불확실성이 매칭조건을 만족시키지 않는 선형 시스템을 위한 슬라이딩 평면 설계 방법

A Linear Sliding Surface Design Method for a Class of Uncertain Systems with Mismatched Uncertainties

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract : We propose a sliding surface design method for linear systems with mismatched uncertainties in the state space model. In terms of LMIs, we derive a necessary and sufficient condition for the existence of a linear sliding surface such that the reduced-order equivalent sliding mode dynamics restricted to the linear sliding surface is not only stable but completely invariant to mismatched uncertainties. We give an explicit formula of all such linear switching surfaces in terms of solution matrices to the LMI existence condition. We also give a switching feedback control law, together with a design algorithm. Additionally, we give some hints for designing linear switching surfaces guaranteeing pole clustering constraints or linear quadratic performance bound constraints. Finally, we give a design example in order to show the effectiveness of the proposed methodology.

Keywords : linear matrix inequality(LMI), variable structure system, sliding surface, uncertain system, matching condition

I. 서론

현재까지 많은 연구자들에 의하여 불확실성을 갖는 시스템의 안정화를 위한 상태 궤환 제어 방법들이 연구되어 왔다. 그리고 여러 다양한 슬라이딩 모드 제어 알고리즘이 연구되어 왔다. 슬라이딩 모드 제어 시스템에서는 원하는 시스템 응답을 얻기 위해 고속의 스위칭 궤환 제어기를 사용하여 일부러 제어기 구조를 변경시킨다. 스위칭 궤환 제어기를 사용하여 시스템 궤적이 미리 설정한 슬라이딩 평면 혹은 스위칭 평면으로 향하게 한다. 슬라이딩 모드 제어기의 주요 특성은 이른바 스위칭 평면에서 일어나는 슬라이딩 모드라는 것이다. 슬라이딩 모드에서 시스템 응답은 외란에 전혀 영향을 받지 않고 미리 설정된 응답에 따라 시스템 궤적이 움직인다. 그러므로 스위칭 평면상에서의 슬라이딩 모드의 존재와 적절한 스위칭 평면 설계는 슬라이딩 모드 제어기 설계에서의 중요한 문제로 많은 연구자들에 의해 연구되어 왔다. m개의 입력과 n개의 상태를 갖는 선형 시스템이 만약 제어 가능하다면 슬라이딩모드에서 m개의 상태변수는 $(n-m)$개의 상태변수를 사용하여 나타낼 수 있고 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학(reduced-order equivalent sliding mode dynamics)의 극점을 임의의 위치에 배치시킬 수 있음을 이용하여 스위칭 평면을 설계하는 방법이 여러 가지 제안되었다[1-4]. 그러나 이전의 설계 방법들은 불확실성의 매칭 조건을 요구하기 때문에 슬라이딩 모드 제어 접근법의 응용범위를 제한하였다. 그리고 기존의 설계방법을 사용하여 매칭조건을 만족시키지 않는 시스템의 안정화를 이루는 문제를 해결하기는 쉽지 않다. 그러한 문제는 슬라이딩 모드 제어 접근법에서는 매우 어렵고 완전히 풀리지 않은 문제이다. 최근에 이러한 사실들을 고려하여 매칭조건을 만족시키지 않는 시스템을 위한 슬라이딩 평면 설계방법이 제안되었다[5-14]. 그러나 이러한 설계 방법들 역시 축차 동역학이 매칭 조건을 만족시키지 않는 불확실성에 전혀 영향 받지 않는 것을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 필요충분조건을 제시하지는 못했다.

본 논문에서는 매칭조건을 만족시키지 않는 불확실성을 상태 공간 모델에 포함하는 선형 시스템을 위하여 선형 슬라이딩 평면을 설계하는 방법을 제안한다. II장에서 우리가 다룰 시스템과 문제를 기술한다. 우리는 시스템의 비선형성이나 입력 행렬의 불확실성은 매칭조건을 만족하는 반면 상태 공간 모델의 불확실성은 매칭조건을 만족시키지 않는다고 가정한다. III장에서 우리는 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학이 안정하며 매칭 조건을 만족시키지 않는 불확실성에 전혀 영향 받지 않는 것을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 새로운 불변조건(invariance condition)을 LMI 형태로 구한다. 주어진 LMI 조건은 필요충분조건으로 기존의 결과에서는 제시되지 않았음에 유의해야 한다. 선형 슬라이딩 평면을 위한 공식을 주어진 LMI 형태의 존재조건의 해를 이용하여 제시한다. 주어진 LMI 존재 조건들은 기존의 LMI 기반 설계 방법[5-12]들과 같이 해결 가능한지 여부를 LMI Control Toolbox[15]와 같은 매우 효율적인 convex 최적화 기법을 통해 확인하여 해를 쉽게 구할 수 있으므로 제안된 방법은 높은 차수의 대규모 시스템의 경우에도 응용 가능하며 매칭 조건을 요구하지 않는다. IV장에서는 제안된 방법의 유효성을 보이기 위해 설계 예를 보인다.

II. 문제 설정

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2003. 4. 22., 채택확정 : 2003. 7. 29.
최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)
※ 본 연구는 2003년도 동국대학교 논문게재연구비 지원으로 이루어졌음.

