

슬라이딩 모드를 이용한 상태공간 H_∞ 제어기에 관한 연구

A Study on State Space H_∞ Controller Using Sliding Mode

김민찬*, 박승규, 안호균
(Min-Chan Kim, Seung-Kyu Park, and Ho-Gyun Ahn)

Abstract : H_∞ control has been applied to the design of practical control systems widely because of its robustness. It can minimize H_∞ norm of the transfer function between the desired output and the disturbances. The SMC(Sliding Mode Control) is more robust and give the better performance than the H_∞ control if the matching condition is satisfied. A controller which can have the advantages of H_∞ control and the SMC is proposed to add the robustness of the SMC to the H_∞ controller. Its design is based on the augmented system of which dynamics have one higher order than that of the original system and has the same dynamic as the desired system in spite of uncertainties. The dynamic of proposed sliding surface is the same dynamic as the system controlled by H_∞ controller without the uncertainties which satisfy the matching condition.

Keywords : sliding mode control, H_∞ control, matching condition

I. 서론

최근들어 시스템의 모델링시 비선형 요소의 영향을 줄이기 위한 선형화에서 오는 모델링 오차와 외부환경(온도, 압력)의 변화에 의해서 발생하는 시스템의 파라미터 불확실성 또는 외란이 존재하더라도 원하는 동특성을 얻을 수 있게 하기 위한 강인 제어(robust control)의 연구가 활발하다.

H_∞ 제어는 외란이나 잡음에 대하여 강인성을 가지고 있기 때문에 실제 제어 시스템의 설계에 광범위하게 응용되어 왔다. 이 제어의 핵심은 출력과 외란 사이에서 정의된 전달 함수의 H_∞ norms를 최소화하는 것이다. 그 중에서 상태공간 접근방법의 H_∞ 제어기 설계는 외란의 입력력을 전달함수로 표현한 다음 이 전달함수의 H_∞ norms를 최소화 할 수 있는 제어 입력을 구하는 것이다. [1][2] 하지만 파라미터 불확실성이 존재하면 강인한 H_∞ 제어기의 설계가 용이하지 않다. 그러므로 파라미터 불확실성을 가지는 시스템에 대하여 상태공간 H_∞ 설계기법[3]이 제안되고 있지만 불확실성의 크기에 따라 제어기의 성능에 차이가 나기 때문에 작은 불확실성을 가지고 설계가 가능한 H_∞ 제어기법이 요구되어진다.

반면 파라미터 불확실성이 존재하고 시스템의 정합조건을 만족하면 H_∞ 제어보다 더 강인한 성질을 가지고 있는 제어기법이 슬라이딩 모드 제어이다[4][5][6].

슬라이딩 모드 제어의 가장 두드러진 특징은 먼저 시스

템의 상태 공간에 시스템의 차수와 제어 입력 차수의 차에 의해 미리 정의된 슬라이딩 평면(sliding surface)을 설정하고 상태가 설정된 평면에 도달하도록 하고 입력의 고속 스위칭을 통해서 시스템의 상태를 슬라이딩 평면상에 머무르게 하여 평형점으로 수렴하게 하는 것으로 점근적인 시스템의 안정성을 보장할 수 있고 원하는 동특성을 얻을 수 있다. 하지만 상태의 초기값 에서부터 슬라이딩 모드가 일어나기 전까지를 도달기간이라고 하는데 이 기간 동안에는 강인성을 보장받을 수 없다. 그리고 슬라이딩 모드 제어의 동특성은 슬라이딩 평면에 의해서 결정되므로 공칭 시스템의 동특성과는 무관하며 전형적인 슬라이딩 모드 제어를 다른 제어이론에 결합하기란 쉬운 일이 아니다. 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 슬라이딩 모드의 확장으로 전 제어 구간의 응답에 대한 강인성을 부여하고 슬라이딩 평면이 공칭 시스템의 동특성을 갖게 적분 슬라이딩 모드가 Utkin에 의해서 제안되었다[7][8][9]. 이 방법은 공칭 시스템에 대해서 공칭 제어입력을 미리 결정하고 그 공칭 시스템의 응답 특성과 같은 동특성을 갖도록 슬라이딩 평면을 결정하는 것이다. 하지만 슬라이딩 평면이 0을 만족해야 한다는 조건에서 이론적인 보충이 선행되어야 하는 단점이 있다. 그러므로 본 논문에서는 Utkin의 연구와는 다른 가상 상태를 제안하여 슬라이딩 모드 제어의 강인성을 부가할 수 있고 시스템이 파라미터 불확실성을 만족하지 않을 때 정합조건을 만족하는 부분과 만족하지 않은 부분으로 나누어서 만족하는 부분은 제안된 슬라이딩 모드 제어기로 만족하지 않은 부분은 H_∞ 제어기를 설계하여 파라미터 불확실성에 대해서 정합조건을 만족하지 않는 부분에서 설계된 H_∞ 제어기와 동일한 성능을 가지는 H_∞ -SMC의 설계기법을 제안하였다.

