

공진 주파수 영역에서 탄성지지단의 마찰감쇠효과를 고려한 회전 블레이드의 과도응답해석

Transient Response Analysis of Rotating Blade Considering Friction Damping Effect of Elastically Restrained Root in Resonant Frequency Range

윤 경 재*
Yun, Kyung-Jae

ABSTRACT

This paper presents the transient response analysis of a rotating blade in resonant frequency range. It is shown that the modeling is considered in elastic foundation and friction damping effect. The equations of motion are derived and transformed into a dimensionless form to investigate general phenomena. Numerical results show that the magnitude of friction damping to reduce maximum transient response in near the critical angular speed. The method can be applied to a number of examples of the practical rotating blade system to minimize transient response in resonant frequency range.

주요기술용어 : Rotating Cantilever Beam(회전 외팔 보), Transient Response(과도 응답), Resonant Frequency(공진 주파수), Hub Radius Ratio(축 반경비), Elastic Foundation Effect(탄성지지효과), Friction Damping Effect(마찰감쇠효과)

1. 머리말

회전의 구조물은 헬리콥터 블레이드, 인공위성 안테나 및 태양열 전지판, 발전용 터빈 블레이드 등과 같이 산업현장이나 항공우주 분야, 방위 산업 등 광범위하게 이용되어 지고 있으며 첨단기술의 발달로 인해

서 시스템이 정밀화, 경량화, 고속화되어 가고 이에 따른 구조물들의 진동 및 동 특성에 관한 연구가 활발하게 연구되어지고 있다. 회전의 구조물은 이론적 해석을 위해서 대부분 회전하는 외팔 보로 모델링하여 수행되어 지는데 이러한 회전 구조물들은 회전운동으로 인해서 시스템의 특성이 많이 달라지게 되며 특히 진동 및 동적 특성에 현격한 변화를 초래하며 따라서 이러한 특성들을 분석하고 조사하여 설계 및

* 국방과학연구소 연구원

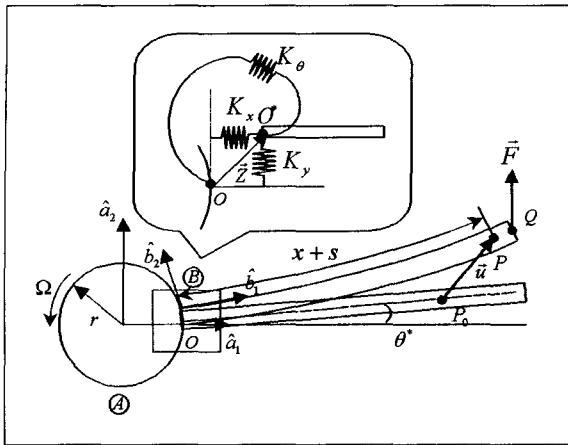
제작 시 반드시 고려해야 한다. 회전 외팔 보의 진동에 관한 연구는 앞서 언급한 필요성 때문에 오래 전부터 많은 공학자들에 의해서 연구되어져 왔는데 그 근간을 이루는 *Southwell* 과 *Ghough*^[1]는 회전에 따른 고유진동수를 계산할 수 있는 해석적 모델을 최초로 제시하였다. 그 이후 컴퓨터의 급속한 발전에 힘입어 운동방정식을 고유치 문제로 변화시켜서 고유진동수를 수치적으로 구하려는 많은 방법들이 제시되었다. 예를 들면 *Putter*와 *Manor*^[2]등은 수치적인 근사화 방법을 이용하여 회전 구조물의 진동특성을 연구하였다. 그러나 대부분의 경우 회전 외팔 보의 지지부를 고정단으로 모델링하여 연구되어져 왔다. 연구가 계속 진행하면서 실제 회전구조물을 정확하게 모델링하여 그 특성을 알아내기 위해서는 지지부의 탄성효과를 고려해야 할 필요성을 느끼게 되었다. 그에 관한 연구는 1957년 *Boyce*^[3]가 최초로 탄성 지지된 bar의 진동에 관한 해석적 방법을 제시하였으며, 1986년 *Afolabi, D*^[4]가 Root부분의 복원력을 고려한 블레이드의 고유진동수에 관한 연구를 하였다. 1994년에는 *S. Y. Lee*^[5]등이 탄성 지지단을 갖는 티모센코 보의 굽힘 진동해석을 수행하였다. 그러나 실제 회전구조물의 좀더 정확한 모델링을 위해서는 회전 외팔 보의 회전운동 시 탄성 지지단에 발생되어지는 마찰력으로 인한 마찰감쇠(Friction Damping)효과를 고려해야 한다. 사실상 이를 고려한 연구는 매우 미미한 상태였으며 80년대에 들어서 *Griffin*과 *Sinha*에 의해서 점차 연구가 진행되기 시작하였다. *Griffin*과 *Sinha*^[6,7]는 1983년 가스터빈 블레이드에서 플러터의 마찰감쇠에 관한 연구와 1984년 마찰감쇠 터빈 블레이드의 특성에 관한 연구를 하였으며 1993년 *Wang*과 *Chen*^[8]은 마찰 감쇠기를 갖는 블레이드의 진동연구

를 수행하였다. 또한 지금까지의 이러한 모든 회전 구조물의 연구들은 진동특성의 조사에 역점을 두었으며 과도 동 특성에 관한 연구는 그에 비해 상당히 미미하게 연구되어지는 것이 현 실정이다. 또한 실제로 회전 외팔 보의 연구에 있어서 중요한 부분중의 하나가 임계 각속도에 관한 내용이다. 임계 각속도라 함은 회전 운동 시 고유진동수가 증가하고 이때 회전주파수와 일치하는 각속도를 일컫는데 회전 블레이드가 임계 각속도로 회전을 하면 공진 현상을 발생시킨다. 이러한 특성 때문에 임계 각속도 주변에서의 외팔 보의 동 특성은 설계 시 중요하게 고려해야 하는 사항이며 또한 공진 현상을 피하거나 줄여야 하는 대책연구가 많이 부족한 상태이고 이를 위한 노력이 절실히 요구되어 지고 있다.

