

Kerr Medium에서의 단독 빔의 간섭에 관한 시뮬레이션

심형관*

Simulation of Solitary Beam Interaction in Kerr Media

Hyoung-kwan Sim

Abstract

This paper describe numerical experiments with solitary beams in a self focusing Kerr medium with fast response. Through formal analogies, it compare this results on the phase sensitivity of beam collision with known predictions about one dimensional soliton interaction. For incoherent oblique beam interaction, there occurs a non-periodic coupled-mode type transfer of energy, resulting in complete transmission each beam through the other one.

Key Words: Kerr medium, soliton, self focusing, beam interaction

* 청주대학교 정보통신공학과 부교수

1. 서론

광의 전파를 연구하고자 할 때는 고가의 정밀한 실험장비가 필요하게 되어 이를 실험적으로 보이게 할 때는 상당한 어려움이 따르게 된다. 이러한 실험을 수월하게 수행하기 위하여 개발한 수치 해석적 방법 중 2단 프리에 변환 (Split step Fourier transform) [1]방법이 있다. 실제의 실험과 동일한 형태의 결과를 유추할 수 있는 방법으로, 평면파의 각 스펙트럼 (angular spectrum)을 유기된 위상필터[2]를 통해 순차적으로 진행시킴으로서 결과를 얻어낸다. 본 논문에서는 3차 비선형 항을 갖는 클라인 골든(Klein Gordon) 방정식을 이용하여 단독 빔(solitary beam)의 충돌에 관하여 연구하였다. 위 방정식은 적당한 가정과 요소의 변화를 통해 2차원 빔의 진행 또는 1차원 펄스의 진행을 동시에 표현할 수 있다. 즉 2차원 빔에 관한 실험 결과는 바로 1차원 펄스에 관한 실험으로 간주되어 해석할 수 있다. 예를 들면 빔의 회전은 펄스의 주파수 천이로, 빔 상호간의 사각 충돌은 서로 다른 속도의 펄스의 충돌로 해석할 수 있다. 본 논문에서는 위상차가 있는 두 빔의 충돌을 각도에 따라 분석하였다. 위상이 다른 빔은 서로 반사하고 충돌 각도가 크지 않은 위상이 같은 빔은 주기적으로 교차진행 한다는 것을 보여주었다. 이는 골든(Gordon)이 주장하였던 솔리톤의 행동과 잘 일치되었다. 비결맞음(Incoherent)한 빔의 충돌 시뮬레이션결과 충돌 후 서로 반발하는 것으로 보고되고 있으나 한 개의 빔만 모니터링 한 결과 두 빔은 서로 에너지를 서로 교환 후 통과하는 것으로 밝혀졌다. 이는 본 논문에서 최초로 보고하는 것으로 솔리톤은 충돌 후 제 모습을 유지하기 위해 충돌 후 빔의 에너지를 서로 교환한다는 것을 보여주었다.

2. 이론

3차 비선형 항을 갖는 클라인 골든(Klein Gordon)[3] 방정식은

$$U_{tt} - c^2(U_{xx} + U_{zz}) = A_1 U + A_3 U^3 \quad (1)$$

과 같다. 여기서 시간적으로 천천히 변화하는 위상자(Phasor) $V(x, z, t)$ 를 다음과 같이 정의하고

$$U = 0.5 V \exp(j\omega_c t) + cc \quad (2)$$

여기서 ω_c 는 중심주파수이다. 이를 식 (1)에 대입하여 3차 고조파 항을 무시한다면 다음과 같은 시변 헬름홀츠(Helmholts) 방정식:

$$V_{tt} + 2j\omega_c V_t - \omega_c^2 V - c^2(V_{xx} + V_{zz}) = A_1 V + \left(\frac{3}{4}\right) A_3 |V|^2 V \quad (3)$$

을 얻을 수 있다. 진행파:

$$V = a \exp(-jk_c z) \quad (4)$$

여기서 a 는 천천히 변화하는 포락선 파고(slow varying envelope amplitude)이다. 식 (4)를 가지고, 식 (3)으로부터 다음과 같은 비선형 분산관계(Dispersion Relation)을 얻을 수 있다. 즉,

$$\omega_c^2 - c^2 k_c^2 + A_1 + \frac{3}{4} A_3 a^2 = 0 \quad (5)$$

또한 비선형 계수:

$$\frac{n_2}{n_0} = \frac{1}{n_1} \frac{\partial n}{\partial a^2} = \frac{1}{k_c} \frac{\partial k_c}{\partial a^2} = \frac{3A_3}{8c^2} k_c^2, \quad (6)$$

를 얻을 수 있고 식(3)의 선형 부분에서 차단 주파수:

$$\omega_{\infty} = \sqrt{-A_1}, \quad (7)$$

와 군속도:

$$u_g = \frac{\partial \omega_c}{\partial k_c} = \frac{c^2}{c_p} = c^2 \frac{k_c}{\omega_c}, \quad (8)$$

에 대하여 (여기서, $c_p = \frac{\omega_c}{k_c}$ 는 위상속도이다.) 다음과 같이 구해진다.

$$u_g' = \frac{\partial^2 \omega_c}{\partial k_c^2} = \frac{c^2 - u_g^2}{\omega_c}. \quad (9)$$

만일 z 방향으로 천천히 변화하는 포락선 (Envelope) $E(x, z, t)$ 를 다음과 같이 가정하고:

$$V = E \exp(-jk_c z), \quad (10)$$

지역시간(Local time):

$$t' = t - \frac{z}{u_g}, \quad (11)$$

을 도입하여 식(3)에 식 (8),(9), (10)을 도입하여 E_{tt} 항과 E_{zz} 항을 무시하면:

$$jE_z + (2k_g)^{-1} E_{z'z'} - (2k_c)^{-1} E_{xx} - K|E|^2 E = 0, \quad (12)$$

이 된다. 여기서

$$z' = u_g t' = u_g t - z, \quad (13)$$

$$k_g = u_g \left(\frac{\partial u_g}{\partial k_c} \right), \quad (14)$$

$$K = \frac{k_c n_2}{n_0}. \quad (15)$$

식 (12)는 펄스화 빔에 대한 일반식을 나타낸다. 즉, 연속 빔을 위해서는 $E_{z'z'} = 0$ 을 취함으로써:

$$jE_z - (2k_c)^{-1} E_{xx} - K|E|^2 E = 0, \quad (16)$$

을 얻을 수 있고, 1 차원 펄스를 위해서는 $E_{xx} = 0$ 을 취함으로써 :

$$jE_z + (2k_g)^{-1} E_{z'z'} - K|E|^2 E = 0, \quad (17)$$

를 얻을 수 있다. 이를 비교하여 정리하면 다음과 같다.

