

축방향 왕복 운동을 하는 집중 질량을 가진 외팔보의 비선형 동적 모델링 및 안정성 해석

Nonlinear Dynamic Modeling and Stability Analysis of an Axially Oscillating Cantilever Beam with a Concentrated Mass

홍정환* · 유홍희†

Jung-Hwan Hong and Hong-Hee Yoo

(2003년 7월 1일 접수 : 2003년 10월 17일 심사완료)

Key Words : Axially Oscillating Motion(축 방향 왕복운동), Frequency Response Characteristics(주파수 응답특성), Cantilever Beam(외팔보), Nonlinear Modeling(비선형 모델링), Concentrated Mass(집중질량)

ABSTRACT

A nonlinear modeling method for an axially oscillating cantilever beam with a concentrated mass is presented in this paper. Hybrid deformation variables are employed for the modeling method with which frequency response characteristics of axially oscillating cantilever beams are investigated. The geometric nonlinear effects of stretching and curvature are considered to accurately predict the frequency response characteristics of the oscillating cantilever beam. The effects of the size and the location of the concentrated mass on the frequency characteristics are investigated. It is found that the dynamic instability is significantly influenced by the two parameters.

1. 서론

외팔보가 그 축방향으로 왕복운동을 하는 경우 강제운동에 의한 강성변화가 발생한다. 외팔보가 고정단에서 자유단쪽으로 가속되면 시스템 굽힘 강성이 감소하고 반대 방향으로 가속되면 강성이 증가하므로 결과적으로 굽힘강성의 연속적 변화가 발생하게 된다. 이러한 시스템은 강제운동 주기가 특정한 주파수 값을 갖게 되면 비록 작은 크기의 초기 변위라도 시간이 지날수록 그 크기가 매우 크게 증가한다. 불안정성을 야기하는 강제운동의 이러한 주파수는 고정된 외팔보의 고유진동수와 일치하지 않으며 이 때 발생

하는 불안정성을 매개변수공진(parametric resonance)이라 하며 이는 외력의 가진 주파수가 고유진동수와 일치할 때에 발생하는 일반적인 공진 현상과는 구별된다.

강체운동을 하는 구조물의 동적 반응에 관한 연구는 회전운동을 대상으로 주로 많이 이루어져 왔다. 가장 널리 알려진 예제는 외팔보가 그 축의 수직방향으로 회전운동을 하는 경우로 그 회전에 의한 원심력 발생으로 시스템 강성이 증가하므로 그 결과로서 고유진동수들이 증가한다. 이 분야의 연구들과 관련된 내용들은 참고문헌(1~2)에 잘 정리되어 있다. 참고문헌(3~5)에서는 구조물이 병진운동을 포함한 일반 강체운동을 하는 경우의 동적 모델링을 제시했으나 수치예제는 회전운동을 하는 외팔보로 국한하였다. 참고문헌(6)에는 참고문헌(4)에 제시된 동적 모델링을 이용해 축방향 왕복운동을 할 때도 강성이 변화하

† 책임저자, 정희원, 한양대학교 공과대학 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

Tel : (02)2290-0446, Fax : (02)2293-5070

* 정희원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

는 것을 보이고 안정성해석을 수행하였다. 이 연구에서 사용된 모델링은 선형 모델로서 가진 주파수와 왕복 운동 진폭 변화에 따른 안정 및 불안정 영역을 구하고 그 천이곡선을 해석적으로 유도하였다. 참고문헌 (7)의 연구는 동일한 보 예제에 대해서 복합변형변수를 이용한 비선형 모델링을 유도하고 주파수 응답특성을 구하여 선형 모델과의 동특성 차이를 규명하였다. 비선형 시스템의 경우 선형시스템과 달리 불안정영역에서라 하여도 동적 반응이 발산하지 않고 일정한 크기를 갖게 된다. 그러나 그 크기가 일반적으로 상당한 크기를 가지므로 실제 설계 시 피해야 하는 주파수범위가 된다. 본 논문에서는 따라서 유한하지만 0이 아닌 일정크기가 발생하는 이 주파수 범위를 비선형 동적 시스템의 불안정 영역이라 정의하고 이를 조사하였다.