본 연구에서는 회전운동을 하는 구조물의 탄성 지지부의 마찰감쇠효과를 모두 고려한 회전 외팔 보의 모델링을 제시하였으며 그를 통해 얻어진 수치적 결과를 통해서 물리적인 의미를 도출하였다. 또한 회전 외팔 보의 과도해석을 위한 동적 모델링을 제시하여 공진 주파수영역에서의 동 특성을 파악하고 마찰감쇠 계수를 통해서 회전운동 시 발생하는 과도 상태에서 공진 주파수 영역에서의 최대 동적 변위를 줄일 수 있는 방법들을 제시하였다.

2. 운동방정식 유도

운동방정식을 유도하기에 앞서 본 논문에서는 다음의 과정들을 사용하였다. 첫째, 보는 균질하고 등방성이며 단면은 대칭으로 일정하다. 둘째, 전단효과와 단면관성효과(Rotary Inertia Effect)는 고려하지 않는다. 셋째, 보는 회전 평면내의 변형만 일어난다고 가



[그림 1] 외부 가진력을 받는 탄성지지된 회전 외팔 보

정한다. 즉 면내 굽힘 운동만을 다룬다. 운동방정식을 유도하기 위해서 회전 외팔 보를 그림 1과 같이 모델링한다. 그림 1은 외팔 보가 반지름이 r 인 허브에 부착되어 각속도 Ω 로 회전하고 있는 형상을 보여주고 있다. 여기서 강체 A는 절대 좌표계로 나타내며 \hat{a}_1, \hat{a}_2 는 서로 수직인 단위 벡터들이다. 또한 강체 B의 좌표계는 강체 A에 대한 상대 좌표계로 나타내었고 \hat{b}_1, \hat{b}_2 는 B 좌표계의 서로 수직인 단위 벡터들이다. 지지단은 탄성효과를 고려하기 위해서 K_x, K_y, K_θ 의 강성을 갖는 스프링으로 모델링 하였다. O 는 축 A에 고정된 점을 나타내고 O^* 는 보의 좌측 단면 상의 점을 나타낸다. 그리고 O 와 O^* 는 회전이 없는 경우는 탄성변형이 없으므로 서로 일치한다. 외팔 보의 탄성변형 전 임의의 질점 P_o 는 탄성변형 후 점 P 의 위치로 이동하게 되고 \vec{u} 는 그들간의 거리이며 x 는 O^* 에서 P 까지의 거리이며 s 는 인장변위를 나타낸다. 지지부의 각 방향 탄성변형량을 x^*, y^*, θ^* 라 할 때 기준틀 B의 각속도와 O^* 의 속도 그리고

그들 값을 통한 점 P 의 속도와 가속도는 다음과 같은 식들로 표현되어 질 수 있다.

$$\vec{\omega}^B = (\Omega + \dot{\theta}^*) \hat{a}_1 \quad (1)$$

$$\vec{v}^{o^*} = (\dot{x}^* - \Omega y^*) \hat{a}_1 + \{\dot{y}^* + \Omega(r + x^*)\} \hat{a}_2 \quad (2)$$

$$\vec{v}^P = \vec{v}^{o^*} + \frac{B}{dt}(\vec{u}) + \vec{\omega}^B \times (x \vec{b}_1 + \vec{u}) \quad (3)$$

$$\vec{a}^P = \frac{B}{dt}(\vec{v}^P) + \vec{\omega}^B \times \vec{v}^P \quad (4)$$

보의 운동방정식을 유도하기 위해 모드 방법을 사용하여 s 와 u_2 를 다음과 같이 근사화 시킨다.

$$s = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (5)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \quad (6)$$

여기서 ϕ_{1j}, ϕ_{2j} 는 s 와 u_2 를 표현하기 위한 가상 모드 함수들이고 q_{1j}, q_{2j} 는 시간의 함수인 일반 좌표들이며 μ_1, μ_2 는 일반좌표의 총 개수이다. s 와 u_2 를 근사화하기 때문에 u_1 과 \dot{u}_1 은 $s, \dot{s}, u_2, \dot{u}_2$ 으로 표현되어야 한다. 그와 관련된 식은 참고문헌^[14]에 제안된 기하학적 제한조건을 통하여 다음과 같이 나타내어 질 수 있다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{du_2}{d\sigma} \right)^2 d\sigma \quad (7)$$

외력으로 마찰력과 노즐 분사력이 작용하는 경우 케인의 방법에 따른 운동방정식은 다음과 같다.

$$\int_0^L \rho \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_i} \right) \cdot \frac{d\vec{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \vec{F}_{f_1} \cdot \vec{v}^{o_1} + \vec{F}_{f_2} \cdot \vec{v}^{o_2} + \vec{F}_N \cdot \vec{v}^Q \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (8)$$

여기서 L 과 ρ 는 단위길이와 단위길이 당 질량을 각각 의미하며 q_i 는 일반좌표인 q_{1i} 와 q_{2i} 그리고 x^* , y^* , θ^* 로 이루어지며 μ 는 일반좌표의 총 개수로 $\mu_1 + \mu_2 + 3$ 이다.

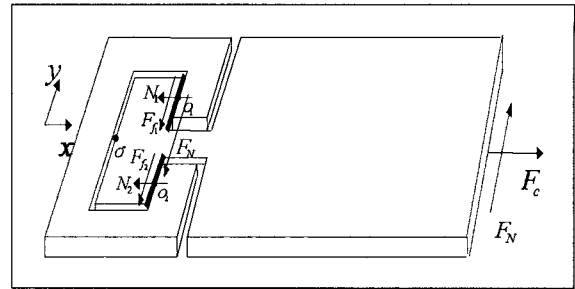
또한 U 는 보의 탄성에너지로 다음과 같다.

$$U = U_E + U_P \quad (9)$$

$$U_E = \frac{1}{2} \left[\int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (10)$$

$$U_P = \frac{1}{2} K_x x^{*2} + \frac{1}{2} K_y y^{*2} + \frac{1}{2} K_\theta \theta^{*2} \quad (11)$$

여기서 E , A , I 는 각각 외팔 보의 영의 계수, 단면적, 그리고 2차 면적 모멘트를 나타내며 K_x , K_y , K_θ 는 x , y , θ 방향 지지단의 강성을 나타낸다. 또한 외력을 정의하기 위하여 다음의 실례를 통해서 가정하고자 한다. 회전 블레이드의 경우, 회전시 노즐에 의해 외부로부터 받는 분사 가진력의 주파수는 외팔 보의 회전주파수와 노즐의 개수의 곱에 비례한다. 따라서 외팔 보가 임계 각속도로 회전운동을 하면 분사 가진력의 주파수는 고유진동수의 정수 배로 주어져 공진 현상을 발생시킨다. 노즐 분사력은 회전주파수와 관련되므로 이상화시켜 다음과 같이 표시한다.