제안된 가상 상태는 공칭 시스템의 가제어 표준형으로부터 정의되며 실제 시스템과 가상 상태로서 증가된 시스템

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 1. 30., 채택확정 : 2003. 7. 28.

김민찬, 박승규, 안호균 : 창원대학교 전기공학과

(kmc710@kebi.com/skpark@sarim.changwon.ac.kr/ahog@sarim.changwon.ac.kr)

※ 본 논문은 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계 기술연구센터에서 지원하여 연구하였음.

(augmented system)을 구성한다. 이로부터 공칭 시스템의 동특성과 같은 동특성을 가지는 슬라이딩 평면을 정의한다. 또한 도달기간도 가상 상태의 초기값을 적절하게 선정하면 제거된다. 본 논문에서는 가상 상태의 동특성에 필요한 입력으로 파라미터 불확실성을 가지는 상태 공간 접근방법의 H_∞ 제어가 사용되었고 제안된 슬라이딩 평면의 동특성은 H_∞ 제어기에 의해서 제어되는 동특성과 같다. 그러므로 시스템에 파라미터 불확실성이 존재할 때 H_∞ 제어기보다 정합 조건을 만족할 때 외란과 불확실성을 가진 시스템은 슬라이딩 모드 제어의 강인성을 가질 수 있고 정합 조건을 만족하지 않는 경우에도 제안된 H_∞ -SMC 제어기는 주어진 불확실성에 대하여 전형적인 H_∞ 제어기의 강인성을 가질 수 있는 향상된 H_∞ 설계가 가능하다.

II. 문제 설정

다음과 같은 파라미터 불확실성을 가지는 n차 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} Cx(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태, $u(t) \in R^m$ 은 제어 입력, $w(t) \in R^p$ 는 외란이며 $z(t) \in R^l$ 은 제어된 출력이다. 그리고 ΔA 는 norm-유계된 파라미터 불확실성이다.

어떠한 불확실성도 다음 식과 같이 정합조건을 만족하는 부분(ΔA_s)과 만족하지 않는 부분(ΔA_h)으로 나눌 수 있다.

$$\Delta A = \Delta A_s + \Delta A_h \tag{2}$$

(2)와 같은 불확실성으로 상태공간 H_∞ 제어기 설계시 ΔA_s 부분은 정합조건을 만족하기 때문에 이 부분을 슬라이딩 모드 제어를 설계하면 파라미터 불확실성의 영향을 없앨 수 있다. 또한 남은 ΔA_h 부분은 Ge[3]가 제시한 제어 기법을 사용하면 ΔA 를 가지고만 H_∞ 제어를 설계한 경우보다 시스템에 불확실성의 영향이 작아지므로 더욱 강한 H_∞ 제어기 설계가 가능해진다.

슬라이딩 모드 제어의 특징은 시스템의 파라미터나 입력이 변동할 때 그 영향을 받지 않는 불변성(invariant)을 가지고 있다는 것이다. 그러므로 norm 유계(norm bounded)를 가지는 불확실한 행렬 ΔA 와 외란 행렬 B_1 는 다음과 같은 정합조건이 만족된다면 슬라이딩 모드는 불변성을 유지할 수가 있다.

$$rank([\Delta A : B_1 : B_2]) = rank B_2 \tag{3}$$

III. 파라미터 불확실성을 가지는 시스템에 대한 상태공간 H_∞ 제어기의 설계

파라미터 불확실성을 가지는 상태공간 H_∞ 제어기를 설

계하기 위하여 (2)를 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$\Delta A = DFE \tag{4}$$

여기서 $D \in R^{n \times q}$ 이고 $F \in R^{q \times r}$ 는 $FF^T \leq \bar{F}$ 를 만족하며 $\bar{F} \in N^q$ 는 주어진 불확실성 경계이다. 그리고 N^q 는 음이 아닌 행렬이다.