본 논문에서는 참고문헌 (7)에 제시된 모델링을 발전시켜 집중 질량 효과가 동적 안정성에 미치는 영향을 고찰하고자 한다. 이를 위해, 먼저 축방향 왕복 운동을 하는 집중질량을 가진 외팔보의 복합변형변수를 이용한 동적 모델링을 유도하고 이에 근거하여 집중 질량의 부착위치 및 크기의 변화가 외팔보의 안정성에 미치는 영향을 규명하였다.

2. 운동방정식

본 절에서는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하려 한다. 본 연구에서는 이론 전개 및 설명의 편의상 2차원 평면 운동을 하는 보를 대상으로 선정하였다. Fig. 1은 강체 A에 고정된 외팔보의 모습을 보여준다. P_0 는 외팔보상 임의 질점의 변형 전 위치를 나타내며 P 는 변형 후 위치를 나타낸다. \bar{a}_1 과 \bar{a}_2 는 강체 A에 부착된 서로 수직인 단위 벡터들을 나타내며, x 는 고정점 O로부터 변형 전 임의의 한점 P_0 까지의 거리를 \bar{u} 는 탄성변위를 s 는 임의점의 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 강체운동을 하는 외팔보의 상미분 운동방정식을 유도하기 위해 s 와 u_2 를 다음과 같이 근사화 한다.

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \tag{1}$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \tag{2}$$

여기서 $\phi_{1i}(x)$ 와 $\phi_{2i}(x)$ 는 보의 인장과 굽힘방향 모드 함수들을 나타내며 $q_{1i}(t)$ 와 $q_{2i}(t)$ 는 시간의 함수인 일반 좌표들이고 μ_1 과 μ_2 는 일반 좌표의 수이다. 변형이 일어날 때 보의 임의의 한 점 P 점의 속도 \bar{v}^P 는 아래 관계를 이용하여 구한다.

$$\bar{v}^P = \bar{v}^O + \bar{v}^{P/A} \tag{3}$$

여기서 \bar{v}^O 는 축 방향 운동을 하는 강체 A상의(외팔보의 고정단) O 점의 속도이며, $\bar{v}^{P/A}$ 는 강체 A에서 관찰한 P점의 속도를 나타내는데 이들은 다음과 같이 \bar{a}_1 및 \bar{a}_2 방향 성분으로서 나타낼 수 있다.

$$\bar{v}^O = v_1 \bar{a}_1 + v_2 \bar{a}_2 \tag{4}$$

$$\bar{v}^{P/A} = \dot{u}_1 \bar{a}_1 + \dot{u}_2 \bar{a}_2 \tag{5}$$

따라서

$$\bar{v}^P = (v_1 + \dot{u}_1) \bar{a}_1 + (v_2 + \dot{u}_2) \bar{a}_2 \tag{6}$$

여기서 P점의 가속도 \bar{a}^P 는 \bar{v}^P 를 시간으로 미분하여 구할 수 있다. 그런데 식 (6)에 나타난 u_1 은 근사화되지 않으므로 s 와 u_2 로 표시되어야 한다. 이를 위하여 필요한 s 와 u_1 그리고 u_2 의 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$x + s = \int_0^x \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{1/2} d\zeta \tag{7}$$

Taylor 급수전개를 이용해 식 (7)을 2차항까지 전개하여 정리하면

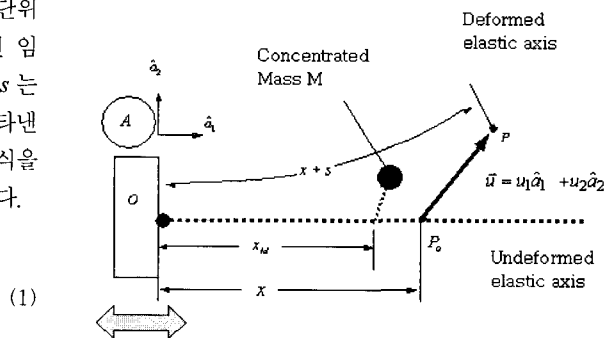


Fig. 1 Configuration of an axially oscillating cantilever beam

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta \quad (8)$$

식 (8)을 미분하여 정리하면

$$\dot{u}_1 = \dot{s} - \int_0^x \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \zeta} d\zeta \quad (9)$$