2-d Beam	1-d Pulse
Diffraction, k_c	Dispersion, $k_g = u_g \left(\frac{\partial u_g}{\partial k_c} \right)$
Transverse Coordinate x	Local Coordinate $z' = u_g t - z$ Local time $t' = t - \frac{z}{u_g}$

식 (16)과 (17)을 Dimensionless 방정식으로 나타내면:

$$j\psi \zeta - 0.5 \phi \xi \xi - |\psi|^2 Y = 0, \quad (18)$$

이 되고 여기서,

$$\psi = \left(\frac{K}{k_c} \right)^{0.5} E \text{ for (16),}$$

$$\psi = \left(\frac{K}{k_g} \right)^{0.5} E \text{ for (17),} \quad (19)$$

$$\zeta = k_c z \text{ for (16)}$$

$$\zeta = k_g z \text{ for (17),} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \xi &= k_c x \quad \text{for (16)} \\ \xi &= k_g z \quad \text{for (17)}. \end{aligned} \quad (21)$$

한편 식 (18)에 대한 원-솔리톤, 비주기(non periodic) 해는 [3]에 의하여 다음과 같이 주어진다.:

$$\psi = A \operatorname{sech}[A(\xi - V\zeta)] e^{\left[-jV\xi - \frac{j(A^2 - V^2)\zeta}{2}\right]}, \quad (22)$$

위 식을 2-d 빔의 해로 가정하고 살펴보면 $V \ll 1$ 인 경우 파라미터 V 는 빔의 회전을 나타낸다. 즉 진행 축 z 에 대하여 미소 각 θ 의 회전이 있다면

$$V = \sin \theta \quad (23)$$

가 되고, 파라미터 A 를 다음과 같이 놓으면,

$$A = a_0 \left(\frac{K}{k_c} \right) = a_0 \left(\frac{n_2}{n_0} \right). \quad (24)$$

다음과 같은 해를 얻을 수 있다. 즉,

$$E \cong a_0 \operatorname{sech} k_c \left(\frac{n_2}{n_0} \right)^{0.5} a_0 (x - z \sin \theta) e^{\left[-jk_x \sin \theta - jk_y (\cos^2 \theta - 1) / 2 - jk_z \frac{n_2 - a_0^2}{2}\right]} \quad (25)$$

위 식 (25)를 식 (10)에 대입하면 z 축에 대하여 θ 의 각도로 진행하는 진행파를 얻을 수 있다.

식 (22)가 1-d 펄스 해인 경우 파라미터 V 는 $V \ll 1$ 조건하에서 펄스의 주파수 변화 $\Delta \omega$ 에 의한 펄스 속도 u_g 의 변화를 나타낸다. 즉,

$$V = - \frac{\Delta u_g}{u_g}, \quad (26)$$

$$\Delta \omega_c = \left(\frac{\partial k_c}{\partial u_g} \right) \Delta u_g = -k_g u_g V, \quad (27)$$

$$\Delta k_c = \left(\frac{\partial k_c}{\partial \omega_c} \right) \Delta \omega = -k_g V \quad (28)$$

이 되어 펄스 해:

$$E \cong a_0 \operatorname{sech} (k_c k_g)^{0.5} \left(\frac{n_2}{n_0} \right)^{0.5} a_0 u_g (t' - z \Delta u_g^{-1}) e^{\left[j^{\wedge} \omega_c t' - j^{\wedge} k_x x - jk_y \frac{n_2 - a_0^2}{2}\right]} \quad (29)$$

이 된다. 위에서 살펴본 것과 같이 식 (23)과 (26)-(28)을 비교 살펴본 결과 빔의 진행 각도의 변화는 펄스의 속도 변화로 대응될 수 있고 또한 주파수 천이에 의한 전파상수의 변화로 이어질 수 있다.

3. 알고리즘

본 연구에서 사용된 알고리즘은 참고문헌[2]에 자세히 설명되어 있다. 간략하게 설명하자면 본 알고리즘은 자체 유도된 얇은 위상필터

$\Delta n(x, z) = n_2 |V(x, z)|^2$ 를 통과하는 각 평면파 스펙트럼 (angular plane wave spectrum (Inverse Fourier transform $F^{-1}\{V(x, z)\}$))의 전파를 이용한 것으로

첫째로 선형 비분산면(non-diffracting slice)

Δz :

$$V(x, z) = M(x, z) V(x, z) \quad (30)$$

를 통과시킨다.

여기서 $M(x, z)$ 는 비선형 연산자로:

$$M = \exp[-jk_c(n_2/n_1)|V(x, z)|^2 \Delta z] \quad (31)$$

로 주어진다.

두께 선형 분산면(diffracting slice) Δz :

$$V(x, z + \Delta z) = FPF^{-1}[V(x, z)] \quad (32)$$

를 통과 시킨다.