다음과 같은 동역학 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(x,t)]x(t)+f(x,t)+[B+\Delta B(x,t)]u(t)$$

여기에서 $x\in R^n$은 상태변수, $u\in R^m$은 입력을 나타낸다. 그리고 $\Delta A(x,t)$, $f(x,t)$, $\Delta B(x,t)$는 각각 시스템 특성행렬의 불확실성, 시스템의 비선형성, 입력행렬의 불확실성을 나타낸다. A와 B는 적절한 차원을 갖는 시불변 행렬들이다.

우리는 다음을 가정할 것이다.

A1 : (A, B)는 안정 가능하다.

A2 : 입력행렬 B는 rank가 m으로 full rank이다.

A3 : 상태변수 x 모두 이용 가능하다.

A4 : $\Delta A(x,t)$, $f(x,t)$, $\Delta B(x,t)$는 x, t에 대하여 연속이다.

A5 : $\Delta A(x,t)$는 $DF(x,t)E$의 형태로 $F(x,t)$는 알려져 있지 않으나 D, E는 알고 있다고 가정한다.

A6 : $f(x,t)=Bh(x,t)$, $\Delta B(x,t)=BG(x,t)$를 만족시키는 함수 $h(x,t)$, $G(x,t)$가 존재한다.

위의 가정들을 이용하여 우리는 위의 시스템을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\dot{x}(t)=[A+DF(x,t)E]x(t)+B[u(t)+\eta(x,u,t)] \quad (1)$$

여기에서 $\eta(x,u,t)=h(x,t)+G(x,t)u(t)$이다.

A7 : $\|F(x,t)\|\le\delta$를 만족시키는 δ가 알려져 있다.

A8 : $\|G(x,t)\|\le\psi<1$를 만족시키는 ψ가 알려져 있다.

A9 : $\|h(x,t)\|\le\rho(x,t)$를 만족시키는 함수 스칼라 양함수 $\rho(x,t)$가 알려져 있다.

위의 가정에서 $\Delta A(x,t)x(t)$는 [1-4]에서 고려된 시스템들과 달리 매칭조건을 만족시킬 것을 요구받지 않았음을 주목해야 한다. 스위칭 평면의 설계에 있어 A7-9는 필요하지 않고 다만 스위칭 궤환 제어입력의 설계에 필요함을 주목해야 한다.

다음과 같이 스위칭 평면을 정의하자.

$$\Omega=\{x:\ Sx=0\}$$

여기에서 $S\in R^{m\times n}$으로 rank가 m이다. 이전의 결과들로부터 우리는 스위칭 평면이 다음과 같은 성질들을 만족시켜야 함을 알 수 있다.

P1 : SB가 비특이 행렬(nonsingular matrix)이다.

P2 : $(n-m)$차의 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학이 광역적으로 안정하다.

우리는 여기에서 $(n-m)$차의 슬라이딩 모드 동역학이 제어입력과 무관하기 위해서는 SB가 비특이 행렬이 되어야하며 그리고 성질 P1은 유일한 등가입력의 존재를 위해서 필요함을 알아야 한다[2-4]. 그리고 만약 $DF(x,t)E$가 매칭조건을 만족시키지 않는다면 성질 P1-2를 만족시키는 모든 S가 다음과 같은 불변 성질을 만족시키지는 않는다는 것을 유념해야 한다.

P3 : 축차 동역학이 $\|F(x,t)\|\le 1$를 만족시키는 임의의 불확실성에 대하여 독립적이다.

또한 [1-6]에 주어진 이전의 결과들을 사용하여 성질P1-3를 항상 보장하는 S를 설계하는데 직접 적용하기 힘들다는 사실을 알아야 한다.

결국 우리의 문제는 시스템 (1)에 대하여 성질P1-3를 항상 보장하는 슬라이딩 평면 행렬 S가 존재할 조건을 구하고 S를 설계하는 효율적인 방법을 제시하는 것이라 할 수 있다.

다음에 주어지는 보조정리들은 주요 결과를 도출하는 데 필수적인 것들이다.

보조정리 1[16] : 주어진 하나의 행렬 N과 두 개의 대칭행렬 Q와 R에 대하여 다음의 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ * & R \end{bmatrix} > 0$$

여기에서 $*$는 대칭성에 의해서 쉽게 유추될 수 있는 행렬 블록을 의미한다. 위의 LMI가 성립할 필요충분조건은 다음 중 하나이다.

1) $R>0,\quad Q-NR^{-1}N^T>0$

2) $Q>0,\quad R-N^TQ^{-1}N>0$

보조정리 2[17] : 주어진 두 개의 행렬 Q와 R에 대하여 행렬합 $Q+R$이 정의된다면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{rank}(Q+R)\le\mathrm{rank}(Q)+\mathrm{rank}(R)$$

만약 행렬곱 QR이 정의된다면 다음의 부등식이 항상 성립한다.

$$\mathrm{rank}(QR)\le\min(\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B))$$

보조정리 3[16] : 다음 행렬 부등식을 고려해보자.

$$Q-\gamma RR^T<0$$

여기에서 Q, R 적절한 차원을 갖는 행렬이고 γ는 scalar이다. $\widetilde{R}$을 R^T의 널공간(null space)을 이루는 기저벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬, 즉 R의 Orthogonal complement라고 하면 위의 부등식은 다음과 동치이다.