위 식 (8)은 \dot{u}_1 이 \dot{s} 와 \dot{u}_2 에 의해 구해질 수 있음을 보여준다. 식 (9)를 이용하여서 편속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \dot{q}_{1i}} = \phi_{1i} \bar{a}_1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \dot{q}_{2i}} = - \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^x (\phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta}) d\zeta q_{2j} \bar{a}_1 + \phi_{2i} \bar{a}_2 \quad (11)$$

운동방정식은 이상에서 구한 식들을 이용해 다음 형태로 구할 수 있다.

$$f_r^* + f_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, \mu_1 + \mu_2) \quad (12)$$

이 운동방정식에서 일반 관성력은 세장보의 경우 다음 식에 의해 구해질 수 있다.

$$f_r^* = - \int_0^L \{ \rho + M \delta(x - x_M) \} \bar{a}^p \cdot \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \dot{q}_r} dx \quad (13)$$

($r=1, 2, \dots, \mu_1 + \mu_2$)

여기서 L 과 ρ 은 각각 보의 길이와 단위길이당 질량을 나타내며, M 과 x_M 은 각각 집중질량의 크기와 부착위치를 나타낸다. 또한 \bar{a}^p 는 P 점의 가속도를 나타낸다.

외력이 작용하지 않는 경우에 운동방정식의 일반 작용력은 탄성에너지에 의해서만 결정되는데 보의 인장과 굽힘 효과만을 고려한 탄성에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E_0 A_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E_0 I_{zz} (k_3)^2 dx \quad (14)$$

여기서 E_0 는 영률, A_0 는 단면적을 각각 나타내고 I_{zz} 는 2차 면적 모멘트를 k_3 는 \bar{a}_3 방향 곡률을 나타

낸다. k_3 를 3제곱 비선형 항까지 고려하여 나타내면 (곡률의 비선형성은 참고문헌 (9) 참조) 다음과 같다.

$$k_3 = u_{2,xx} \left(1 - 2s_{,x} + \frac{1}{2} u_{2,x}^2 \right) - s_{,xx} u_{2,x} \quad (15)$$

식 (15)와 함께 식 (14)를 이용하여 일반작용력을 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$f_r = - \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \dots, \mu_1 + \mu_2) \quad (16)$$

이상의 결과들을 종합하면 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} [\hat{m}_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + A_{ij}^{11} q_{1j}] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \hat{X}_{ijk}^{122} [\dot{q}_{2j} \dot{q}_{2k} + q_{2j} \ddot{q}_{2k}] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} [B1_{ijk}^{122} + 2B2_{ijk}^{122}] q_{2j} q_{2k} \\ & = -\dot{v}_1 \hat{R}_{1i} \quad (i=1, 2, \dots, \mu_1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} [\hat{m}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + A_{ij}^{22} q_{2j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} -\dot{v}_1 \hat{X}_{ij}^{22} q_{2j} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_1} \hat{X}_{ijk}^{221} q_{2j} \ddot{q}_{1k} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} [B1_{ijk}^{221} + B2_{ijk}^{221} + 4B3_{ijk}^{221}] q_{2j} q_{1k} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} [B4_{ijkl}^{2222} + B5_{ijkl}^{2222}] q_{2j} q_{2k} q_{2l} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \hat{X}_{ijkl}^{2222} [q_{2j} q_{2k} \dot{q}_{2l} + q_{2j} \dot{q}_{2k} q_{2l}] \\ & = -\dot{v}_2 \hat{R}_{2i} \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서,