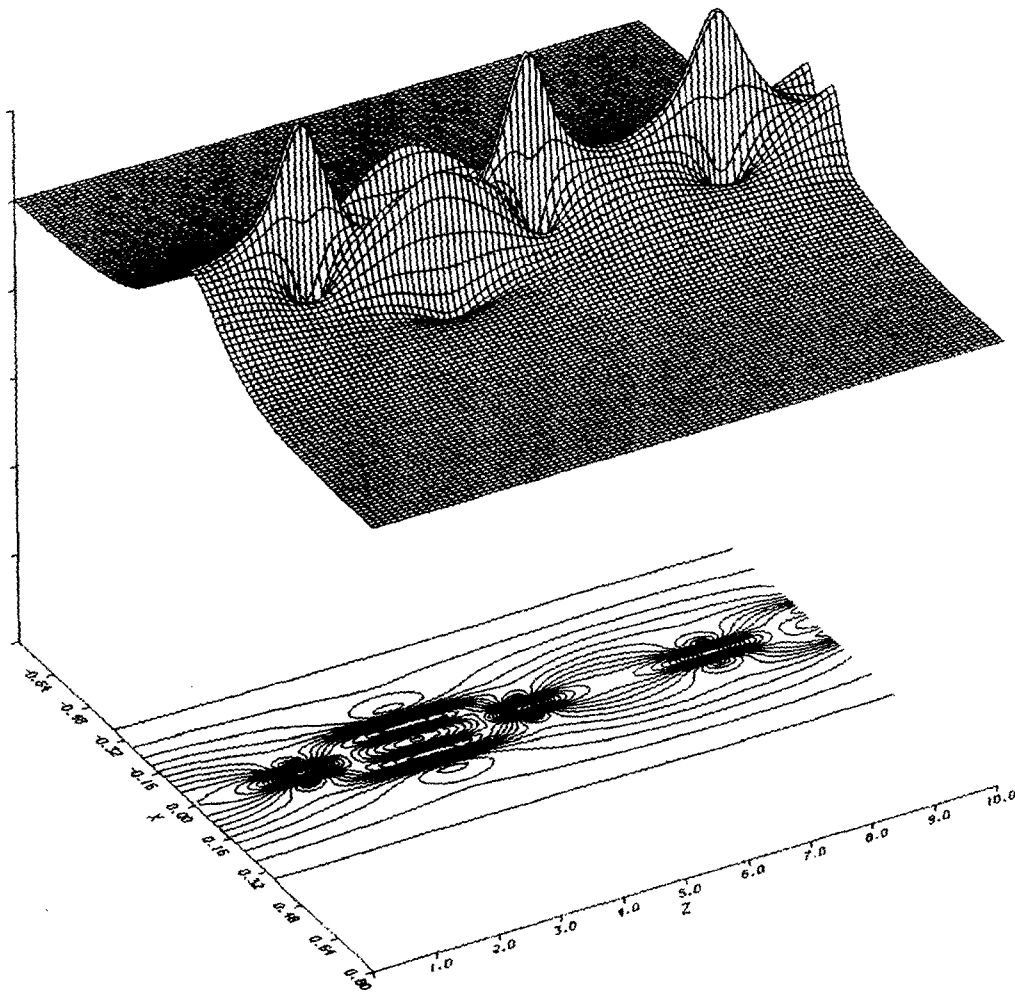
여기서 P 는 회절(diffraction) 연산자:

$$P = \exp[-j(k_c^2 - k_x^2)^{0.5} \Delta z] \quad (33)$$

이다.

전체적인 알고리즘을 간단히 수식으로 표현하면 다음과 같이 된다:

$$V(x, z + \Delta z) = FPF^{-1}M[V(x, z)] \quad (34)$$



<그림 1> 진폭이 $3a_0$ 인 고차 솔리톤 빔의 변화

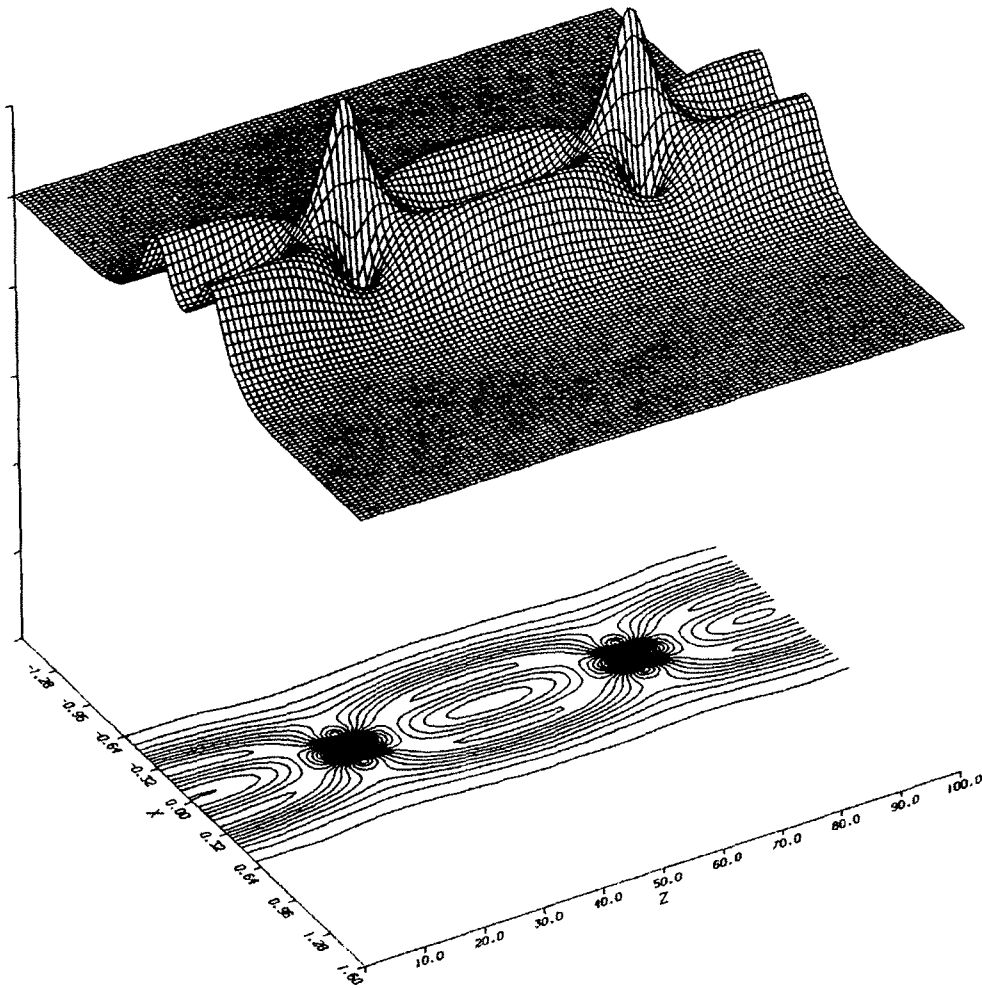
4. 시뮬레이션

본 연구의 솔리톤 빔 식(24)에 대해 수치 해석적 실험을 위해 사용된 값은 $k_c = 100\pi$, $c=1$, $a_0 = 4.64 \times 10^{-3}$, $n_2/n_0 = 34$ 이고 사용 파장 $\lambda_c = 0.02$, 빔 형태 (profile)의 폭은 $w = 10\lambda_c = 0.20$ 으로 하였다. 이러한 값들이 적절한지를 시험하기 위하여 진