$$\widetilde{R}^TQ\widetilde{R}<0$$

III. 선형 슬라이딩 평면의 존재 조건

주 결과를 논술하기 전에 다음과 같은 $n\times n$ 대칭행렬 Γ를 정의하자.

$$\Gamma=\begin{cases} I & \widetilde{B}^TD=0 \\ I-E^gE & \widetilde{B}^TD\neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

여기에서 E^g는 E의 Moore-Penrose 역행렬이고 $\widetilde{B}\in R^{n\times(n-m)}$는 B^T의 널공간(null space)을 이루는 기저벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬, 즉 B의 Orthogonal complement이다. 여기에서 우리는 앞선 결과 [17]로부터 (E_L, E_R)을 행렬 E의 full rank factor라고 할 때

$E=E_LE_R$이고 $E_L^TE_L$과 $E_RE_R^T$는 full rank를 갖고 각각 역행렬이 존재하고 E의 Moore-Penrose 역행렬은 $E^g=E_R^T(E_RE_R^T)^{-1}(E_L^TE_L)^{-1}E_L^T$로 주어짐을 명심해야 한다.

정리 1 : 시스템 (1)을 고려해보자. 성질 P1-3를 만족시키는 선형 슬라이딩평면 행렬 S가 존재할 필요충분 조건은 아래의 LMI식 (3)를 만족시키는 해 (X, Y)가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned}&\Gamma X\Gamma+BYB^T>0, \quad \hat{B}^T(A\Gamma X\Gamma+\Gamma X\Gamma A^T)\hat{B}<0,\\ &X=X^T, \quad Y=Y^T\end{aligned} \tag{3}$$

증 명 : (<=) (3)의 해가 존재한다고 가정하자. 그러면 우리는 (3)의 해 (X, Y)쌍을 이용해서 슬라이딩 평면행렬 S가 다음에 의해 주어진다고 할 수 있다.

$$S=B^T(\Gamma X\Gamma+BYB^T)^{-1} \tag{4}$$

그러면 SB는 비특이 행렬이 되어 성질 P1이 만족됨을 알 수 있고 우리는 비특이 변환 행렬 M과 이와 연관된 상태변수 z를 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$M=\begin{bmatrix}\widehat{B}^T\\ B^TP^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{B}^T\\ S\end{bmatrix}, \quad z=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=Mx \tag{5}$$

여기에서 $z_1\in R^{(n-m)}$, $z_2\in R^m$, $P=\Gamma X\Gamma+BYB^T$ 이다. 우리는 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$z_2=\sigma, \quad M^{-1}=[P\hat{B}(\widehat{B}^TP\hat{B})^{-1} \quad B(SB)^{-1}]\in R^{n\times n}$$

(5)를 이용하면 시스템 (1)을 다음과 같은 regular형태로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{\sigma}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\widehat{A_{11}}(t) & \widehat{A_{12}}(t)\\ \widehat{A_{21}}(t) & \widehat{A_{22}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ \sigma\end{bmatrix}\\ &\quad+\begin{bmatrix}0\\ SB\end{bmatrix}[u+\eta(x,u,t)]\\ \widehat{A_{11}}(t)&=\widehat{B}^T[A+DF(x,t)E]P\hat{B}(\widehat{B}^TP\hat{B})^{-1}\\ \widehat{A_{21}}(t)&=S[A+DF(x,t)E]P\hat{B}(\widehat{B}^TP\hat{B})^{-1}\\ \widehat{A_{12}}(t)&=\widehat{B}^T[A+DF(x,t)E]B(SB)^{-1}\\ \widehat{A_{22}}(t)&=S[A+DF(x,t)E]B(SB)^{-1}\end{aligned} \tag{6}$$

위로부터 만약 $\sigma=\dot{\sigma}=0$이 성립하면 시스템 동역학이 다음의 $(n-m)$차의 동역학으로 축소됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \hat{B}^TAP\hat{B}(\hat{B}^TP\hat{B})^{-1}z_1\\ &\quad+\hat{B}^TDF(x,t)EP\hat{B}(\hat{B}^TP\hat{B})^{-1}z_1,\\ z_1&=\hat{B}^Tx\end{aligned} \tag{7}$$

즉 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학이 (7)과 같이 주어진다. 만약 $\hat{B}^TD=0$이고 LMI (3)이 해가 존재하면 다음이 성립한다.

$$\Gamma=I, P=X+BYB^T>0, \ \hat{B}^TP\hat{B}=\hat{B}^TX\hat{B}>0 \tag{8}$$

그리고 슬라이딩 모드 동역학 (7)은 다음의 시불변 시스템으로 된다.

$$\dot{z}_1=\hat{B}^TAX\hat{B}(\hat{B}^TX\hat{B})^{-1}z_1, \quad z_1=\hat{B}^Tx \tag{9}$$

위의 시불변 시스템은 만약 다음 Lyapunov 행렬식을 만족시키는 양한정행렬 P_0가 존재하면 안정하다.