$$R_{\alpha i} = \int_0^L m \phi_{\alpha i} dx \quad (19)$$

$$\hat{R}_{\alpha i} = R_{\alpha i} + M \phi_{\alpha i}(x_M) \quad (20)$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_0^L m \phi_{\alpha i} \phi_{\beta j} dx \quad (21)$$

$$\hat{m}_{ij}^{\alpha\beta} = m_{ij}^{\alpha\beta} + M \phi_{\alpha i}(x_M) \phi_{\beta j}(x_M) \quad (22)$$

$$A_y^{11} = \int_0^L E_0 A_0 \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (23)$$

$$A_y^{22} = \int_0^L E_0 I_{zz} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (24)$$

$$X_{ij}^{22} = \int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta dx \quad (25)$$

$$\hat{X}_{ij}^{22} = X_{ij}^{22} + M \int_0^{x_M} \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \quad (26)$$

$$X_{ijk}^{122} = \int_0^L m \phi_{1i} \int_0^x \phi_{2j,\zeta} \phi_{2k,\zeta} d\zeta dx \quad (27)$$

$$\hat{X}_{ijk}^{122} = X_{ijk}^{122} + M \phi_{1i}(x_M) \int_0^{x_M} \phi_{2j,\zeta} \phi_{2k,\zeta} d\zeta \quad (28)$$

$$X_{ijk}^{221} = \int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \phi_{1k} dx \quad (29)$$

$$\hat{X}_{ijk}^{221} = X_{ijk}^{221} + M \int_0^{x_M} \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \phi_{1k}(x_M) \quad (30)$$

$$X_{ijkl}^{2222} = \int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \int_0^x \phi_{2k,\zeta} \phi_{2l,\zeta} d\zeta dx \quad (31)$$

$$\hat{X}_{ijkl}^{2222} = X_{ijkl}^{2222} + M \int_0^{x_M} \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \int_0^{x_M} \phi_{2k,\zeta} \phi_{2l,\zeta} d\zeta \quad (32)$$

$$B1_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{\alpha i,xx} \phi_{\beta j,x} \phi_{\gamma k,xx} dx \quad (33)$$

$$B2_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{\alpha i,x} \phi_{\beta j,xx} \phi_{\gamma k,xx} dx \quad (34)$$

$$B3_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{\alpha i,xx} \phi_{\beta j,xx} \phi_{\gamma k,x} dx \quad (35)$$

$$B4_{ijk}^{2222} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,x} \phi_{2j,xx} \phi_{2k,xx} \phi_{2l,xx} dx \quad (36)$$

$$B5_{ijk}^{2222} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} \phi_{2k,x} \phi_{2l,x} dx \quad (37)$$

3. 수치해석

본 절에서는 앞서 유도된 운동방정식을 이용하여 축 방향 왕복 운동을 하는 외팔보의 주파수 응답특성 해석을 수행하였다. 축 방향 왕복운동 v_1 은 다음 함수로 이상화하여 부여하였다.

$$v_1 = v(1 - \cos \omega t) \quad (38)$$

따라서

$$\dot{v}_1 = v\omega \sin \omega t \quad (39)$$

식 (38)와 식 (39)에서 ω 는 보의 축방향 왕복 운

동 주파수를 나타낸다. 또한 방정식에 나타나는 집중 질량의 크기와 위치를 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 사용한다.

$$\alpha = \frac{M}{\rho L}, \quad \beta = \frac{x_M}{L} \quad (40)$$

수치해석에 사용된 데이터들은 Table 1과 같다. Fig. 2 는 축 방향 왕복 운동을 하는 외팔보에서 α 를 고정시키고, β 의 변화에 따른 동적 반응 진폭의 크기를(외팔보 자유단의 굽힘진동 진폭) 도시한 것이다. 집중질량이 없을 때는 왕복 주파수가 외팔보의 첫 번째 굽힘방향 고유진동수의 2배 근처에서 큰 주파수 응답을 보여주며 (이는 앞서 언급한 매개변수 공진현상 때문이다) 집중질량이 존재하고 β 가 커짐에 따라 응답 발생 주파수 영역이 저주파영역으로 이동하는 것을 관찰 할 수 있다.