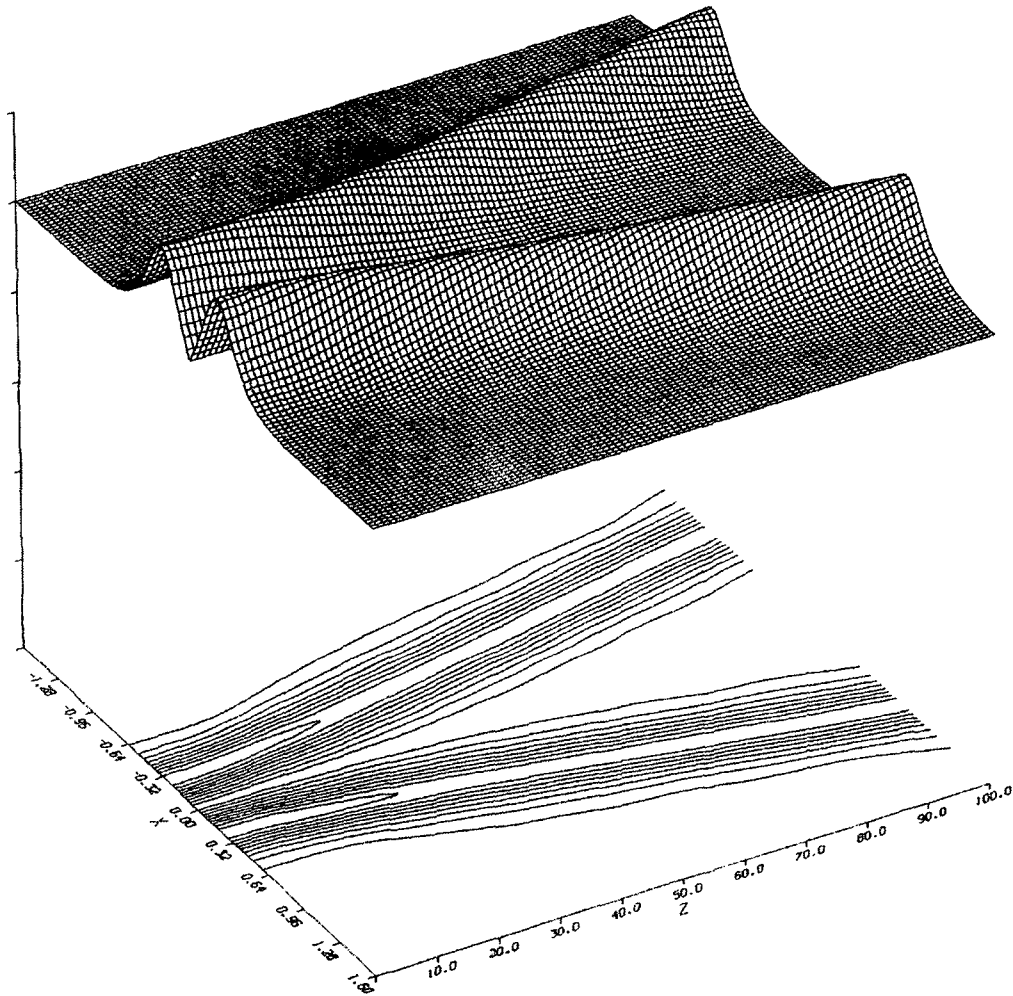
폭이 $3a_0$ 인 고차 솔리톤 빔의 변화를 <그림 1>과 같이 실험한 결과, 참고문헌[4]에서 제시한 것과 같이 좁아짐(narrowing) 과 분열됨(splitting) [4][5] 이 나타났고, 표준화 된 기본 주기 $\zeta_0 = \pi/(2A^2)$ 에 대해 주기:

$$z_0 = \left(\frac{\lambda}{4a_0^2} \right) \left(\frac{n_2}{n_0} \right)^{-1} \quad (35)$$

를 사용한 파라미터를 이용해 계산한 결과



<그림 2(a)> 동일한 위상을 갖는 평행한 두 빔의 간섭
(초기 두 빔 간의 간격은 $25\lambda_c$)



<그림 2(b)> 위상차가 π 를 갖는 평행한 두 빔의 간섭
(초기 두 빔 간의 간격은 $25\lambda_0$)

$z_0 \cong 6.8$ 로 <그림 1>의 시뮬레이션 결과와 일치였다.

4.1 평행한 coherent 빔

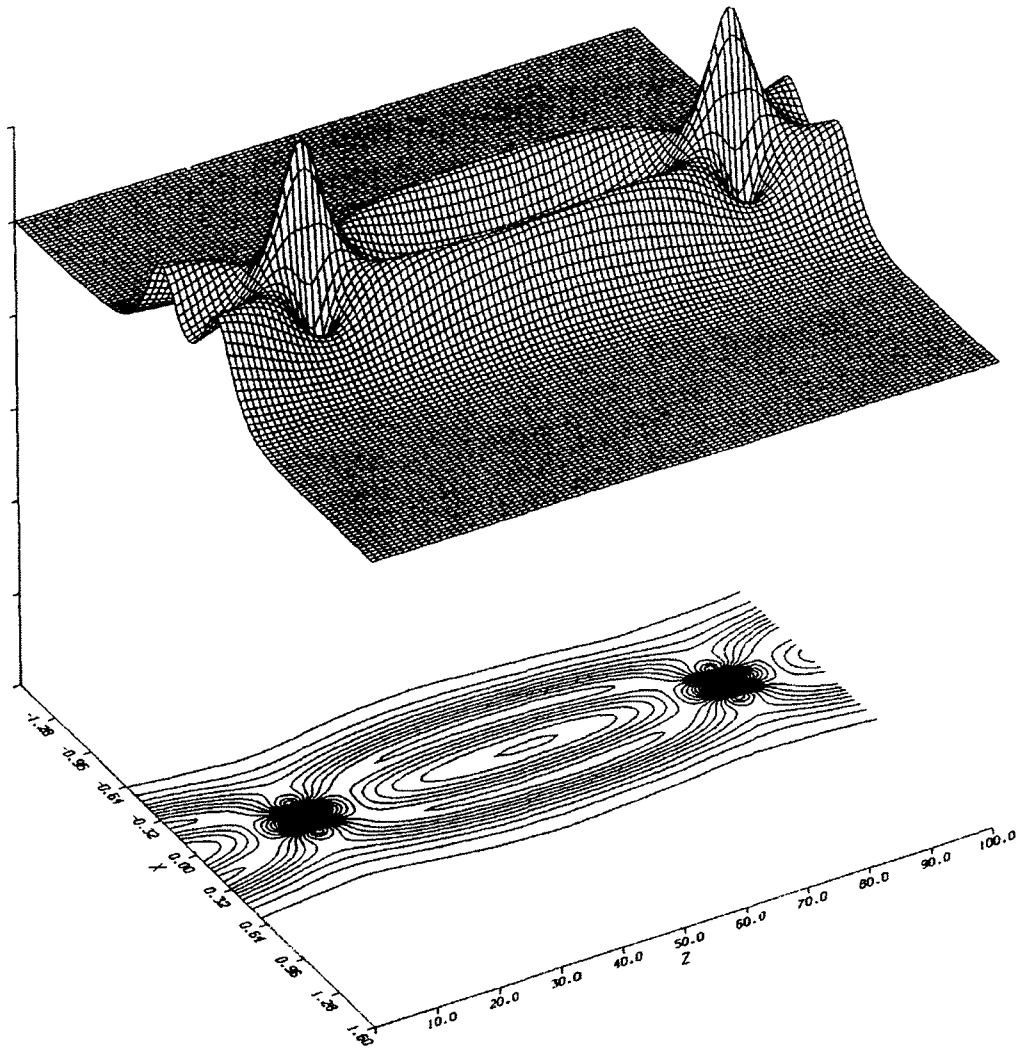
본 실험에서는 두 빔의 상대적인 위상차를 $0-\pi$ 까지 바꾸면서 그 변화를 살펴보았다. 즉 <그림 2(a)>는 0의 위상차, <그림 2(b)>는 π