[그림 2] 마찰감쇠효과를 고려한 외팔보

$$\vec{F} = F \sin(\Omega t) \hat{a}_2 \quad (12)$$

그리고 그림 2에 마찰감쇠효과를 고려한 회전 외팔보의 형상 및 작용하는 힘의 성분들을 나타내었다. 여기서 F_C , F_N 은 회전 시 발생하는 원심력과 외력인 노즐 분사력이며, 수직항력 N_1 , N_2 를 통해서 마찰력 F_{f_1} , F_{f_2} 를 구할 수 있고, 마찰력에 의한 일반작용력은 점 O_1 , O_2 에서의 속도 및 편속도를 통해서 유도할 수가 있다. 그들의 수식들을 정리하여 표현하면 다음과 같다.

$$F_C = \int_0^L \rho x dx \Omega^2 \quad (13)$$

$$F_{f_{1,2}} = \text{sign}(\dot{y}^*) \frac{1}{4} \mu \rho L^2 \Omega^2 \quad (14)$$

$$\vec{v}^{o_{1,2}} = (\dot{x}^* - \Omega y^*) \hat{a}_1 + \{\dot{y}^* + \Omega(r + x^*)\} \hat{a}_2 \quad (15)$$

$$F_{\mu+2} = \text{sign}(\dot{y}^*) \frac{1}{2} \mu \rho L^2 \Omega^2 \quad (16)$$

앞에서 제시한 모든 수식들을 식(8)에 대입하여 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + Q_{1k} \ddot{x}^* - 2\Omega \left(\sum_{j=2}^{\mu_2} M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + Q_{1k} \dot{y}^* \right. \\ & + P_{1k} \dot{\theta}^* \left. - \sum_{j=1}^{\mu_1} (\Omega^2 M_{ij}^{11} - K_{ij}^S) q_{1j} - \dot{\Omega} \sum_{j=2}^{\mu_2} M_{ij}^{12} q_{2j} \right. \\ & - \Omega^2 Q_{1k} x^* - \dot{\Omega} Q_{1k} y^* + r \dot{\Omega} Q_{1k} \theta^* \\ & = \Omega^2 P_{1k} + r \Omega^2 Q_{1k} \quad (i, k = 1, \dots, \mu_1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + Q_{2l} \dot{y}^* + P_{2l} \dot{\theta}^* + 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} \\ & + 2\Omega Q_{2l} \dot{x}^* + \dot{\Omega} \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{21} q_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} (r \Omega^2 K_{ij}^{GA} \\ & + \Omega^2 K_{ij}^{GB} + K_{ij}^B - \Omega^2 M_{ij}^{22}) q_{2j} + \dot{\Omega} Q_{2l} x^* \\ & - \Omega^2 Q_{2l} y^* + r \Omega^2 Q_{2l} \theta^* = - \dot{\Omega} P_{2l} - r \dot{\Omega} Q_{2l} \\ & + F_n \sin(\Omega t) \quad (i, l = 1, \dots, \mu_2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} Q_{1j} \ddot{q}_{1j} + \rho L \ddot{x}^* - 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_2} Q_{2j} \dot{q}_{2j} - 2\Omega \rho L \dot{y}^* \\ & - \rho L^2 \Omega \dot{\theta}^* - \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} Q_{1j} q_{1j} - \dot{\Omega} \sum_{j=1}^{\mu_2} Q_{2j} q_{2j} \\ & + (K_x - \rho L \Omega^2) x^* - \rho L \dot{\Omega} y^* - \frac{1}{2} \rho L^2 \dot{\Omega} \theta^* \\ & = \rho L r \Omega^2 + \frac{1}{2} \rho L^2 \Omega^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} Q_{2j} \ddot{q}_{2j} + \rho L \dot{y}^* + \frac{1}{2} \rho L^2 \dot{\theta}^* + 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_1} Q_{1j} \dot{q}_{1j} \\ & + 2\Omega \rho L \dot{x}^* + \dot{\Omega} \sum_{j=1}^{\mu_1} Q_{1j} q_{1j} - \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} Q_{2j} q_{2j} \\ & + \rho L \dot{\Omega} x^* + (K_y - \rho L \Omega^2) y^* - \frac{1}{2} \rho L^2 \Omega^2 \theta^* \\ & = - \rho L r \dot{\Omega} - \frac{1}{2} \rho L^2 \dot{\Omega} + \text{sign}(\dot{y}^*) \frac{1}{2} \mu \rho L^2 \Omega^2 \\ & - F_n \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} P_{2j} \ddot{q}_{2j} + \frac{1}{2} \rho L^2 \dot{y}^* + \frac{1}{3} \rho L^3 \dot{\theta}^* + 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_1} P_{1j} \dot{q}_{1j} \\ & + \rho L^2 \Omega \dot{x}^* - r \dot{\Omega} \sum_{j=1}^{\mu_1} Q_{1j} q_{1j} + r \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} Q_{2j} q_{2j} \\ & + \frac{1}{2} \rho L^2 \dot{\Omega} x^* - \frac{1}{2} \rho L^2 \Omega^2 y^* + (K_\theta \\ & + \frac{1}{2} \rho r L^2 \Omega^2) \theta^* = - \frac{1}{2} \rho r L^2 \dot{\Omega} - \frac{1}{3} \rho L^3 \dot{\Omega} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \quad (22)$$

$$K_{ij}^S = \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (23)$$

$$K_{ij}^B = \int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (24)$$

$$K_{ij}^{GA} = \int_0^L \rho(L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (25)$$

$$K_{ij}^{GB} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (26)$$

$$Q_{ki} = \int_0^L \rho \phi_{ki} dx \quad (27)$$

$$P_{ki} = \int_0^L \rho x \phi_{ki} dx \quad (28)$$

3. 무 차원 운동방정식 유도

앞서 유도한 식(17)~식(21)의 운동방정식을 무 차원 운동방정식으로 바꾸기 위해서 다음과 같은 무 차원 변수들을 도입하였다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (29)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (30)$$