Fig. 3은 β 를 고정시키고, α 를 변화시킴에 따른 동적 반응 진폭의 크기를 도시한 것이다. 이 결과에서도 α 가 커짐에 따라 주파수 영역이 저주파영역으로 이동하는 것을 알 수 있으며 Fig. 2 와 비교해보면 β 의 변화량이 α 의 변화량보다 주파수 응답곡선의 크기와 발생영역에 더 영향을 미침을 알 수 있다. $\beta = 0.3$ 인 경우를 살펴보면 질량 크기가 커져도 응답 곡선의 저주파로의 이동폭이 작으며 그 진폭의 크기 변화 또한 미미함을 알 수 있다.

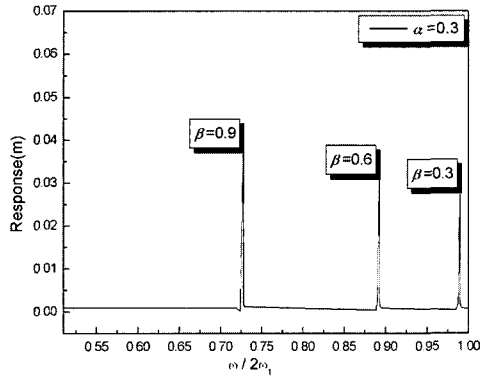
Fig. 4는 집중질량이 없을 경우의 안정성 해석결과를 보여준다. 이 결과는 Fig. 2와 Fig. 3보다 수평축의 스케일이 훨씬 작은 범위를 나타내므로 응답 곡선의 형상을 잘 보여주고 있으며, 참고문헌 (6)에서 제시한 선형 모델 안정성 해석과는 다른 결과를 보여준다. 즉, 선형 모델의 경우 불안정 영역에서는 동적반응이 발산하는 경향을 보여주나 본 논문의 비선형모

Table 1 Numerical data used for the simulation

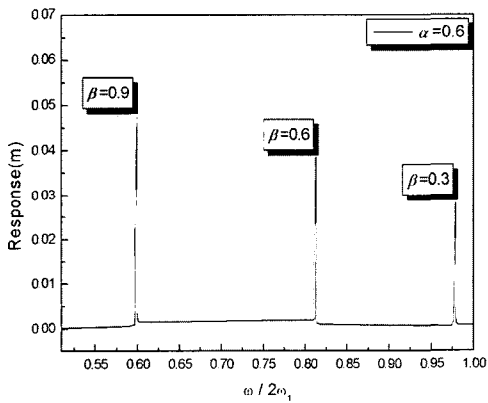
Notations	Description	Numerical data
ρ	Mass per unit length	0.0135 kg/m
E	Young's modulus	193.0E9 Pa
A	Cross section area	1.767E-5 m ²
I	Second area moment of inertia	2.485E-13 m ⁴
L	Length	0.05 m

델링은 수렴되는 결과를 보여주고 있다. 또한 Fig. 4에서 표기한 bandwidth는 동적 불안정성이 발생하는 주파수 영역의 크기로 정의되는 것을 잘 보여주고 있다.

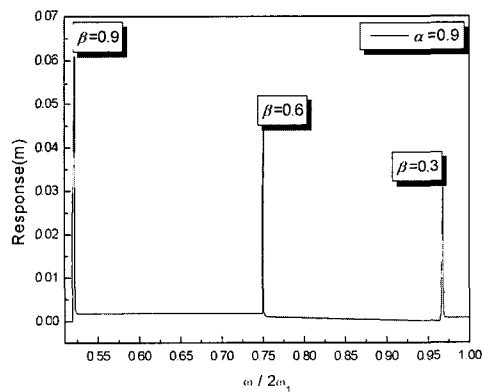
Fig. 5와 Fig. 6은 α 와 β 변화에 따른 주파수 응답 곡선의 최대값의 크기와 그 발생하는 주파수 위치를 등고선으로 보여준다. 여기서 보면, β 가 작은 영역에서는 최대값이나 발생주파수의 변화가 α 의 변화에