의 위상차 일 때를 보여주고 있다. 여기서 초기 두 빔 사이의 거리는 $2.5w=25$ 이고 $\lambda_0=0.5$ 이다. 그림의 결과에서 보여주는 것과 같이 위상차가 없는 경우에만 상호 인력이 작용였고, 다른 경우에는 반발력을 보였다. 또한 본 논문에서는 보여주지 않았지만 위상차 $\pi/4$ 경우와 $3\pi/4$ 경우에도 역시 반발력이 나타남을 알 수 있었다. 이는 골든(Gordon)[3]이 크기

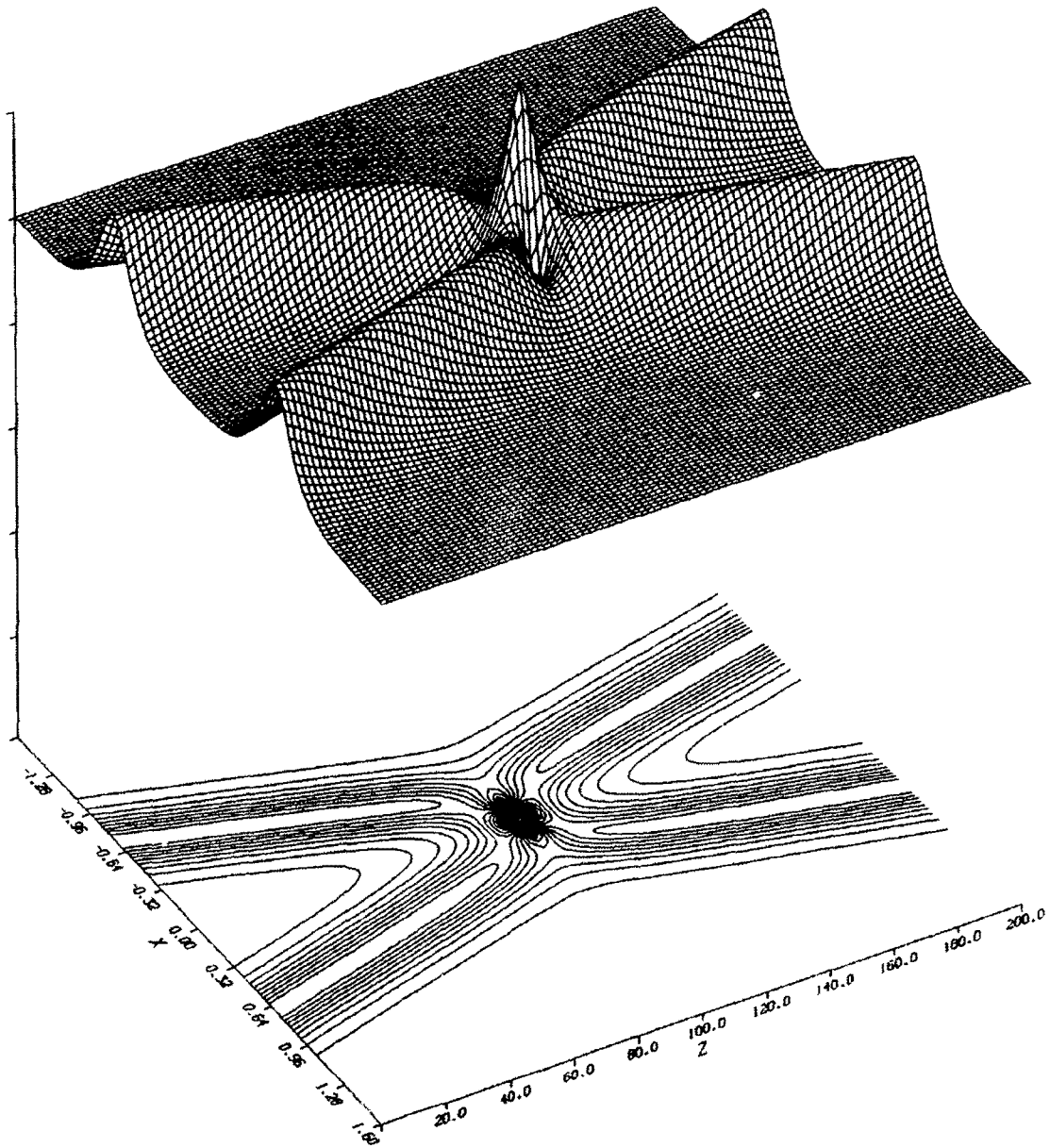
와 속도가 같은 두 1-d 솔리톤의 행동과 일치하는 것으로 2-d 빔과 1-d 솔리톤 펄스가 같은 논리 속도에 적용된다는 것을 보여주는 결과다.

4.2 사각 충돌 결맞음(coherent) 빔

같은 위상을 갖는 두개의 빔이 일정한 각을 가지고 접근한 경우를 보였다. 두 빔의 각도는 0.01이고, 초기 두 빔 사이의 거리는 <그림 3(a)> 경우 $25\lambda_c$, <그림 3(b)> 경우 $75\lambda_c$ 이다. 두 빔 사이의 거리가 적을 때에는 충돌 후 인력이 작용해 일정주기를 가지고 바운드(bound)함을 보여주었고, 두 빔 사이의 거리



<그림 3(a)> 초기 간격이 $25\lambda_c$ 인 두 개의 빔이 각도 0.01 rad으로 충돌 한 경우



<그림 3(b)> 초기 간격이 $70\lambda_c$ 인 두 개의 빔이 각도 0.01 rad으로 충돌한 경우

거 먼 경우 두 빔을 서로 충돌 후 통과함을 보였다. 이는 골든(Gordon)[3]이 설명한, 크기가 서로 같고 다른 속도를 갖는 솔리톤의 충돌현상과 동일한 것으로, 특히 <그림 3(b)>는 두 솔리톤의 속도차가 적을 경우에 서로 인력이 작용하여 바운드(bound)한다는 주장과 동일 결과를 보여주고 있다.