$$q_{kj}^* \equiv \frac{a_{kj}}{L} \quad (31)$$

$$\lambda \equiv \left(\frac{AL^2}{I}\right)^{1/2} \quad (32)$$

$$\chi \equiv \frac{F_n T^2}{\rho L^2} \quad (33)$$

$$a^* \equiv \frac{x^*}{L} \quad (34)$$

$$\beta^* \equiv \frac{y^*}{L} \quad (35)$$

$$\delta \equiv \frac{\gamma}{L} \quad (36)$$

$$\gamma \equiv T\Omega \quad (37)$$

$$K_x^* \equiv \frac{K_x}{(EA/L)} \quad (38)$$

$$K_y^* \equiv \frac{K_y}{(EI/L^3)} \quad (39)$$

$$K_\theta^* \equiv \frac{K_\theta}{(EI/L)} \quad (40)$$

$$T = \left(\frac{\rho L^4}{EI}\right)^{1/2} \quad (41)$$

무 차원 변수들 식(29)~(41)를 이용하여 운동방정식 (17)~(21)을 무 차원 운동방정식으로 다음과 같이 유도 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{M}_{ij}^{11} \ddot{a}_{1j}^* + \bar{Q}_{1j} \ddot{a}^* - 2\gamma \left(\sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{M}_{ij}^{12} \dot{a}_{2j}^* + \bar{Q}_{1j} \dot{\beta}^* \right. \\ & \left. + \bar{P}_{1j} \dot{\theta}^* \right) + \sum_{j=1}^{\mu_1} (\lambda^2 \bar{K}_{ij}^S - \gamma^2 \bar{M}_{ij}^{11}) a_{1j}^* \\ & - \dot{\gamma} \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{M}_{ij}^{12} a_{2j}^* - \gamma^2 \bar{Q}_{ij} a^* - \dot{\gamma} \bar{Q}_{1j} \beta^* + \delta \dot{\gamma} \bar{Q}_{1j} \theta^* \\ & = \gamma^2 \bar{P}_{1j} + \delta \gamma^2 \bar{Q}_{1j} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{M}_{ij}^{22} \ddot{a}_{2j}^* + \bar{Q}_{2j} \ddot{\beta}^* + \bar{P}_{2j} \ddot{\theta}^* + 2\gamma \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{M}_{ij}^{21} \dot{a}_{1j}^* \\ & + 2\gamma \bar{Q}_{2j} \dot{a}^* + \dot{\gamma} \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{M}_{ij}^{21} a_{1j}^* + \sum_{j=1}^{\mu_2} (\bar{K}_{ij}^B - \gamma^2 \bar{M}_{ij}^{22} \\ & + \delta \gamma^2 \bar{K}_{ij}^{GA} + \gamma^2 \bar{K}_{ij}^{GB}) a_{2j}^* + \dot{\gamma} \bar{Q}_{2j} a^* - \gamma^2 \bar{Q}_{2j} \beta^* \\ & + \delta \gamma^2 \bar{Q}_{2j} \theta^* = -\dot{\gamma} \bar{P}_{2j} - \delta \dot{\gamma} \bar{Q}_{2j} \\ & + \phi_{2i}(1) \chi \sin(\gamma\tau) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{Q}_{1j} \ddot{a}_{1j}^* + \ddot{a}^* - 2\gamma \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{Q}_{2j} \dot{a}_{2j}^* - 2\gamma \dot{\beta}^* - \gamma \dot{\theta}^* \\ & - \gamma^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{Q}_{1j} a_{1j}^* - \dot{\gamma} \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{Q}_{2j} a_{2j}^* + (K_x^* - \gamma^2) a^* \\ & - \dot{\gamma} \beta^* - \frac{1}{2} \dot{\gamma} \theta^* = \delta \gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{Q}_{2j} \ddot{a}_{2j}^* + \ddot{\beta}^* + \frac{1}{2} \ddot{\theta}^* + 2\gamma \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{Q}_{1j} \dot{a}_{1j}^* \\ & + 2\gamma \dot{a}^* + \dot{\gamma} \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{Q}_{1j} a_{1j}^* - \gamma^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{Q}_{2j} a_{2j}^* + \dot{\gamma} a^* \\ & + (K_y^* - \gamma^2) \beta^* - \frac{1}{2} \gamma^2 \theta^* = -\delta \dot{\gamma} - \frac{1}{2} \dot{\gamma} \\ & + \frac{1}{2} \mu \text{sign}(\dot{\beta}^*) C_{fr} \gamma^2 - \phi_{2i}(1) \chi \sin(\gamma\tau) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{Q}_{2j} \ddot{a}_{2j}^* + \frac{1}{2} \ddot{\beta}^* + \frac{1}{3} \ddot{\theta}^* + 2\gamma \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{P}_{1j} \dot{a}_{1j}^* \\ & + \gamma \dot{a}^* - \delta \dot{\gamma} \sum_{j=1}^{\mu_1} \bar{Q}_{1j} a_{1j}^* + \delta \gamma^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{Q}_{2j} a_{2j}^* \\ & + \frac{1}{2} \dot{\gamma} a^* - \frac{1}{2} \gamma^2 \beta^* (K_\theta^* + \frac{1}{2} \delta \gamma^2) \theta^* \\ & = -\frac{1}{2} \delta \dot{\gamma} - \frac{1}{3} \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (46)$$