$$P_0(\hat{B}^TX\hat{B})^{-1}\hat{B}^TXA^T\hat{B}+*<0 \tag{10}$$

LMI식 (3)과 (8)은 $P_0=\hat{B}^TX\hat{B}>0$가 위의 Lyapunov 행렬식 (10)의 해가 될 수 있음을 의미한다. 한편 $\hat{B}^TD\neq0$이고 LMI식 (3)이 해를 갖게 될 경우에는 다음의 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}&\Gamma=I-E^gE, \quad P=(I-E^gE)X(I-E^gE)+BYB^T>0,\\ &\hat{B}^TP\hat{B}=\hat{B}^T(I-E^gE)X(I-E^gE)\hat{B}>0,\\ &EP\hat{B}=E[(I-E^gE)X(I-E^gE)+BYB^T]\hat{B}=0\end{aligned} \tag{11}$$

그리고 스위칭 평면 $Sx=0$에 구속된 $(n-m)$차의 축차 등가 슬라이딩 모드동역학이 다음과 같은 시불변 시스템으로 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{z}_1=\hat{B}^TA\Gamma X\Gamma\hat{B}[\hat{B}^T\Gamma X\Gamma\hat{B}]^{-1}z_1, z_1=\hat{B}^Tx \tag{12}$$

위의 시스템은 다음 Lyapunov 행렬식을 만족시키는 양한정행렬 P_1가 존재하면 안정하다.

$$P_1[\hat{B}^T\Gamma X\Gamma\hat{B}]^{-1}\hat{B}^T\Gamma X\Gamma A^T\hat{B}+*<0 \tag{13}$$

LMI식 (3)과 (11)은 아래의 행렬 P_1이 위의 Lyapunov 행렬식 (13)의 해가 될 수 있음을 의미한다.

$$P_1=\hat{B}^T(I-E^gE)X(I-E^gE)\hat{B}>0$$

(=>) 역행렬이 존재하는 변환행렬 W와 이에 대응하는 벡터 $v=Wx$를 다음과 같이 정의하자.

$$W=\begin{bmatrix}\hat{B}^T\\ (B^TB)^{-1}B^T\end{bmatrix}, \quad v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=Wx$$

그러면 우리는 $W^{-1}=[\hat{B}(\hat{B}^T\hat{B})^{-1}, B]$가 성립하고 시스템 (1)을 다음과 같은 regular형태로 바꿀 수 있다.

$$\dot{v}=\begin{bmatrix}\overline{A_{11}}(t) & \overline{A_{12}}(t)\\ \overline{A_{21}}(t) & \overline{A_{22}}(t)\end{bmatrix}v+\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}[u+\eta(x,u,t)] \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\overline{A_{11}}(t)&=\hat{B}^T[A+DF(x,t)E]\hat{B}(\widehat{B}^T\hat{B})^{-1}\\ \overline{A_{21}}(t)&=(B^TB)^{-1}B^T[A+DF(x,t)E]\hat{B}(\widehat{B}^T\hat{B})^{-1}\\ \widehat{A_{12}}(t)&=\widehat{B}^T[A+DF(x,t)E]B\\ \widehat{A_{22}}(t)&=(B^TB)^{-1}B^T[A+DF(x,t)E]B\end{aligned}$$

성질 P1-3를 만족시키는 스위칭 평면 $Sx=SW^{-1}v=S\widehat{B}^T(\hat{B}\widehat{B}^T)^{-1}v_1+SBv_2=0$이 존재한다고 가정하자. 그러면 $(SB)^{-1}$이 존재하고 위의 미방은 스위칭 평면에 구속된 슬라이딩 모드 동역학이 다음과 같이 주어짐을 의미한다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \widetilde{B}^T ALv_1 + \widetilde{B}DF(x,t)ELv_1, \\ L &= \widetilde{B}(\widetilde{B}^T\widetilde{B})^{-1} - BK, \\ K &= (SB)^{-1}S\widetilde{B}(\widetilde{B}^T\widetilde{B})^{-1} \end{aligned} \tag{15}$$

위의 슬라이딩 모드 동역학식은 다음의 두 조건 중 하나가 만족되어야만 성질 P2-3를 만족시킴을 의미한다.

경우1: $\widetilde{B}^TD=0$이고 다음 Lyapunov 행렬식을 만족시키는 해 X_0가 존재한다.

$$X_0>0, \quad \widetilde{B}^TALX_0 + * < 0 \tag{16}$$

경우2: $\widetilde{B}^TD\neq 0, EL=0$ 그리고 Lyapunov 행렬식 (16)을 만족시키는 해 X_0가 존재한다.

경우1의 경우를 먼저 생각해보자. $Y=0$로 놓고 X를 다음과 같이 정의하자

$$X = W^{-1}\begin{bmatrix} X_0 & * \\ -KX_0 & I+KX_0K^T \end{bmatrix} W^{-T} \tag{17}$$

여기에서 X_0는 (16)식의 해이다. 보조정리 1은 위의 (17)식에 주어진 X가 양한정임을 의미한다. 그러므로 $\widetilde{B}^TL=\widetilde{B}^T\widetilde{B}(\widetilde{B}^T\widetilde{B})^{-1}-\widetilde{B}^TBK=I$를 이용하여 경우1일 때 (17)식의 X와 $Y=0$가 LMI식 (3)의 해가 됨을 알 수 있다.