4.3 평행한 incoherent 빔

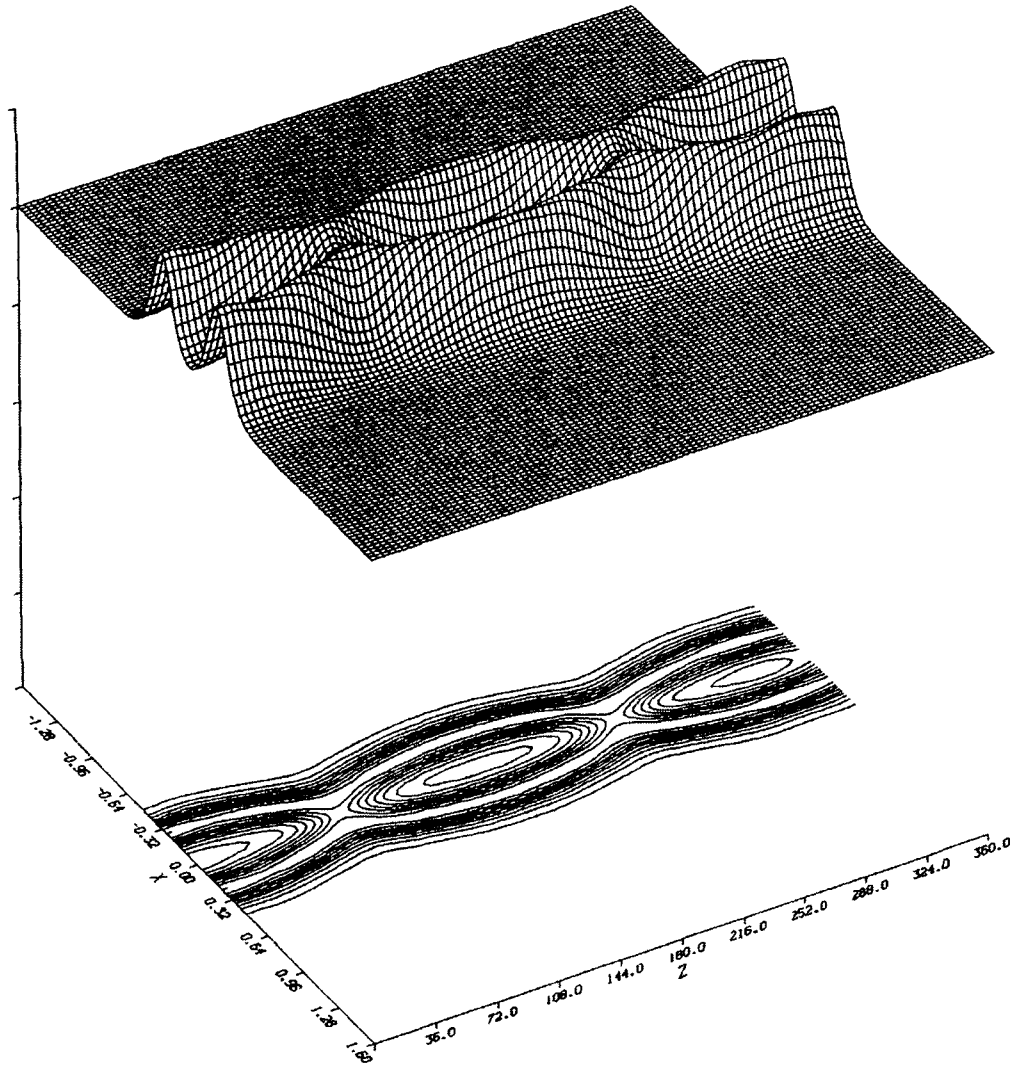
비결맞음(Incoherent) 빔에 대한 실험은 식 (16)의 비선형 항을 다음과 같이 수정하여 실험하였다. 즉,