여기서

$$\bar{M}_{ij}^{ab} \equiv \int_0^1 \psi_{ai} \psi_{bj} d\xi \quad (47)$$

$$\bar{K}_{ij}^S \equiv \int_0^1 \psi_{1i, \xi} \psi_{1j, \xi} d\xi \quad (48)$$

$$\bar{K}_{ij}^B \equiv \int_0^1 \psi_{2i, \xi\xi} \psi_{2j, \xi\xi} d\xi \quad (49)$$

$$\bar{K}_{ij}^{GA} \equiv \int_0^1 (1 - \xi) \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \quad (50)$$

$$\bar{K}_{ij}^{GB} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \xi^2) \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \quad (51)$$

$$\bar{Q}_{ai} \equiv \int_0^1 \psi_{ai} d\xi \quad (52)$$

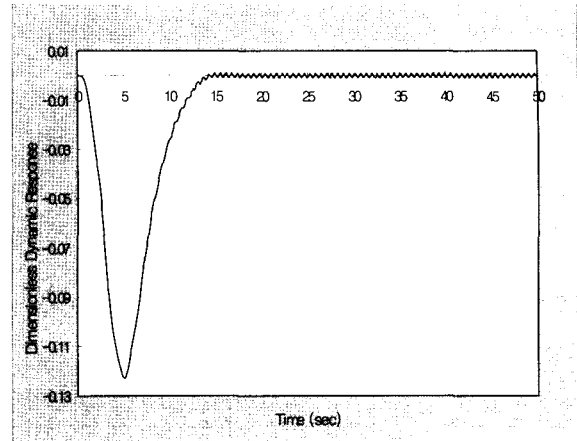
$$\bar{P}_{ai} \equiv \int_0^1 \xi \psi_{ai} d\xi \quad (53)$$

4. 수치 해석 및 결과

앞에서 유도된 운동방정식을 통해서 수치해석을 수행하였다. 그리고 임계 각속도 영역에서 무 차원 변수들의 변화에 따른 탄성 지지된 회전 외팔 보의 동 응답 특성을 분석하였다. 본 논문에서는 보의 회전운동을 일반화하기 위해서 다음과 같은 형태의 함수를 사용하였다.

$$\Omega = \frac{\Omega_S}{T_S} \left(t - \frac{T_S}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T_S} \right) \quad (0 \leq T \leq T_S)$$

$$\Omega = \Omega_S \quad (T \geq T_S) \quad (54)$$



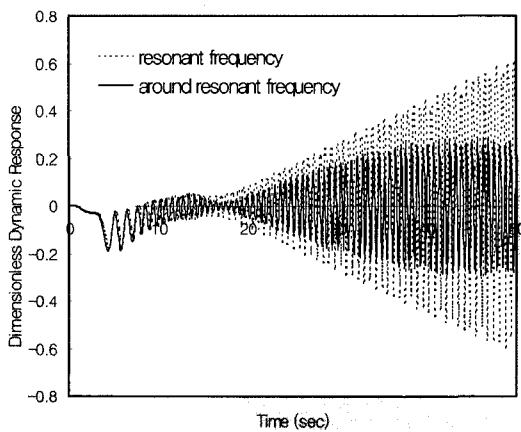
[그림 3] 정상적인 운용조건에서 회전 블레이드의 동 응답

임계 각속도는 참고문헌^[16]에서 제시한 방법을 사용하여 구했으며 본 논문에서는 구해진 임계 각속도의 주변 값을 기준으로 해서 수치해석을 수행하였다. 또한 탄성지지효과는 참고문헌^[17]에서 제시한 방법으로 고려하였으며 본 논문에서는 참고문헌^[17]에서 유도 제시 되어진 바와 같이 물리적으로 의미가 있는 회전 블레이드의 탄성지지부 각 방향의 강성 K_x , K_y , K_θ 의 값을 10^5 으로 하였다. 우선 공진 주파수 영역에서 회전 블레이드의 동적 특성을 알아보기 전에, 정상상태에서 일반적인 블레이드의 특성을 알아볼 필요가 있다. 그림 3은 공진주파수가 아닌 안정한 영역에서 공진현상을 유발시키는 노즐 분사력도 작용하지 않는 매우 정상적이고 일반적인 운용조건에서 블레이드의 동응답을 나타낸 그림이다. 그림을 통해 초기에는 원심력으로 인해 굽힘방향으로 탄성변형이 생기나 바로 블레이드 강성력으로 인해 정상적으로 복원되는 안정된 동응답을 보여주고 있다. 그렇다면 공진 주파수 영역에서 블레이드의 동응답이 어떻게 나타나는지 살펴 보도록 한다. 먼저 그림 4는 공진 주파수와 그 주변에

서의 동적 반응을 비교해서 나타낸 그림이다. 그림에서 보여주는 바와 같이 공진 주파수에서는 공진 현상으로 발산함을 보여주고 공진 주파수 부근에서는 발산하지는 않으나 큰 진폭으로 맥놀이 현상이 발생함을 보여주고 있다. 그리고 또한 살펴보아야 할 중요한 내용중의 하나는 공진 주파수 영역에서 무차원 변수들의 변화에 따른 탄성지지 회전 블레이드의 동 응답 특성이 어떻게 변화하는지에 관한 사항이다. 이는 시스템의 특성이 변화하는 모든 경우를 고려한 동 응답의 수치해석결과를 알아보려고 하는 것이다. 표 1은

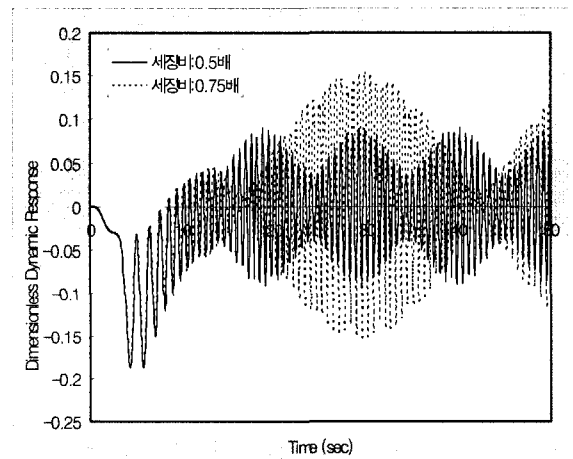
[표 1] 탄성지지 블레이드의 무 차원 변수

무 차원 변수	값의 크기
λ	70.71
δ	0.5
χ	1.0
K_x^*	10^5
K_y^*	10^5
K_θ^*	10^5

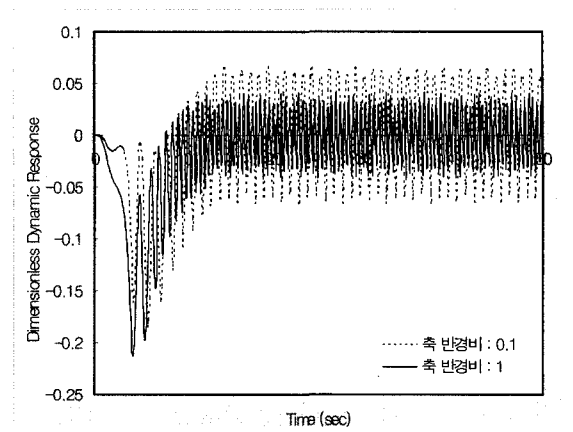


[그림 4] 공진 주파수와 그 부근에서 회전 블레이드의 동 응답

그림 4에서 사용된 무 차원 변수들의 값들을 정리하여 나타내었다. 그림 5~7은 시스템의 동 응답에 영향을 미치는 블레이드의 길이(λ), 외부 가진력(χ), 축 반경 비(δ)와 같은 무 차원 매개변수들을 각각 변화시켜 그 시스템에 대한 마찰감쇠효과에 따른 동 응답의 결과를 비교한 그림들이다. 그림 5는 세장비(λ)가 변화하는 경우이며 이때의 동적 변형의 크기는 보