모든 허용가능한 불확실성을 가진 (1)을 안정화하는 상태공간 H_∞ 제어 입력은 다음과 같이 설계된다.

$$u(t) = Kx(t) \tag{5}$$

(5)을 (1)에 대입하면 폐루프 시스템은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= \hat{C}x(t) \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $\hat{A} = A + B_2 K + \Delta A$, $\hat{C} = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}$ 이다.

또한 외란 $w(t)$ 에서 제어된 출력 $z(t)$ 까지의 폐루프 전달함수 $T_{zw}(s)$ 는 다음과 같다.

$$T_{zw}(s) = \hat{C}(SI - \hat{A})^{-1} B_1 \tag{7}$$

상태공간 H_∞ 제어기의 설계는 (7)에서 정의된 T_{zw} 의 H_∞ norm $\|T_{zw}\|_\infty$ 를 최소화하는 제어입력의 이득을 구하는 것이다.

만약 다음과 같은 식을 만족하는 대칭 양 한정 행렬 (symmetric positive-definite matrices) P 와 Q 가 존재하면

$$\hat{A}^T P + P \hat{A} + Q + \hat{C}^T \hat{C} + \frac{1}{Y^2} P B_1 B_1^T P < 0 \tag{8}$$

(6)의 폐루프 시스템은 안정하고 $T_{zw}(s)$ 는 $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq Y$ 를 만족한다.

결국 (3)에서와 같은 H_∞ 제어 입력은 다음과 같이 구해진다.

$$u(t) = Kx(t) = -B_2^T Sx(t) \tag{9}$$

(9)에서 S 는 다음식과 같이 주어지는 대수 리카치 방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} A^T S + SA + S \left[\frac{1}{Y^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T + 2\epsilon DD^T + D \bar{F} D^T \right] S \\ + \frac{1}{\epsilon} E_1^T \bar{F}^T E_1 + C^T C + Q + Q_1 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 ϵ 는 양의 값을 가지며 Q 와 Q_1 은 대칭 양 한정 행렬이다.

IV. H_∞ -SMC의 설계

만약 시스템에 파라미터 불확실성이 존재하면 강인한 H_∞ 제어기의 설계가 가능하지만 주어진 불확실성을 정합 조건을 만족하는 부분과 만족하지 않는 부분으로 나누게 되면 더 강한 H_∞ 제어기의 설계가 가능하다. 왜냐하면

본 논문에서는 정합조건을 만족하는 불확실성은 슬라이딩 모드 제어기로 그 영향을 제거하고 나머지 정합조건을 만족하지 않는 불확실성은 기존의 H_∞ 제어기로 그 영향을 최소화하면 처음에 주어진 파라미터 불확실성으로 설계된 H_∞ 제어기보다 성능이 우수해진다. 또한 제안된 H_∞ -SMC 제어기법은 기존의 SMC제어기법의 단점이었던 도달 거리를 제거함과 동시에 슬라이딩 평면의 동특성은 정합조건을 만족하지 않을 때에 설계된 H_∞ 제어기의 동특성과 같은 동특성을 가질 수 있다.

(1)은 다음과 같은 공칭 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + B_2u_o(x_o, t) \quad (11)$$

여기서, $u_o(x_o, t)$ 는 미분 가능한 공칭 제어 입력이다. 가상 상태(virtual state)를 정의하기 위하여 공칭 시스템을 상태변환 $z_o(t) = Px_o(t)$ 를 이용하여 다음과 같은 가제어 표준형(controllable canonical form)으로 변환할 수 있다.

$$\dot{z}_o(t) = A_0z_o(t) + B_0u_o(x_o, t) \quad (12)$$

여기서 $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 이며

$u_o(x_o, t)$ 는 (9)에서 주어진다.

공칭 가상 상태 z_{ov} 는 z_{on} 의 미분으로 정의되며 그 동특성은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ov}(t) &= -a_n z_{ov}(t) - \dots - a_2 z_{o2}(t) - a_1 z_{o2}(t) + \dot{u}_o(x_o, t) \\ &= -a_n z_{ov}(t) - C_0' z_o(t) + \dot{u}_o(x_o, t) \\ &= -a_n z_{ov}(t) - C_0' Px_o(t) + \dot{u}_o(x_o, t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, $C_0' = [0 \ a_{01} \ \dots \ a_{0n-1}]$ 이다.