한편 경우 2일때 등식 $EL=0$는 $L=\Gamma H=(I-E^gE)H$를 만족시키는 행렬 H의 존재를 의미한다. $\widetilde{B}^TL=I$와 $L=\Gamma H$를 이용하면 (16)식은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$X_0>0, \quad \widetilde{B}^T(A\Gamma HX_0H^T\Gamma + *)\widetilde{B}<0 \tag{18}$$

만약 $X=HX_0H^T, Y=I$라고 정의하면 우리는 보조정리 1과 $L=\Gamma H$를 이용하여 다음 식이 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma X\Gamma + BYB^T &= LX_0L^T + BB^T \\ &= W^{-1}\begin{bmatrix} X_0 & * \\ -KX_0 & I+KX_0K^T \end{bmatrix} W^{-T} > 0 \end{aligned} \tag{19}$$

결국 (18)과 (19)식을 이용하여 $X=HX_0H^T, Y=I$가 LMI식 (3)의 해가 됨을 알 수 있다. ▽▽▽

위 정리를 참조하여 우리는 다음의 따름 정리들이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

따름정리 1 : 시스템 (1)에서 성질 P1-3를 만족시키는 선형 슬라이딩평면 행렬 S가 존재하면 다음 행렬식을 만족시키는 해 (N, X, Y)가 항상 존재한다.

$$\begin{aligned} &\Gamma X\Gamma + BYB^T>0, \quad \widetilde{B}^T(A\Gamma X\Gamma + \Gamma X\Gamma A^T)\widetilde{B}<0, \\ &X=X^T, \quad Y=Y^T \\ &S=NB^T(\Gamma X\Gamma + BYB^T)^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

따름정리 2 : 만약 다음을 만족시키는 해 (X, Y)가 존재하면 성질 P1-3를 만족시키고 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학의 α안정성(α-stability)을 보장하는 슬라이딩 평면이 존재한다.

$$\begin{aligned} &\Gamma X\Gamma + BYB^T>0, \quad X=X^T, \quad Y=Y^T, \\ &\widetilde{B}^T(A\Gamma X\Gamma + \Gamma X\Gamma A^T + 2\alpha\Gamma X\Gamma)\widetilde{B}<0 \end{aligned} \tag{21}$$

증 명 : 위 식을 만족시키는 해 (X, Y)는 LMI (3)를 항상 만족시키므로 정리1에 의해 성질 P1-3를 만족시키는 슬리이딩 평면 행렬 S가 존재함을 알 수 있다. 그러므로 우리는 (21)식의 해가 존재하면 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학의 α안정성(α-stability)을 보장하는 슬라이딩 평면이 존재하는 것을 보이기만 하면 된다. (21)식을 만족시키는 해 (X, Y)를 가지고 슬라이딩 평면 행렬 S를 $S=B^T(\Gamma X\Gamma + BYB^T)^{-1}$라고 정의하자. 그러면 정리1의 증명과정을 참조해서축차등가 슬라이딩 모드 동역학이 $\widetilde{B}^TD=0$인 경우 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{z}_1 = \widetilde{B}^TAX\widetilde{B}(\widetilde{B}^TX\widetilde{B})^{-1}z_1, \quad z_1 = \widetilde{B}^Tx$$

위의 시불변 시스템은 만약 다음 Lyapunov 행렬식을 만족시키는 양한정행렬 P_0가 존재하면 α안정성(α-stability)을 보장한다[8-9].

$$P_0(\widetilde{B}^TX\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^TX(A+\alpha I)^T\widetilde{B} + * < 0$$

LMI식 (21)은 $\widetilde{B}^TD=0$인 경우 $\Gamma=I, \widetilde{B}^TX\widetilde{B}>0$이 성립하고 $P_0=\widetilde{B}^TX\widetilde{B}>0$가 위의 Lyapunov 행렬식의 해가 될 수 있음을 의미한다. 한편 $\widetilde{B}^TD\neq 0$ 인 경우 정리1의 증명과정과 위에 $\widetilde{B}^TD=0$인 경우의 증명과정을 참조하면 쉽게 증명 가능하다. ▽▽▽

우리는 또한 [8-9]의 결과와 위 따름정리2의 증명과정을 참조하면 반지름 r과 중심 $(-c,0)$을 갖는 원상에 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학의 모든 극점이 위치하도록 하고 성질 P1-3를 만족시키는 슬라이딩 평면의 존재 조건을 다음과 같이 구할 수 있다.

따름정리 3 : 만약 다음을 만족시키는 해 (X, Y)가 존재하면 성질 P1-3를 만족시키고 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학의 모든 극점이 반지름 r과 중심 $(-c,0)$을 갖는 원위에 위치하도록 하는 슬라이딩 평면이 존재한다.

$$\begin{aligned} &\Gamma X\Gamma + BYB^T>0, \quad X=X^T, \quad Y=Y^T, \\ &\begin{bmatrix} -r\widetilde{B}^T\Gamma X\Gamma\widetilde{B} & c\widetilde{B}^T\Gamma X\Gamma\widetilde{B} + \widetilde{B}^TA\Gamma X\Gamma\widetilde{B} \\ * & -r\widetilde{B}^T\Gamma X\Gamma\widetilde{B} \end{bmatrix}<0 \end{aligned}$$

정리 1에 주어진 슬라이딩 평면의 존재조건 (3)으로 슬라이딩 평면의 존재유무를 결정하기 위해서는 LMI 최적화 알고리즘으로 해의 존재 유무를 판단해야 하는데 보조정리 2를 이용하면 LMI 최적화 알고리즘을 쓸 필요 없이 아주 간단한 행렬 rank 계산만을 요구하는 슬라이딩 평면이 존재하기 위한 필요조건을 얻을 수 있다.