(a) Frequency response at $\alpha = 0.3$

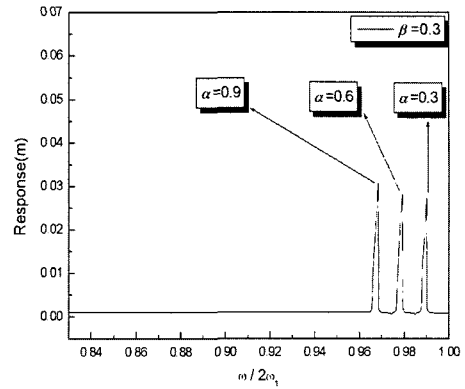


(b) Frequency response at $\alpha = 0.6$

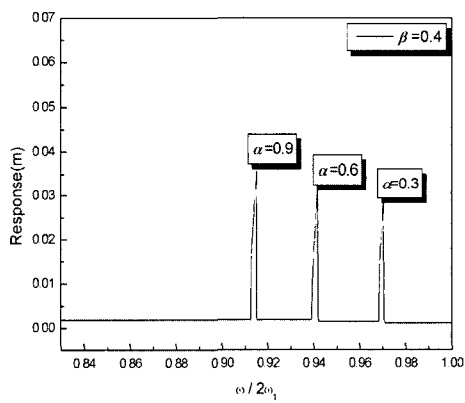


(c) Frequency response at $\alpha = 0.9$

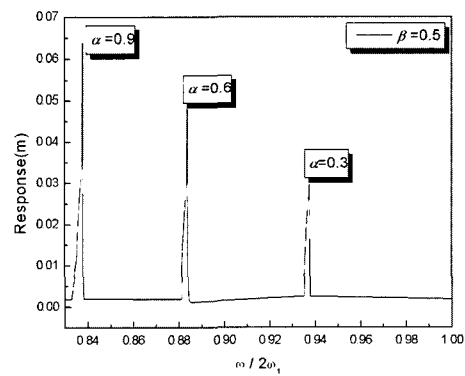
Fig. 2 Frequency response curves of varying β with fixed α