$$K|E|^2E \rightarrow K(E_1 + E_2)(|E_1|^2 +$$

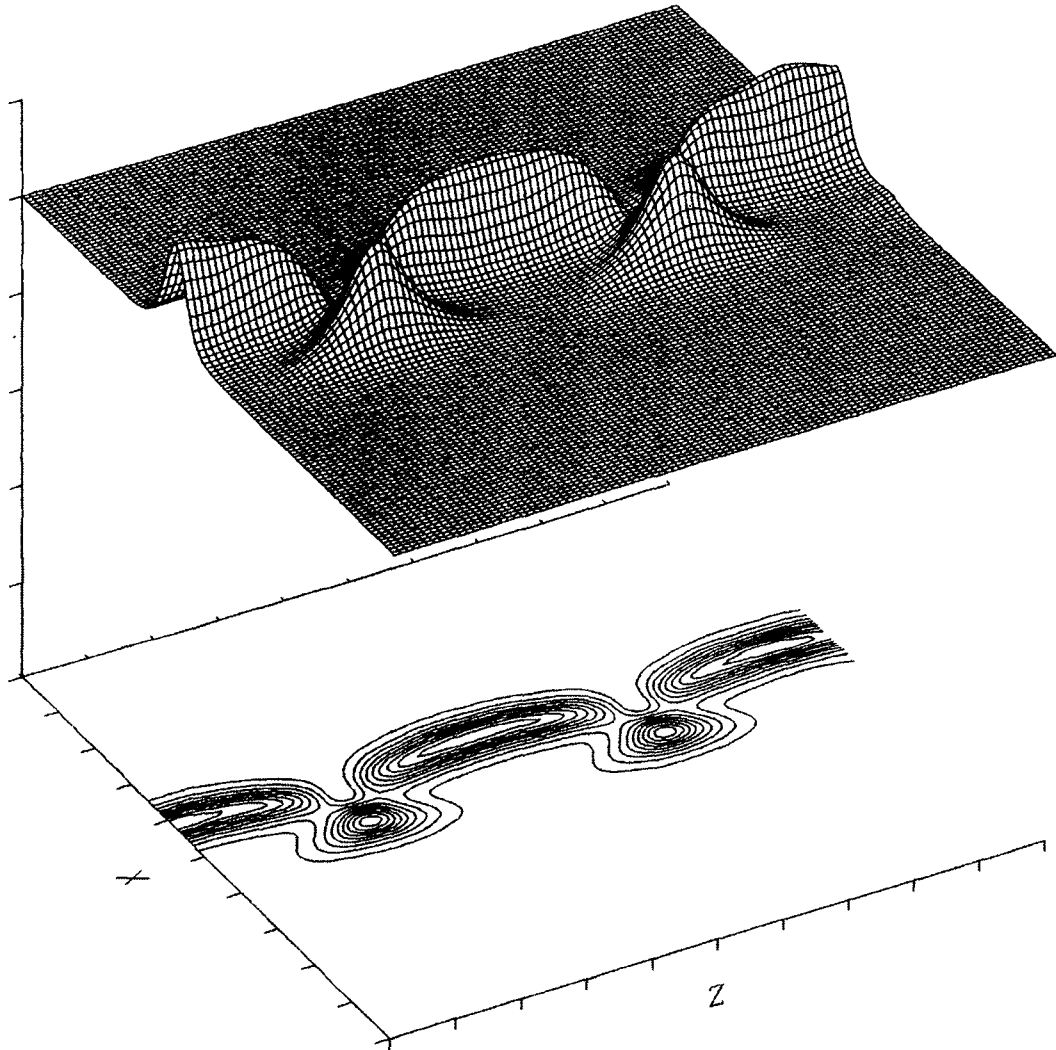
$$| E_2 |^2 \quad (36)$$

여기서 E_1 와 E_2 는 비결맞음(incoherent) 빔이다. 초기에 $25\lambda_c$ 만큼 떨어진 두 빔에 대한 행동을 <그림 4(a)>에서 보여주고 있다. <그림 4(a)>, 특히 컨투어를 보면 두개의 빔은 서

로 주기적인 인력과 함께 완전한 충돌은 일어나지 않고 있는 것 같이 보이지만, 실제로는 두개의 빔은 주기적으로 완전히 그 위치를 교환하고 있음을 <그림 4(b)>에서 보여주고 있다. 이러한 사실은 실제의 실험에서는 검증할 수 없는 사항으로 본 시뮬레이션을 통하여 처음 밝혀낸 것이다. <그림 4(b)>는 한 개의 빔



<그림 4a> 초기 간격이 $25\lambda_c$ 떨어진 평행한 incoherent 빔의 간섭



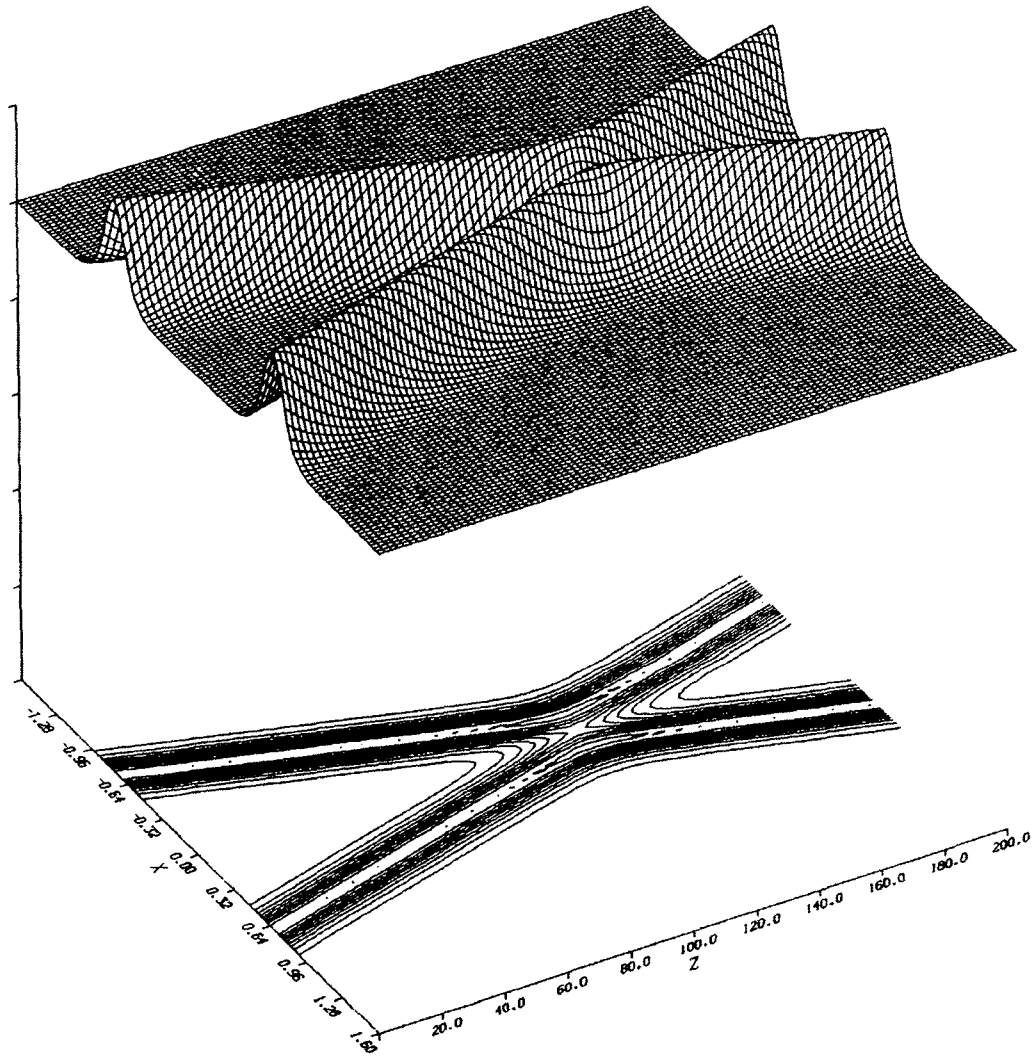
<그림 4(b)> <그림 5(a)>의 한 빔만을 모니터링

만을 모니터링한 그림이다. 또한 에너지 교환이 이루어지기 전에 빔이 휘어짐을 관찰할 수 있다.