따름정리 4 : $\widetilde{B}^TD\neq 0$인 경우, 즉 $DF(x,t)Ex$이 기존의 매칭 조건을 만족시키지 않는 경우를 고려해보자. 아래의 rank 조건은 P1-3를 보장하는 선형 슬라이딩 평면의

존재를 위한 필요조건이다.

$$\mathrm{rank}(E) \le \mathrm{rank}(B) \qquad (22)$$

증 명 : 정리1에 의해 P1-3를 보장하는 선형 슬라이딩 평면의 존재하면 LMI (3)를 만족하는 해 (X, Y)가 존재하고 보조정리2를 이용하여 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\Gamma X\Gamma+BYB^T)&=n\\ &\le \mathrm{rank}(\Gamma X\Gamma)+\mathrm{rank}(BYB^T)\\ &\le \mathrm{rank}(I-E^gE)+\mathrm{rank}(B)\\ &=n-\mathrm{rank}(E)+\mathrm{rank}(B)\end{aligned}$$

즉 부등식 (22)가 성립한다. ▽▽▽

정리1과 따름 정리1은 결국 LMI (3)의 해가 존재하면 성질 P1-3를 만족시키는 S가 항상 존재하고 모든 S는 다음과 같이 매개변수화 할 수 있음을 의미한다.

$$S=NB^T(\Gamma X\Gamma+B^TYB)^{-1} \qquad (23)$$

여기에서 N은 임의의 $m\times m$ 비특이 행렬이고 X, Y는 LMI (3)의 해이다. 기존의 불변조건(invariance condition) $\hat{B}^TD=0$이 성립하는 경우 LMI 조건 (3)은 다음과 같이 바뀔 수 있다.

$$X>0, \quad \hat{B}^T(AX+XA^T)\hat{B}<0 \qquad (24)$$

위의 LMI에서 (A, B)쌍이 안정화 가능하면 해가 존재하게 된다[5]. 이것은 시스템 (1)이 기존의 불변조건 $\hat{B}^TD=0$를 만족하고 (A, B)쌍이 안정화 가능하면 성질 P1-3를 만족시키는 슬라이딩 평면이 존재한다는 기존의 잘 알려진 결과[1-4]와 같다.

다음의 스위칭 궤환 제어기를 고려해보자

$$u(t)=-S_0Ax-\frac{p(x,t)}{1-\psi}\frac{(SB)^{-1}\sigma}{\|(SB)^{-1}\sigma\|} \qquad (25)$$

여기에서 $S_0=(SB)^{-1}S$, ε은 양수이고 $p(x,t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$p(x,t)=(\varepsilon+\rho(x,t)+\psi\|S_0Ax\|+\delta\|S_0D\|\cdot\|Ex\|)$$

정리 2 : 시스템 (1)을 고려해보자. 가정 A1-9가 성립하고 LMI식 (3)를 만족시키는 해 (X, Y)가 존재한다고 가정하자. S가 (23)과 같이 주어지고 제어규칙이 (25)와 같이 주어진 경우 폐회로 응답은 안정하다.

증 명 : 정리1과 따름정리 1에 따라 S는 P1-3를 보장한다. 이전 결과 [1-3]에 따라 우리는 제어 규칙 (25)가 $\sigma_0=(SB)^{-1}\sigma$라고 했을 때 reachability 조건 $\sigma_0^T\dot{\sigma}_0<0$이 만족함을 보이기만 하면 된다. (1), (25)식과 가정A7-9를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\sigma_0^T\dot{\sigma}_0&=\sigma_0^T[S_0Ax+S_0DF(x,t)Dx]\\ &\quad+\sigma_0^T[u+h(x,t)+G(x,t)u]\\ &\le-\frac{p(x,t)}{1-\psi}\|\sigma_0\|\\ &\quad+[\delta\|S_0D\|\|Ex\|+\rho(x,t)+\psi\|u\|]\|\sigma_0\|\\ &\le-\frac{p(x,t)}{1-\psi}\|\sigma_0\|+[\delta\|S_0D\|\|Ex\|+\rho(x,t)]\|\sigma_0\|\\ &\quad+\psi\|S_0Ax\|\|\sigma_0\|+\psi\frac{p(x,t)}{1-\psi}\|\sigma_0\|\\ &\le-\varepsilon\|\sigma_0\|<0\end{aligned}$$

결국 σ_0는 reachable하고 폐회로 응답은 안정하다.

▽▽▽

정리 1, 정리2, 따름정리4, (23) 그리고 (25)는 다음과 같은 LMI 최적화에 기반한 알고리즘을 통해 주어진 시스템에 대하여 성질 P1-3를 만족시키는 슬라이딩 평면의 존재유무를 확인하고 존재하는 경우 이를 설계하고 스위칭 궤환제어기를 구할 수 있음을 의미한다.

슬라이딩 모드 제어기 설계 알고리즘:

Step 1 : $\hat{B}$와 E^g를 구하라.

Step 2 : $\hat{B}^TD=0$인 경우 $\Gamma=I$로 놓고 Step 3으로 가라. $\hat{B}^TD\neq0$인 경우 주어진 시스템이 rank 조건 (22)를 점검하고 만족시키면 $\Gamma=I-E^gE$로 놓고 Step 3로 가라. 그렇지 않다면 성질 P1-3를 만족시키는 슬라이딩 평면이 존재하지 않는 것이므로 멈춘다.

