반파수에서 판의 2차 변형형태가 작은 반파수에서 나타나다가 셀 변형 형태로 전환됨을 의미한다.  $L/R=1$ 인 경우에는 전형적인 셀만의 진동수 변화를 보이고 있는 것처럼 보인다. 그러나 이 경우 반파수가 5이상인 경우에는 실제로는 진동형상에서 판의 2차 변형형태를 갖지만 셀의 2차 변형에 의해 결정되는 진동수보다 작은 값을 갖는다. 만일 더 큰 반파수가 고려된다면 진동수가 감소하다 증가하는 구간, 즉 판 변형형태에서 셀 변형형태로 전환되는 구간이 나타날 것이다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 하나의 환원판이 임의의 위치에 결합된 원통셀에 대한 진동특성을 해석하기 위한 이론적 해법이 제시되었다. 이론 전개과정에서 Love의 셀 이론이 적용되었으며, 에너지법과 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 진동수방정식을 유도하였다. 셀과 판의 연결은 가상 스프링을 이용하여 모사하였다. 수치 예를 통해 가상 스프링의 영향이 진동수에 미치는 영향이 크다는 것을 알았으며, 결합부의 적절한 연결을 위해 충분히 큰 스프링 강성계수가 요구됨을 알았다. 또한 환원판의 위치, 크기 및 셀의 길이 대 반경비가 고유 진동 특성에 미치는 영향이 매우 크다는 것을 확인하였으며, 유한요소해석을 통해 이론해의 타당성을 검증하였다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Yamada, G., Irie, T. and Tamiya, T., 1986, "Free Vibration of a Circular Cylindrical Double-shell System Closed by End Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, pp.297~304.
- (2) Cheng, L. and Nicolas, J., 1992, "Free Vibration Analysis of a Cylindrical Shell-circular System with General Coupling and Various Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, pp.231~247.
- (3) Yuan, J. and Dickinson, S. M., 1994, "The Free Vibration Of Circularly Cylindrical Shell And Plate Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, pp. 241~263.
- (4) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Study of the Forced Vibration of Shell-plate Combinations Using The Receptance Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.166, pp. 341~369.
- (5) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Natural Frequencies and Modes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at Arbitrary Axial Positions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, pp.403~427.
- (6) Huang, D. T., 2001, "Approximate Modal Characteristics of Shell-plate Combined Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 246, pp.942~952.
- (7) 임정식, 손동성, 1998, "다양한 경계조건에서 원판이 결합된 원통셀의 고유 진동해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 8 권, 제 3 호, pp.936~948.
- (8) Cho, J. R., Lee, H. W. and Kim, K. W., 2002, "Free Vibration Analysis of Baffled Liquid-storage Tank by The Structural-acoustic Finite Element Formulation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, pp. 847~866.
- (9) Missaoui, J., Cheng, L. and Richard, M.J., 1996, "Free and Forced Vibration of Cylindrical Shell with a Floor Partition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.190, pp. 21~40.
- (10) Lee, Y. -S. and Choi, M. -H., 2001, "Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells with an Interior Plate Using the Receptance Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 248, pp. 477~497.
- (11) SASI, 2000, "ANSYS User's Manual," Swanson Analysis System Inc., Houston.