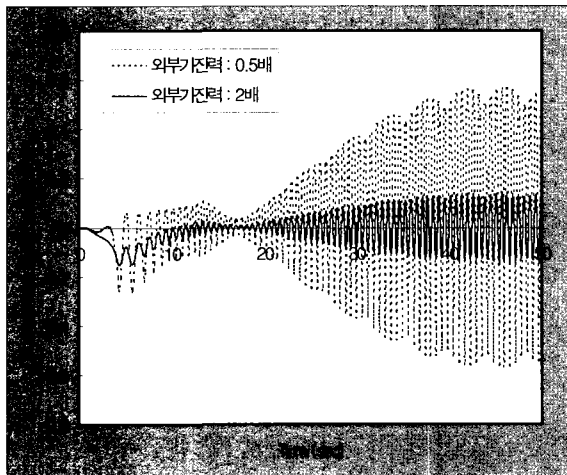


[그림 5] 세장비 변화에 따른 탄성지지 블레이드의 동 응답



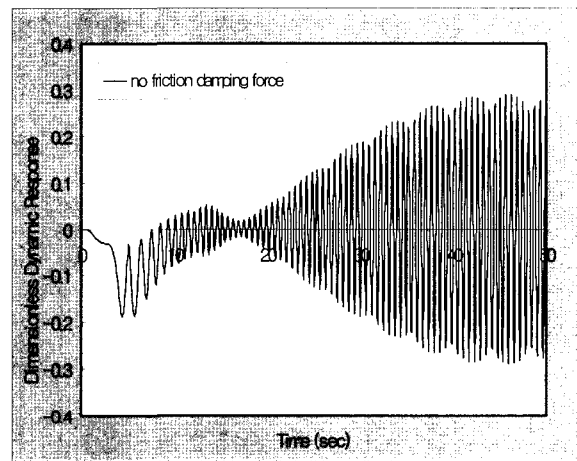
[그림 6] 축 반경비의 변화에 따른 탄성지지 블레이드의 동 응답

의 길이와 관련된 세장비에 비례하여 공진 현상이 크게 증가한다는 물리적 의미를 보여주고 있다. 그림 6은 허브와 블레이드 길이와의 비를 나타내는 축 반경비를 변화시켜가며 동적 반응을 비교하여 나타낸 그림이다. 이는 터빈 블레이드와 같이 축 반경비가 1에 가까운 경우와 헬리콥터 블레이드와 같이 0.1이하인 경우가 해당되며 0.1일 때가 1일 때보다 동 응답이 훨씬 크게 나타나는 것을 볼 수 있다. 즉 터빈 블레이드의 경우가 헬리콥터 블레이드보다 공진 주파수 영역에서 큰 응답을 보여주는 중요한 사실을 제시하고 있으며 설계시 위의 결과를 반드시 고려해야 할 것이다. 그림 7을 통해서 공진 현상을 유발시키는 외부 가진력에 따른 동 응답을 살펴보도록 한다. 이 경우는 산업현장에서 흔히 발생할 수 있으며 실제 분사력의 크기에 시스템의 동 응답이 매우 민감하게 반응한다. 그림 7에서는 외부 가진력의 크기를 표 1에 있는 크기의 0.5배와 2배로 설정하였다. 외부 가진력의 크기에 비례해서 동 응답이 나타남을 볼 수 있으며 이 결과를 바탕으로 외부 가진력이 작용했을 때 얼마만큼

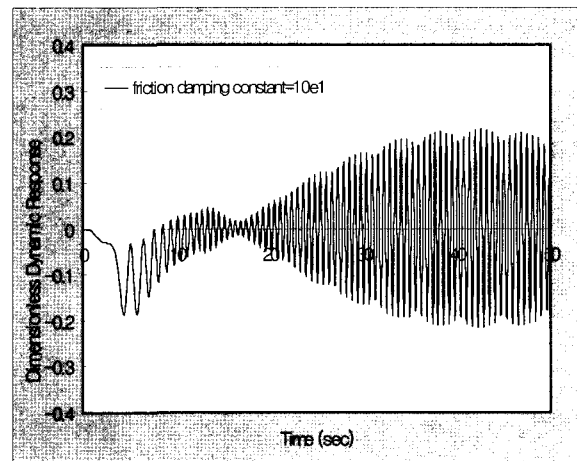


[그림 7] 외부 가진력의 크기에 따른 탄성지지 블레이드의 동 응답

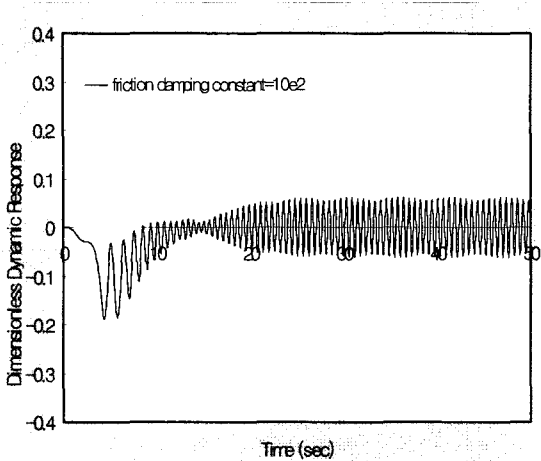
의 크기로 어떻게 동 응답이 나타나는지 또한 임의의 동 응답의 크기 내로의 외부 가진력의 크기를 설정하는 등 실제 시스템에 바로 적용될 수 있는 유용한 자료가 될 것으로 판단 된다. 지금까지 공진주파수 영역에서 무차원 변수의 변화에 따라 탄성지지 블레이드의 동 응답을 자세하게 살펴보았다. 그렇다면 이 모든 경우에 나타나는 큰 진폭의 동 응답을 줄이기 위한