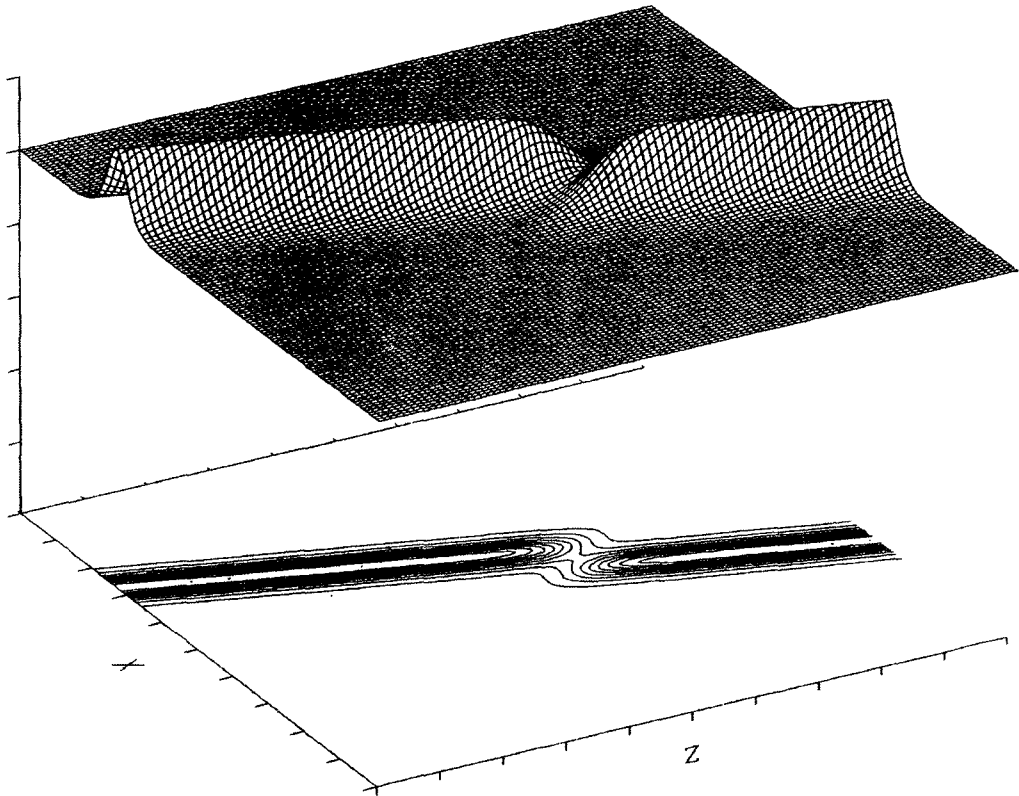
4.4 사각 충돌 incoherent 빔

다음은 2개의 빔이 $70\lambda_c$ 만큼 떨어져 0.01rad 의 각도로 사각 충돌한 것을 <그림

5(a)>와 한 쪽 빔만을 모니터링한 것을 <그림 5(b)>에서 나타내었다. <그림 5(a)>만을 살펴보면 마치 충돌 후 반사가 일어난 것으로 관찰되고 있으나 한쪽만 모니터링한 <그림 5(b)>를 살펴보면 비주기성 커플모드(coupled-mode) 형태의 에너지 전환이 일어났음을 보여주고 있다. 그 결과 한 개의 빔은 다른 빔을 완전히 통과하여 지나감을 보여주고 있다.



<그림 5a> 초기간격이 $70\lambda_c$ 이고 각도 0.01rad 으로 충돌한 두 비결맞음(incoherent) 빔



<그림 5(b)> <그림 5(a)>의 한 빔만을 모니터링

5. 결론

클라인 골든(Klein Gordon) 방정식을 이용하여 단독 빔(solitary beam)의 충돌에 관하여 연구하였다. 위 방정식은 적당한 가정과 요소의 변화를 통해 2차원 빔의 진행 또는 1차원 펄스의 진행을 동시에 표현할 수 있다. 본 논문에서는 2-d 빔과 1-d 펄스의 행동은 동일한 식에 의해 표현될 수 있음을 이론적으로 유도하였다. 또한 2차원 빔에 관한 실험 결과는 바로 1차원 펄스에 관한 실험으로 간주되어 해석할 수 있음을 시뮬레이션을 통해 확인하였다. 우선 실험의 신뢰성을 위해 진폭이 $3a_0$ 인 고차 솔리톤 빔의 변화를 관찰하였다. 그

결과 이미 밝혀진 고차 솔리톤 펄스와의 행동이 동일하다는 것을 확인하였다. 다음, 위상차가 있는 두 빔의 충돌을 각도에 따라 분석하였다. 위상이 다른 빔은 서로 반사하고 충돌각도가 크지 않은 위상이 같은 빔은 주기적으로 교차진행 한다는 것을 보여주었다. 이는 골든(Gordon)이 주장하였던 솔리톤의 행동과 잘 일치되었다.

비결맞음(Incoherent)한 빔의 시뮬레이션 결과, 평행한 빔의 경우 두개의 빔은 서로 주기적인 인력과 함께 완전한 충돌은 일어나지 않고 있는 것 같이 보이지만, 실제로는 두개의 빔은 주기적으로 완전히 그 위치를 교환하고 있음을 밝혔다. 또한 에너지 교환이 이루어지

기 전에 빔이 휘어짐을 관찰할 수 있어 빔 회전의 가능성을 예견할 수 있어 차후의 연구해결 필요를 가지고 있다. 또 비결맞음(incoherent) 빔 간의 충돌에 있어서는 마치 충돌후 반사가 일어난 것으로 관찰되고 있으나 한쪽만 모니터한 결과를 살펴보면 비주기성 커플모드(coupled-mode) 형태의 에너지 전환이 일어났음을 보여주고 있다. 그 결과 한개의 빔은 다른 빔을 완전히 통과하여 지나감을 보여주고 있다. 이러한 사실은, 일정 방향으로 진행되는 솔리톤은 외란에 대하여 진행방향과 모습을 유지하기 위해 보유한 솔리톤의 에너지를 서로 교환한다는 사실로 실제의 실험에서는 검증할 수 없는 사항으로 본 시뮬레이션을 통하여 처음 밝혀내었다.

참고문헌

- [1] J.A.C.Weideman and B.M.Herbst, SIAM J. Numer. Anal. 23, pp. 485, 1986
- [2] A.Korpel, K.E.Lonngren, P.P.Banerjee, H.K.Sim and M.R.Chatterjee, J.Opt.Soc.Am., 3, pp.885, 1986.
- [3] J.P.Gordon, Opt. Lett., 6, pp.596, 1983.
- [4] L.F.Molenauer and R.H.Stolen, Fiberoptic Technology, pp. 193, April 1982.
- [5] Stepken, A.; Kaiser, F.; Belic, M.R.; "Isotropic and anisotropic spiraling photorefractive solitons", Lasers and Electro-Optics Europe, 2000. Conference Digest. 2000 Conference on, 10-15 Sep 2000

● 저자소개 ●



심형관

1977 한양대학교 공과대학 전자공학과 학사

1977~1982 ADD 연구원

1987 University of Iowa EC&E Ph.D

1987~1988 University of Iowa EC&E Post doc.

1988~1992 포항 R.I.S.T 책임연구원

1992~현재 청주대학교 이공대학 정부통신공학부 부교수

관심분야: 광섬유통신, 솔리톤,