(13)으로부터 가상 상태 z_v 는 공칭 상태 $z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}$ 를 어떠한 불확실성도 포함하지 않은 z_1, z_2, \dots, z_n 으로 대치함으로써 얻을 수가 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_v(t) &= -a_n z_v(t) - \dots - a_2 z_3(t) - a_1 z_2(t) + \dot{u}_o(x, t) \\ &= -a_n z_v(t) + C_0 Px(t) + \dot{u}_o(x, t) \\ &= -a_n z_v(t) + (C_0 P + L)x(t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, $C_0 = [0 \ -a_1 \ \dots \ -a_{n-1}]$ 이다.

또한 $\dot{u}_o(x, t)$ 는 $u_o(x, t)$ 를 미분해서 얻으려 한다면 x 를 미분하게 됨으로써 불확실성이 개입되기 때문에 반드시 $\dot{u}_o(x_o, t)$ 로부터 공칭 상태인 x_o 를 원래 상태인 x 로 대치함으로써 얻어야만 한다.

그러므로 (1)과 (14)에서 가상 상태를 포함하는 증가된 시스템(Augmented System)은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) + \Delta Ax(t) + \Delta B u(t) + B_1 w(t) \\ \dot{z}_v(t) &= -a_n z_v(t) - C_0 Px(t) + \dot{u}_o(x, t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $u(t)$ 는 슬라이딩 평면상에서 슬라이딩 모드를

보장하는 슬라이딩 모드 제어 입력이다.

본 논문에서 제안된 슬라이딩 평면을 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \sigma(z, t) &= z_v(t) + \alpha_n z_n(t) + \dots + \alpha_1 z_1(t) - u_o(x, t) = 0 \\ &= z_v(t) + C_1 z(t) - u_o(x, t) = 0 \\ &= z_v(t) + (C_1 P - K)x(t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, $C_1 = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$ 이며 슬라이딩 모드제어의 결점이었던 도달기간은 가상 상태의 초기값을 다음 식과 같이 선정하면 슬라이딩 평면의 초기값이 0이 되므로 도달기간은 제거된다.

$$\begin{aligned} z_v(t_0) &= -\alpha_n z_n(t_0) - \dots - \alpha_1 z_1(t_0) + u_o(x, t_0) \\ &= -C_1 z(t_0) + u_o(x, t_0) \end{aligned} \quad (17)$$

지금까지의 내용으로 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 : 만약 시스템 (15)의 상태들이 제안된 슬라이딩 평면상에 존재할 때 (1)과 같은 시스템의 상태들은 공칭 제어 입력에 의해서 제어되는 공칭 시스템 (11)과 같은 동특성을 갖는다. 그러므로 슬라이딩 평면은 공칭 시스템과 같은 동특성을 가지게 된다.

증명 : 만약 상태들 $z_1, z_2, \dots, z_n, z_v$ 가 슬라이딩 평면 위에 존재한다고 가정하면 (16)은 다음 방정식을 만족한다.

$$z_v(t) + \alpha_n z_n(t) + \dots + \alpha_1 z_1(t) - u_o(x, t) = 0 \quad (18)$$

공칭 시스템이 정합조건을 만족하기 때문에 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$z_2 = \dot{z}_1, z_3 = \dot{z}_2, \dots, z_n = \dot{z}_{n-1}$$

(18)을 미분하면 다음과 같은 방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_v(t) + \alpha_n \dot{z}_n(t) + \alpha_{n-1} \dot{z}_{n-1}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{z}_1(t) - \dot{u}_o(x, t) \\ = \dot{z}_v(t) + \alpha_n \dot{z}_n(t) + \alpha_{n-1} z_n(t) + \dots + \alpha_1 z_2(t) - \dot{u}_o(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

(19)에서 z_v 는 다음과 같은 동특성을 가진다.

$$\dot{z}_v(t) = -a_n z_v(t) - \dots - a_2 z_3(t) - a_1 z_2(t) + \dot{u}_o(x, t) \quad (20)$$

(19)과 (10)를 비교하면 다음 식이 성립됨을 알 수 있다.