Step 3 : LMI (3)을 만족시키는 해 (X, Y)를 찾아라. 해가 존재하면 Step 4로 가라. 만약 해가 존재하지 않으면 성질 P1-3를 만족시키는 슬라이딩 평면이 존재하지 않는 것이므로 멈춘다.

Step 4 : 주어진 해 (X, Y)와 적절한 비특이 행렬 N을 공식 (23)에 대입하여 슬라이딩 평면 행렬 S를 계산한다.(N의 쉬운 선택값으로 $N=I$를 쓸 수 있다)

Step 5 : 슬라이딩 평면 행렬 S를 가지고 (25)에 따라 제어규칙을 구한다.

슬라이딩 평면을 (23)과 같이 하고 제어규칙을 (25)와 같이 하면 어떤 LQ 성능 지수의 한계를 제한할 수 있음을 보이고 이번 장을 마치겠다. 보조정리 3을 이용하면 (3)식은 다음과 동치임을 알 수 있다.

$$\Gamma X\Gamma+BYB^T=P^{-1}>0,\ X=X^T,\quad Y=Y^T,$$
$$A^TP^{-1}+AP^{-1}+DD^T+P^{-1}E^TEP^{-1}<\gamma BB^T$$

위 식은 다음 행렬 Q가 양한정임을 의미한다.

$$0<-Q=PA+A^TP+PDD^TP+E^TE-\gamma PBB^TP$$

$V=x^T(\Gamma X\Gamma+BYB^T)^{-1}x=x^TPx$라고 하고 t_s를 슬라이딩이 시작하는 시간이라고 하고 LQ 성능 지수 $J=\int_{t_s}^{\infty}x^TQxdt$를 고려해보자. 그러면

$$\begin{aligned}\dot{V}&=x^T(PA+A^TP-\gamma PBB^TP)x+2PDF(x,t)Ex\\ &\quad+2x^TPB[u+\eta(x,u,t)]+\gamma x^TPBB^TPx\\ &\le x^T(PA+A^TP+PDD^TP+E^TE-\gamma PBB^TP)x\\ &\quad+2x^TPB[u+\eta(x,u,t)]+\gamma x^TPBB^TPx\\ &=-x^TQx+2x^TPB[u+\eta(x,u,t)]+\gamma x^TPBB^TPx\end{aligned}$$

을 얻을 수 있고 $t\ge t_s$에서 $B^TPx=N^{-1}Sx=0$이므로

$$\dot{V}\le-x^TQx, \quad \forall t\ge t_s$$

결국 (3)식을 만족시키는 해가 존재하고 슬라이딩 평면

을 (23)과 같이 하고 제어규칙을 (25)와 같이 하면 LQ 성능 지수 J는 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$J=\int_{t_s}^{\infty} x^T Q x dt \leq x^T(t_s)(\Gamma X \Gamma + BYB^T)^{-1} x(t_s)$$

IV. 수치적 예

다음의 데이터들로 주어지는 시스템 (1)을 생각해보자.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \tag{26}$$
$$F(x,t)=\xi, \quad h(x,t)=\begin{bmatrix} 0 \\ \xi \end{bmatrix}, \quad Z(x,t)=0$$

여기에서 ξ는 $[-1,\ 1]$사이의 값을 갖는 미지의 패러메터값이다. 위의 시스템에서 $DF(x,t)E$가 매칭조건을 만족시키지 않지만 rank조건 (21)을 만족시킨다는 것을 유의해야 한다. 앞장에서 주어진 슬라이딩 평면 설계알고리즘을 이용해서 $\widehat{B}^T=[1\ \ 2\ \ 0]$, $E^g=[0\ 1\ 0]$로 놓고 LMI (3)을 풀면 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$X=\begin{bmatrix} 1.1260 & 0 & -0.6834 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.6834 & 0 & -0.2360 \end{bmatrix},$$
$$Y=\begin{bmatrix} 0.1346 & -0.1041 \\ -0.1041 & 1.8263 \end{bmatrix}$$

그리고 $N=I$로 놓고 공식 (4)와 위의 해를 사용하여 다음과 같이 슬라이딩 평면을 얻을 수 있다.

$$\sigma=Sx=\begin{bmatrix} 0.4286 & -6.4106 & 0.7062 \\ 0.5543 & 1.3156 & 0.9132 \end{bmatrix} x$$

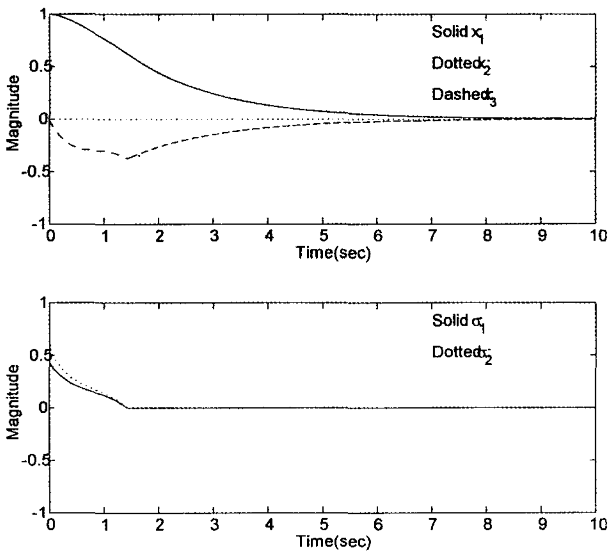

그림 1. 시스템 (26)과 입력(27)의 폐회로 응답(위:상태변수, 아래:슬라이딩변수).