부 록

식 (19)에서의 행렬  $[K]$ ,  $[M]$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [K] &= \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{13}]^T & [K_{23}]^T & [K_{33}] \end{bmatrix} \\
 [M] &= \begin{bmatrix} [M_{11}] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{22}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{33}] \end{bmatrix} \\
 [K_{11}]_{m\bar{m}} &= R\Pi_n A_s \left( \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{22}}{\alpha_{\bar{m}}\alpha_m} + \frac{(1-\nu)n^2}{2R^2} \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{11}}{\alpha_{\bar{m}}\alpha_m} \right) \\
 [K_{12}]_{m\bar{m}} &= n\Pi_n A_s \left( \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{02}}{\alpha_{\bar{m}}} - \frac{1-\nu}{2} \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{11}}{\alpha_{\bar{m}}} \right) \\
 [K_{13}]_{m\bar{m}} &= n\Pi_n v A_s \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{02}}{\alpha_{\bar{m}}} \\
 [K_{22}]_{m\bar{m}} &= R\Pi_n \left( n^2 + \frac{1-\nu}{2} \right) \left( A_s + \frac{D_s}{R^2} \right) \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{22}}{R^2} \\
 [K_{23}]_{m\bar{m}} &= Rn\Pi_n \left[ \left( A_s + \frac{n^2 D_s}{R^2} \right) \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{00}}{R^2} \right. \\
 &\quad \left. + D_s \left( \frac{\nu}{R^2} X_{\bar{m}\bar{m}}^{02} + 2X_{\bar{m}\bar{m}}^{11} \right) \right] \\
 [K_{33}]_{m\bar{m}} &= R\Pi_n \left[ \left( A_s + \frac{n^4 D_s}{R^2} \right) \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{00}}{R^2} + D_s X_{\bar{m}\bar{m}}^{22} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2n^2 v D_s}{R^2} (X_{\bar{m}\bar{m}}^{02} + X_{\bar{m}\bar{m}}^{20}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2n^2(1-\nu)D_s}{R^2} X_{\bar{m}\bar{m}}^{11} \right] \\
 [M_{11}]_{m\bar{m}} &= \rho t_s R\Pi_n \frac{X_{\bar{m}\bar{m}}^{11}}{\alpha_{\bar{m}}\alpha_m}
 \end{aligned}$$

$$[M_{22}]_{m\bar{m}} = [M_{33}]_{m\bar{m}} = \rho t_s R\Pi_n X_{\bar{m}\bar{m}}^{00}$$

$$X_{\bar{m}\bar{m}}^{pq} = \int_0^L \frac{d^{(p)}\psi_{\bar{m}}}{dx^{(p)}} \frac{d^{(q)}\psi_m}{dx^{(q)}} dx$$

위의 모든 부분행렬의 크기는  $(M \times M)$ 이다.

식 (23)에서의 행렬  $[K_s]$ 는 다음과 같다.

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{s11}] & [K_{s12}] & [K_{s13}] \\ [K_{s12}]^T & [K_{s22}] & 0 \\ [K_{s13}]^T & 0 & [K_{s33}] \end{bmatrix}$$

$$[K_{s11}]_{m\bar{m}} = \Pi_n R \{ k_R [\psi_m, \psi_{\bar{m}}]_{x=x'} + k_T [\psi_m, \psi_{\bar{m}}]_{x=x} \}$$

$$[K_{s12}]_{m\bar{m}} = -\Pi_n k_R R [\psi_m, \psi_{\bar{m}}]_{x=x'} \cdot [W_{nk}^p]_{r=R}$$

$$[K_{s13}]_m = -\delta_1 \Pi_1 k_T R [\psi_m]_{x=x'}$$

$$[K_{s22}]_{\bar{k}\bar{k}} = \Pi_n R k_R [W_{nk}^p, dW_{nk}^p]_{r=R}$$

$$[K_{s33}] = \Pi_1 k_T R$$

여기서  $[K_{s11}]$ 는  $(M \times M)$ ,  $[K_{s13}]$ 는  $(M \times 1)$ ,  $[K_{s12}]$ 는  $(M \times K)$ ,  $[K_{s22}]$ 는  $(K \times K)$ 의 크기를 갖는다.

식 (25)에서의 행렬  $[K_t]$ ,  $[M_t]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [K_t] &= \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & 0 \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] & [K_{23}] & 0 \\ [K_{13}]^T & [K_{23}]^T & [K_{33}] + [K_{s11}] & [K_{s12}] \\ 0 & 0 & -[K_{s13}][K_{s33}]^{-1}[K_{s31}]^T & [K_p] \\ & & & + [K_{s22}] \end{bmatrix} \\
 [M_t] &= \begin{bmatrix} [M_{11}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M_{22}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_{33}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_p] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$