$$z_v = \dot{z}_n \quad (21)$$

위의 식을 이용하면 (18)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{z}_n(t) = -a_n z_n(t) - \dots - a_2 z_2(t) - a_1 z_1(t) + u_o(x, t) \quad (22)$$

따라서 (18)과 (22)는 (12)과 같은 공칭 시스템의 가제어 표준형이며 이것은 변환 $x(t) = P^{-1}z(t)$ 를 이용하여 (11)와 같은 공칭 계통으로 변환할 수 있다. 그러므로 새로운 슬라이딩 모드 평면상에 있는 (1)의 상태들은 공칭 시스템의 상태들과 같은 동특성을 갖는다. ■

공칭 제어 입력 $u_o(x, t)$ 는 어떠한 제어입력의 형태라도 가능하기 때문에 본 절에서 제시한 슬라이딩 모드 제어가

다양한 형태의 제어기와 같이 연계하여 사용할 수 있다는 것을 의미한다. 일반적으로 슬라이딩 모드 제어에서는 상태공간이 슬라이딩 평면 쪽으로 이동해서 슬라이딩 모드가 일어나게 하는 조건을 도달조건(reaching condition)이라고 하는데 다음과 같은 Lyapunov함수의 후보함수를

$$V(x, t) = \frac{1}{2} \sigma(x)^2 \quad (23)$$

고려하면 슬라이딩 모드를 보장하는 도달조건을 구할 수 있다.

$$\dot{V}(x, t) < 0, \sigma \neq 0 \Rightarrow \sigma(x) \dot{\sigma}(x) < 0 \quad (24)$$

그러므로 (23)는 $\sigma(x)$ 에 의해서 정의되는 평면상에서 불연속이 일어나는 다음 식과 같은 궤환 입력 $u^+(x, t)$, $u^-(x, t)$ 에 의해서 만족될 수 있다.

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t), & \text{for } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x, t), & \text{for } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (25)$$

(24)과 같은 슬라이딩 모드가 일어나게 하는 조건을 만족하는 슬라이딩 모드 제어 입력을 구하기 위하여 (16)에서 정의된 슬라이딩 평면의 도함수를 구하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(z, t) &= \dot{z}_v(t) + (C_1 P - K) \dot{x}(t) \\ &= -\alpha_n z_v(t) + (C_0 P + L)x(t) \\ &\quad + (C_1 P - K)(Ax(t) + \Delta Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 u(t)) \\ &= -\alpha_n z_v(t) + (C_0 P + L)x(t) + (C_1 P - K)Ax(t) \\ &\quad + (C_1 P - K)\Delta Ax(t) + (C_1 P - K)B_1 u(t) \\ &\quad + (C_1 P - K)B_2 u(t) \end{aligned} \quad (26)$$

그러므로 슬라이딩 모드 제어 입력 $u(t)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$u(t) = u_{eq}(t) + \Delta u(t) \quad (27)$$

여기서 $u_{eq}(t) = [(C_1 P - K)B_2]^{-1} \cdot (\alpha_n z_v(t) - (C_0 P + L + C_1 P A - K A)x(t))$ 는 $\dot{\sigma}(x) = 0$ 를 만족하는 등가 제어입력이며 $\Delta u(t) = [(C_1 P - K)B_2]^{-1} \cdot (-((C_1 P - K)\Delta A_{max} |x(t)| + B_1 W_{max}) \cdot \text{sgn}(\sigma))$ 는 (24)의 조건을 만족하게 하는 불연속 제어 입력이다. 그리고 $[(C_1 P - K)B_2]^{-1}$ 는 정칙 행렬(nonsingular matrix)이다.

이상의 내용으로 본 논문에서 제안된 공칭 제어입력의 동특성을 갖는 슬라이딩 모드제어를 위한 과정은 다음 그림과 같다.

V. 컴퓨터 시뮬레이션

본 논문에서 제시한 슬라이딩 모드를 이용한 H_∞ 제어기의 우수성을 입증하기 위하여 다음과 같은 시스템을 고려하여 컴퓨터 시뮬레이션을 시행하였다.