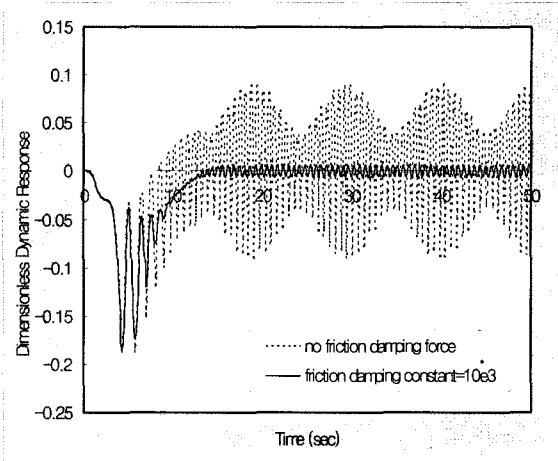
[그림 8(a)] 마찰 감쇠력이 없는 경우의 탄성지지 블레이드의 동 응답



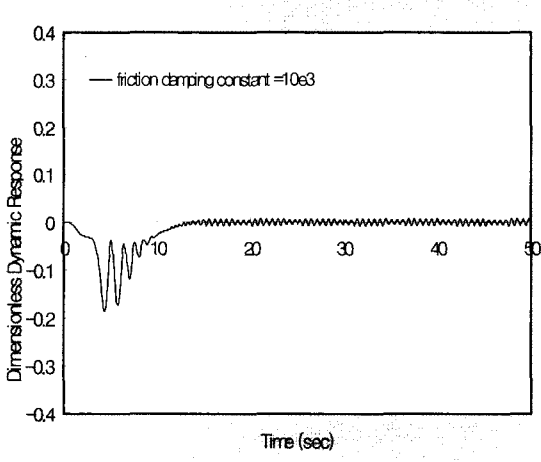
[그림 8(b)] 마찰 감쇠상수가 10 경우의 탄성지지 블레이드의 동 응답



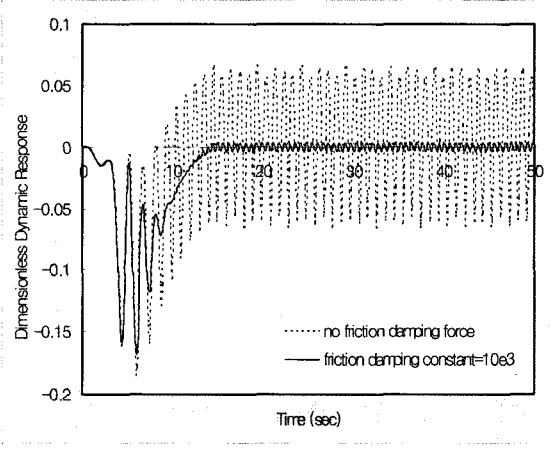
[그림 8(c)] 마찰 감쇠상수가 10e2 경우의 탄성지지 블레이드의 동 응답



[그림 9] 세장비가 변화하는 경우 마찰감쇠 상수 값에 따른 블레이드의 동응답



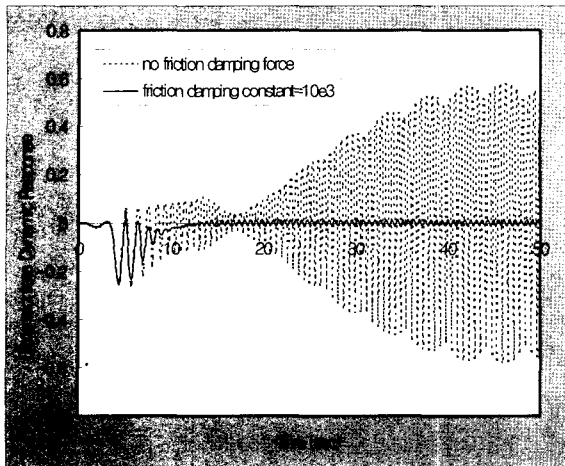
[그림 8(d)] 마찰 감쇠상수가 10e3 경우의 탄성지지 블레이드의 동 응답



[그림 10] 축반경비가 변화하는 경우 마찰 감쇠 상수 값에 따른 블레이드의 동응답

방법을 알아볼 필요가 있다. 마찰 감쇠력을 통해서 이러한 현상을 크게 줄일 수 있으며 그림 8을 통해서 마찰 감쇠상수 값에 따른 동 응답을 나타내 보았다. 그림 8(a)는 마찰 감쇠력이 없는 경우이고 (b),(c),(d)로 갈수록 마찰 감쇠상수를 증가시켜서 그 효과를 한 눈에 알아볼 수 있도록 비교해 보았다. 여기에 사용된

무 차원 변수 값들은 표 1과 동일하게 하였다. 또한 무 차원 변수 값들을 변화시켜가며 그 각각에 따른 큰 진폭의 블레이드의 동 응답이 마찰감쇠상수의 값에 따라 크게 줄어들음을 확인할 수 있었으며 그 결과를 그림 9~11에 나타내었다. 우선 그림 9는 세장비 (λ)가 표 1의 1/2인 경우에 즉 보의 길이가 반으로 줄어든 경우 마찰 감쇠상수 값에 따른 동 응답의 결



[그림 11] 외부가진력이 변화하는 경우 마찰 감쇠 상수 값에 따른 블레이드의 동응답

과를, 그리고 그림 10은 축 반경비(δ)를 표 1의 1/5인 경우의 결과를, 끝으로 그림 11은 외부 가진력(χ)이 표 1의 2배인 경우의 결과를 비교 제시한 그림이다. 모두 마찰 감쇠력에 의해 공진 주파수영역에서 동응답을 크게 줄여주는 효과를 확인할 수 있었다. 위의 결과를 통해서 블레이드 지지부의 탄성력의 크기에 따른 마찰 감쇠력의 값을 알 수 있고, 무 차원 변수가 달라져도 즉 시스템의 특성이 어떻게 변화하더라도 불안정영역에서 일어나는 공진 현상을 설계자의 요구에 맞게 조절할 수 있으며, 이전의 연구에서는 제시되지 못했던 그 값들의 크기 및 범위를 명확하게 나타내었다.