Fig. 1. Closed-loop responses of (26) and (27) (Top : states; Bottom : sliding variables).

그리고 공식 (12)를 사용하여 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학 시스템이 다음과 같은 시불변 안정한 시스템으로 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{z}_1=-0.6069 z_1, \qquad z_1=\widehat{B}^T x$$

(26)으로부터 $\phi=0, \rho(x,t)=1, \delta=1$임을 쉽게 알 수 있다. 결국 다음의 제어기를 공식 (25)를 사용하여 얻을 수 있다.

$$u(t)=-S_0Ax-(1.01+0.39\|Ex\|)\frac{(SB)^{-1}\sigma}{\|(SB)^{-1}\sigma\|} \tag{27}$$

모의실험을 수행한 것이 그림 1(Fig. 1)에 보여지고 있다. 여기에서 ξ는 $\xi=x_1 \sin 10t$이고 초기조건은 $x_1(0)=1, x_2(0)=0, x_3(0)=0$으로 주어진다고 가정했다.

V. 결론

본 논문에서는 매칭조건을 만족시키지 않는 불확실성을 상태 공간 모델에 포함하는 선형 시스템을 위하여 선형 슬라이딩 평면을 설계하는 방법을 제안하였다. 우리는 슬라이딩 모드 동역학이 안정하며 매칭 조건을 만족시키지 않는 불확실성에 전혀 영향 받지 않는 것을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 새로운 불변조건(invariance condition)을 LMI형태로 구했고 선형 슬라이딩 평면을 위한 공식을 주어진 LMI형태 존재조건의 해를 이용하여 제시하였다. 이와 함께 스위칭 궤환제어기의 설계 알고리즘을 제시하였다. 주어진 LMI 존재 조건들은 LMI Control Toolbox[15]와 같은 매우 효율적인 convex 최적화 기법을 통해 해결 가능한지 여부를 확인하여 해를 쉽게 구할 수 있으므로 제안된 방법을 사용하여 쉽게 슬라이딩 평면과 스위칭 궤환제어기를 설계할 수 있다. 제안된 방법의 유효성을 보이기 위해 우리는 설계 예를 보였다.

참고문헌

[1] R. A. Decarlo, S. H. Zak, and G. P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems : A tutorial," *IEEE Proceedings*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.

[2] O. M. E. ElGhezawi, A. S. I. Zinober, and S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," *Int. J. Contr.*, vol. 38, pp. 657-671, 1983.

[3] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes." *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, pp. 212-222, 1977.

[4] M. Zohdy, M. S. Fadali, and J. Liu, "Variable structure control using system decomposition," *IEEE Trans. Automat. Contr*, vol. AC-37, pp. 1514-1517, 1992.

[5] H. H. Choi, "Variable structure control of dynamical systems with mismatched norm-bounded uncertainties:An LMI approach," *Int. J. Control*. vol. 74, pp. 1324-1334, 2001.

[6] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres, " H_2 guaranteed

cost-switching surface design for sliding modes with nonmatching disturbances." *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-44, 2214-2218, 1999.

[7] H. H. Choi, "A new method for variable structure control system design: A linear matrix inequality approach" *Automatica,* vol. 33, pp. 2089-2092, 1997.

[8] H. H. Choi, "An explicit formula of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties," *Automatica,* vol. 34, pp. 1015-1020, 1998.

[9] H. H. Choi, "On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mis matched uncertainties," *Automatica,* vol. 35, pp. 1707-1715, 1999.

[10] H. H. Choi, "Variable structure output feedback control design for a class of uncertain dynamic sytems," *Auto matica,* vol. 38, pp. 335-341, 2002.

[11] K.-S. Kim, Y. Park, and S. H. Oh, "Designing robust sliding hyperplanes for parametric uncertain systems : A Riccati approach," *Automatica,* vol. 36, pp. 1041-1048, 2000.

[12] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres, " H_∞ design of switching surfaces for sliding mode control with non-matching disturbances," *In Proc. of the 36th Conference on Decision and Control,* pp. 4046-4051, San Diego, USA, Dec. 1997.

[13] D. Yue, S. Won, and O. Kwon, "Note on robust stabili zation of uncertain input-delay systems by sliding mode control with delay compensation," *Transaction on Control, Automation and Systems Engineering,* vol. 4, pp. 195-198, 2002.

[14] 성재봉, 권성하, 박승규, 정은태 "정합조건을 만족하지 않는 선형시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어, "제어·자동화·시스템공학논문지, 제7권, 제3호, pp. 193-197, 2001.

[15] P. Gahinet, A. Nemirovski and A. J. Laub, *LMI Control Toolbox User's Guide*, The MathWorks Inc., 1995.

[16] S. Boyd, L. ElGhaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[17] P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Mat rices*, 2nd, Academic Press, 1985.

최 한 호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년 9월 ~ 1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원. 1998년 3월 ~ 2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수. 2003년 3월 ~ 현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 가변구조제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스..