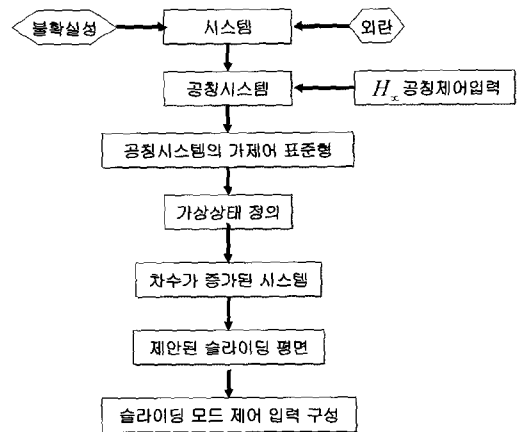


그림 1. 제안된 슬라이딩 모드 제어의 절차.

Fig. 1. Procedure of proposed sliding mode control.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1] \\ Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad Y = 1, \quad \varepsilon = 1 \end{aligned} \quad (28)$$

정합 조건을 만족하지 않는 파라미터 불확실성은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta A = \Delta A_s + \Delta A_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서 불확실성 ΔA_s 는 본 논문에서 제안된 슬라이딩 모드 제어기로 그 영향을 없애고 불확실성 ΔA 와 ΔA_h 는 (5)와 동일한 H_∞ 제어 입력의 형태를 가져야 한다.

그러므로 불확실성을 (4)와 같은 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\Delta A = DFE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\Delta A_h = DFE_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

주어진 시스템에 대하여 (30)의 불확실성으로 H_∞ 제어를 설계하는 것보다는 (31)의 불확실성으로 제어를 설계하는 것이 불확실성의 크기가 작기 때문에 설계된 제어기의 성능은 더 우수하다.

위의 두 불확실성의 조건으로 설계된 H_∞ 제어기는 다음과 같다.

$$u(t) = Kx(t) = [0.0018 \quad -0.3662] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$u_h(t) = K_h x(t) = [0.0283 \quad -0.3472] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

또한 제어기의 강인성을 검증하기 위하여 다음과 같은 외란을 시스템에 인가한다.

$$w_{max} = 1, \quad w(t) = 0.2 \sin 20t \quad (34)$$

제안된 슬라이딩 평면을 구성하기 위한 가상상태는 다음 식에서 얻어진다.

$$\dot{z}_i(t) = -3z_i(t) - [0 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \dot{u}_o(t) \quad (35)$$

그리고 가상 상태를 포함하는 슬라이딩 평면은 다음 식과 같이 정의된다.

$$\alpha(z, t) = z_i(t) + [2 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - u_o(t) = 0 \quad (36)$$

그러므로 슬라이딩 모드 제어 입력은 다음 식과 같이 결정된다.

$$u(t) = 0.2988((3z_i(t) - [-6.0098 \quad -8.8795] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix})) - ([2.0083 \quad 1.3389] \begin{bmatrix} |x_1(t)| \\ |x_2(t)| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})sgn(\sigma) \quad (37)$$

다음의 그림들은 (34)와 같은 외란이 인가된 컴퓨터 시뮬레이션에 대한 결과이다. 그림 1은 공칭 시스템과 파라미터 불확실성이 존재할 때, 불확실성 ΔA , ΔA_b 로 설계된 H_∞ 제어기의 상태궤적을 비교하였다. 그림에서 보듯이 불확실성 ΔA 에서 보다는 불확실성의 크기가 작아진 불확실성 ΔA_b 로 설계된 H_∞ 제어기의 성능이 더 우수함을 알 수 있다. 그림 2는 불확실성 ΔA 를 가지고 설계된, 본 논문에서 제안된 슬라이딩 모드 제어의 상태궤적이다. 결과에서 보듯이 그림 1의 ΔA_b 의 상태궤적과 거의 동일한 궤적을 가짐을 알 수 있다. 그러므로 불확실성 ΔA_b 는 제안된 슬라이딩 모드 제어에 의해서 그 영향이 제거되었음을 알 수 있다. 또한 제안된 가상 상태의 궤적이 그림 3에 나타나 있다. 그림 4는 제안된 제어 기법의 슬라이딩 평면으로 가상 상태의 초기값을 적절히 선정함으로써 도달 거리가 제거되었음을 알 수 있다. 그림 5는 제안된 슬라이딩 모드 제어기의 불연속적인 제어 입력이다.