(a) Frequency response at $\beta = 0.3$



(b) Frequency response at $\beta = 0.4$



(c) Frequency response at $\beta = 0.5$

Fig. 3 Frequency response curves of varying α with fixed β

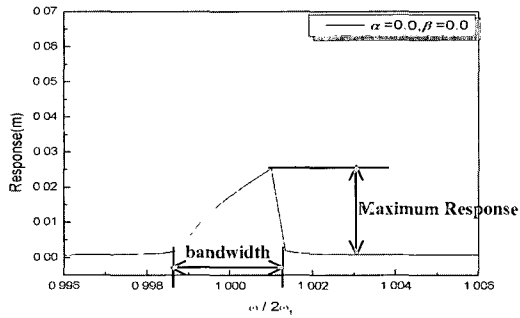


Fig. 4 Frequency response curves with $\alpha = \beta = 0$

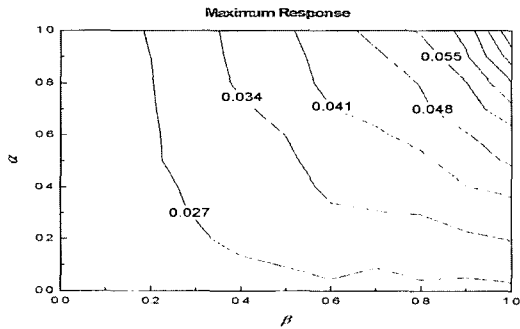


Fig. 5 Maximum response versus α, β

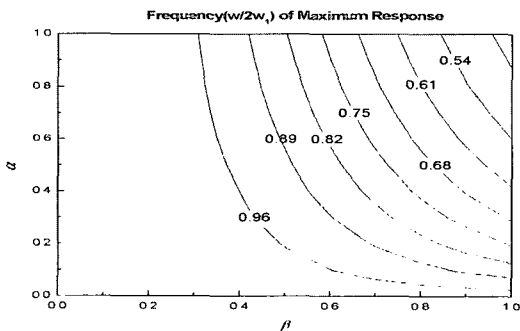


Fig. 6 Frequency of maximum response versus α, β

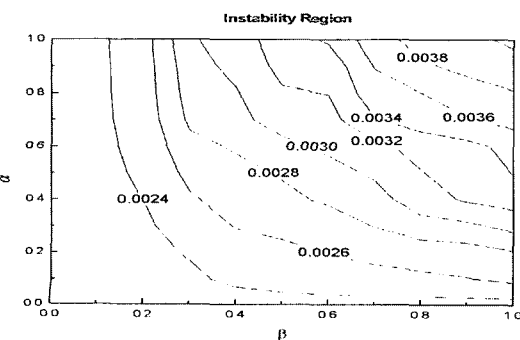


Fig. 7 Frequency response bandwidth versus α, β

별 영향을 받지 않으나 β 가 커짐에 따라서 그 영향이 급격히 증가함을 알 수 있다.

Fig. 7은 α 와 β 변화에 따른 주파수 응답특성 곡선 영역의 두께를 보여준다. 이는 불안정성의 영역의 범위를 나타내는데 앞 그림의 결과와 유사하게 β 가 작은 영역에서는 α 의 변화에 영향을 별로 받지 않으나 β 가 커짐에 따라서 그 영향이 크게 증가함을 관찰할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 축 방향 왕복운동을 하는 집중질량을 가진 외팔보의 인장 및 압축 방향 비선형성을 고려한 동적 모델링을 복합 변형 변수들을 이용해 유도하고, 이에 근거하여 주파수 응답특성 해석을 수행하였다. 특별히 집중질량의 부착위치 및 크기 변화에 따른 동적 안정성의 특성변화를 고찰하였다. 주파수 응답곡선 불안정 영역이 발생하는 위치, 영역 두께 및 최대 크기는 무차원화된 집중질량 위치 β 가 작은 값의 범위에서는 집중질량 크기 α 의 변화에 따른 영향이 작았으나 β 값의 증가에 따라 α 의 영향에 민감해짐을 알 수 있었다. 이러한 특성에 대한 연구는 집중질량을 갖는 왕복운동을 하는 외팔보 설계시 매우 유용한 정보를 제공할 수 있을 것으로 사료된다.

후기

본 연구는 한국과학기술재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고 문헌

- (1) Leissa, A., 1981, "Vibration Aspects of Rotating Turbomachinery Blades," Applied Mechanics Reviews, Vol. 34, pp. 629~635.
- (2) Rao, J., 1987, "Turbomachine Blade Vibration," Shock and Vibration Digest, Vol. 19, pp. 3~10.
- (3) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, pp. 139~151.

(4) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.

(5) Yoo, H. and Chung, J., 2001, "Dynamics of Rectangular Plates Undergoing Prescribed Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 239, No. 1, pp. 123~137.

(6) Hyun, S. and Yoo, H., 1999, "Dynamic Modelling and Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 3, pp. 543~558.

(7) 김나은, 현상학, 유홍희, 2003, "축 방향 왕복

운동을 하는 외팔보의 복합변형변수를 이용한 비선형 모델링 및 주파수 응답특성, 한국소음진동공학회 논문집, 제 13 권, 제 3 호, pp. 210~216.

(8) Crespo da Silva, M. R. M. and Glynn, C. C., 1978, "Nonlinear Flexural-flexural-torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 6, pp. 437~448.

(9) Kim, J., Hyun, S. and Yoo, H., "Nonlinear Modeling and Dynamic Analysis of Flexible Structures Undergoing Overall Motions Employing Mode Approximation Method, *KSME International J.*, Vol. 16, No. 7, pp. 896~901.