위에서 살펴본 수치해석 결과들은 시스템의 특성이 달라질 수 있는 모든 무차원 변수들에 관한 특성을 보여준다. 실제 시스템에 있어서 블레이드의 길이, 노즐 분사력등과 같이 외부에서 작용되는 가진력, 허브와 보의 길이와의 비를 나타내는 축 반경비등의 변화를 고려해서 공진주파수 및 그 부근의 영역을 찾아내고 시스템에 치명적 영향을 줄 수 있는 조건하에서

일반화된 결과를 도출하였다. 여기에는 정성적 결과 뿐 아니라 지지부의 각 방향 탄성력의 크기변화와 그에 상응하는 마찰 감쇠력의 크기 및 그 값들의 영향을 통해서 시스템의 공진 현상을 크게 줄이는 효과를 잘 나타내주고 있다. 즉, 사용용도에 따라 설정된 임의의 탄성 블레이드 시스템의 가혹한 조건하에서 발생하는 공진 현상을 줄이기 위한 마찰 감쇠력의 값 및 범위를 정확하게 제시할 수 있게 된 것이다.

5. 맺음말

본 논문에서는 탄성 지지된 회전 블레이드의 마찰 감쇠효과를 고려하여 동적 특성 해석을 위한 모델링을 제시하였고 그 모델링에 근거하여 인장 방향과 굽힘 방향을 동시에 고려하여 수치해석을 하였다. 탄성 지지효과는 물리적으로 의미가 있는 각 방향의 강성 값을 구하여 제시하여 고려하였으며 또한 지지부에 마찰감쇠효과를 고려하여 수치해석을 수행한 결과 회전 블레이드가 고유진동수로 회전을 할 때 동적 반응은 발산하는 것을 확인 할 수 있었으며 공진 주파수영역에서 회전하는 경우 큰 진폭의 맥놀이 현상이 일어나는 것을 관찰할 수 있었다. 본 논문에서는 이러한 큰 진폭의 맥놀이 현상의 동적 반응을 감소시켜 동적 안정성을 유지하는 것이 주요 관심사이며 이는 회전 블레이드에 마찰감쇠 효과를 고려함으로써 그 값의 크기를 변화시킴에 따라 과도응답이 현저하게 감소시킬 수 있었으며 또한 그 크기도 적절하게 조절할 수 있었다. 그리고 시스템의 동적 특성을 좌우하는 무차원 매개 변수들을 이용하여 각각을 다양하게 변화시켜가며 시스템이 가질 수 있는 여러 가지 특성변화에 모두 적용시켜 봄으로써 마찰감쇠 효과를 이용한 파

도응답을 크게 줄일 수 있음을 확인할 수 있었으며 좀 더 일반화된 결과를 도출해 낼 수 있었다. 이러한 수치해석 결과들은 공진 주파수영역을 통과하여 더 큰 정상상태 각속도로 회전하는 블레이드와 같은 회전 구조물의 설계 시 매우 유용하게 이용될 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- [1] Southwell, R., Gough, F., "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," 1921, British A.R.C Report, No.766.
- [2] Putter, S., Manor, H., "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," 1978, J. of Sound and Vibration, Vol.56, pp.175~185.
- [3] Boyce, W. E., "Effect of Hub Radius on the Vibrations of a Uniform Bar," 1956, ASME J. of Applied Mechanics, Vol.23, pp.283~290.
- [4] Afolabi, D., "Natural Frequencies of Cantilever Blades with Rasilent Roots," 1986, J. of Sound and Vibration, Vol.110, pp.429~441.
- [5] Lee, S. Y., Lin, S. M., "Bending Vibration of Rotating Nonuniform Timoshenko Beam with an Elastically Restrained Root," 1994, ASME, J. of Applied Mechanics, Vol.61, pp.949~955.
- [6] A. Shina., J.H. Griffin., "Friction damping of flutter in gas turbine engine airfoils," 1983, J. of Aircraft, Vol.20, pp.372~376.
- [7] A. Shina., J.H. Griffin., "Effects of static friction on the forced response of frictionally damped turbine blades," 1984, J. of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol.106, pp.65~69.
- [8] J. H. Wang., W. K. Chen., "Investigation of the Vibration of a blade with Friction Damper," 1993, J. of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol.115, pp.294~299.
- [9] Leissa, A., "Vibration Aspects of Rotating Turbomachinery Blades," 1981, Applied Mechanics Reviews, Vol.34, pp.629~635.
- [10] Abbas, B. A. H., "Dynamic Analysis of Thick Rotating Blades with Flexible Roots," 1985, The Aeronautical Journal, Vol.89, pp.10~16
- [11] Kane, T., and Levinson, D., "Dynamics: Theory and Applications," 1986, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y.
- [12] Simo. J. C., Vu-Quoc, L., "The Role of Nonlinear Theories in Transient Dynamic Analysis of Flexible Structures," 1987, J. of Sound and Vibration, Vol.119(3), pp.487~508.
- [13] Rao. J. S., "Turbomachine Blade Vibration," 1991, Wiley, New York.
- [14] Yoo, H. H., Ryan, R., Scott, R., "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," 1995, J. of Sound and Vibration, Vol.181, No.2, pp.261~278.
- [15] Y. Wang., "An Analytical Solution Elastic-Friction Damped for Periodic Response of Systems," 1996, J. of Sound and Vibration, Vol.189(3), pp.299~313.
- [16] Yoo, H. H., Shin, S. H., "Vibration Analysis

- of Rotating Cantilever Beams," 1998, J. of Sound and Vibration, Vol.212, No.5, pp.807~828.
- [17] 윤경재, 유흥희, "지지부의 탄성효과를 고려한 회전 외팔 보의 진동해석," 2000, 한국소음진동학회 논문집, 제10권 제6호, pp.1022~1028.
- [18] Rao, J. S., and Anil, Saldanha, "Turbomachine Blade Damping," 2002, J. of Sound and Vibration.
- [19] Chen, C. L., and Chen, L. W., "Random Vibration of a Rotating Blade with External and Internal Damping by the Finite Element Method," 2002, J. of Sound and Vibration, Vol.252(4), pp.697~715.