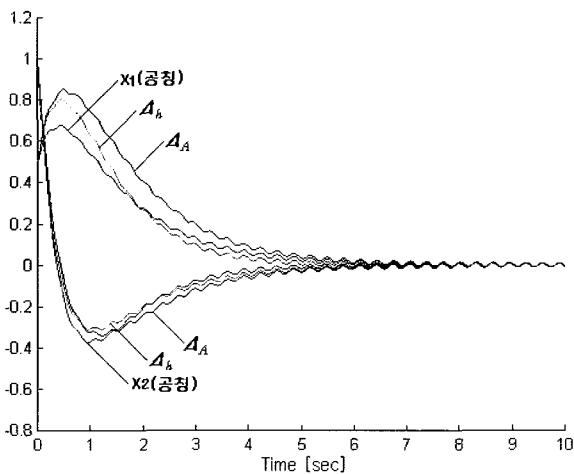


그림 2. 외란과 불확실성이 존재하지 않는 경우 H_∞ 제어기의 상태궤적.

Fig. 2. State trajectories of H_∞ controller with disturbance and parameter uncertainty.

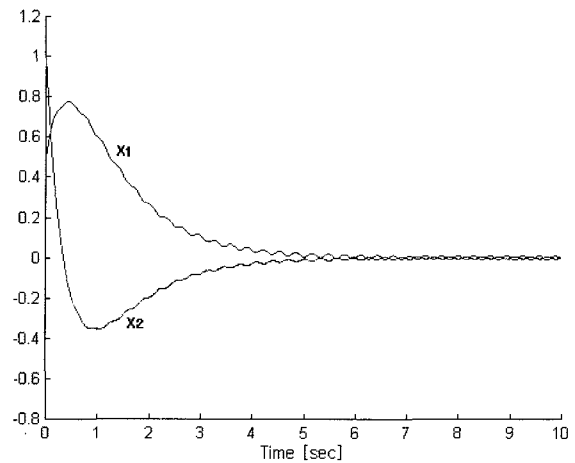


그림 3. 외란과 불확실성이 존재하는 경우 제안된 슬라이딩 모드 제어의 상태궤적.

Fig. 3. State trajectories of proposed sliding mode control with disturbance and parameter uncertainty.

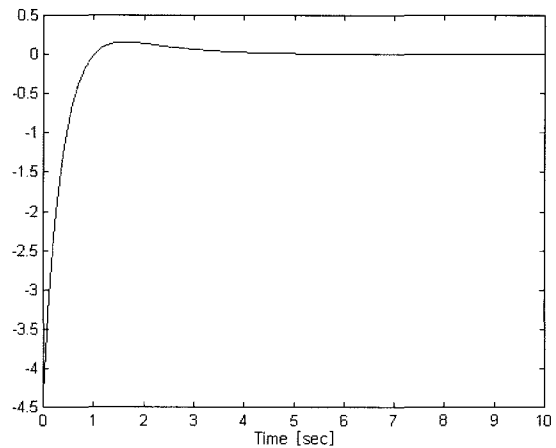


그림 4. 제안된 슬라이딩 모드 제어의 가상상태 z_v .

Fig. 4. The virtual state z_v of proposed sliding mode control.

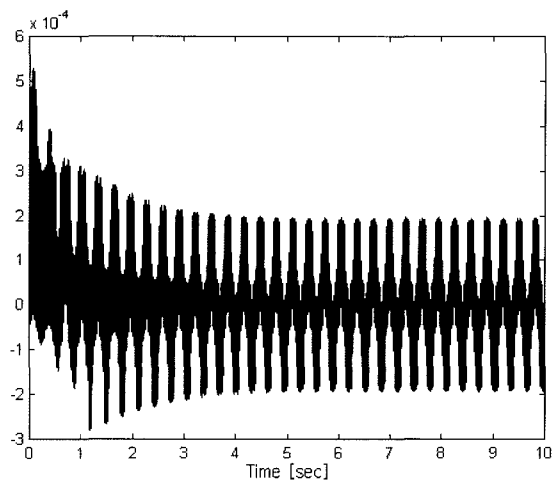


그림 5. 제안된 슬라이딩모드 제어의 슬라이딩 평면.

Fig. 5. Sliding surface of proposed sliding mode control.

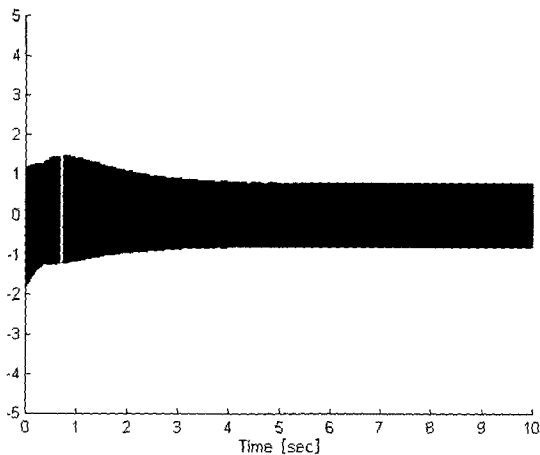


그림 6. 제안된 슬라이딩 모드 제어의 제어 입력.

Fig. 6. Control Input of proposed sliding mode control.

VI. 결론

H_∞ 제어는 결정된 불확실성에 대해서 시스템을 내부적으로 안정화하고 H_∞ 노름을 최소화시키는 강인 제어기법이다. 또한 외란과 출력사이에 대한 전달함수의 H_∞ 노름을 최소화하기 위해 리카티 방정식의 해를 구하여 제어기의 이득을 결정하는 것이 상태 공간 접근방식의 H_∞ 제어기 설계기법이다. 하지만 시스템의 파라미터가 불확실하다면 강인성을 가진 H_∞ 제어기의 좋은 응답특성을 갖기는 어렵다. 그러므로 파라미터 불확실성이 존재하는 계통에 대한 H_∞ 제어기가 설계되고 있지만 불확실성의 크기에 따라 성능 면에서 차이를 보이며 불확실성이 작을수록 그에 대해 설계되는 제어기의 성능이 우수하다. 그러므로 본 논문에서는 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 정합조건을 만족하는 부분과 만족하지 않는 부분으로 나누어서 정합조건을 만족하는 부분은 슬라이딩 모드 제어기로 시스템에 대한 영향을 제거하고 만족하지 않는 부분에 대해서는 상태공간 H_∞ 제어기로 처리함으로써 그 영향을 최소화하는 H_∞ -SMC 제어 기법을 제안하였다. 제안된 슬라이딩 평면은 시스템에 주어진 파라미터 불확실성에서 정합조건을 만족하지 않는 불확실성으로 설계된 H_∞ 제어기에 의해서 제어되는 시스템의 동특성과 같은 동특성을 가지며 가상 상태의 초기값을 적절하게 선정함으로써 슬라이딩 모드 제어의 단점이었던 도달 시간도 제거하였다. 그리고 제안된 슬

라이딩 평면의 제어 입력을 H_∞ 제어기를 사용함으로써 슬라이딩 모드 제어가 다른 제어기법과도 연계될 수 있다는 것을 보였다. 마지막으로 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 본 논문에서 제시한 제어기법의 우수함을 입증하였다.

참고문헌

- [1] J. C. Doyle, K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, "Mixed H_∞ and H_2 performance objective II : Optimal control", *IEEE Trans. of Automatic Control*, AC-39, no.8, pp. 1575- 1587, 1994.
- [2] D. S. Bernstein, W. M. Haddard, "LQG Control with an H_∞ Performance Bound : A Riccati Equation Approach", *IEEE Trans. of Automatic Control*, AC-34, pp 293-305, 1989.
- [3] J. H. Ge, P. M. Frank and C. F. Lin, "Robust H_∞ State Feedback Control for Linear Systems with State Delay and Parameter Uncertainty", *Automatica*, vol.32, no.8, pp. 1183-1185, 1996.
- [4] U. Itkis, Control systems of variable structure, JOHN WILLY & SONS, New York, 1976.
- [5] V. I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes", *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol.22, no.2, pp. 212-222, 1977.
- [6] V. I. Utkin, *Sliding modes and their application in variable structure systems*, Moscow, Mir Publishers, 1978.
- [7] J. Ackermann and V. I. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackermann formula", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando FL, pp. 3622-3627, 1994.
- [8] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag, London, 1992.
- [9] V. I. Utkin and J. Shi, "Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 4591-4696, 1996.
- [10] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996.



김민찬

1971년 7월 13일 출생. 1996년 창원대학교 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1998), 동대학 박사(2003). 관심분야는 H_∞ 제어, 슬라이딩 모드 제어 및 응용.

박승규

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 5 권 제 5호 참조

안호균

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 5 권 제 5호 참조