韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 4호, 579-588.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 4, 579-588.

중등 교사 양성을 위한 이산수학 강좌에 대한 연구

이 재 학 (한국교원대학교)

I. 서 론

이산수학을 학교 교육에 접목시키려는 많은 노력은 수학에 관심이나 재능이 뛰어난 우수한 학생을 대상으로 기술 산업의 시대, 특히 컴퓨터에 의한 정보화 시대를 준비하게 하려는 측면을 강조하면서 최근에 이루어졌다.

미국에서는 1989년 NCTM의 '학교 수학 교육과정과 평가의 규준'에서 추천하여 1991년에 나온 'Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12'의 일련의 연구가 있으며, Rutgus 대학에서는 수학에 재능이 있거나 관심이 많은 학생들을 대상으로 한 과외 프로그램 'Young Scholar Program in Discrete Mathematics'을 실시하고 있다. 한편, 네델란드의 10, 11학년의 교수요목에는 이산수학의 내용이 상당한 수준까지 제시되어 있으며, 덴마크의 Gymnasium A수준에서는 프랙탈, 카오스, 선형계획법 등의 주제를 다루고 있다.

우리 나라의 경우에는 이산수학을 중등학교에서 소위 영재를 위한 선택 과목으로 성격을 지으려는 의견이 있었으나 많은 지지를 얻지 못하였고, 현재는 이산수학이 지나치게 이론적이고 실생활과는 유리된 기존의 입시 위주의 수학 내용에 식상한 많은 학생이나 수학에서 부진한 학생을 위하여 좋은 대안으로 고등학교 심화 선택 과목으로 정해져 있는 실정이다.

지금의 교육 현장에서는 이산수학에 대하여 생소한 수학 교사가 대부분이며 이산수학에 관심을 가지고 공부를 한 교사라 하더라도 이산수학의 여러 분야 전체에 익숙한 사람은 거의 없다고 할 수 있다. 이는 2003년부터 고등학교 현장에서 학생들이 이산수학을 선택할 때 이를 적절히 지도할 수 있는 수학 교사가 매우 부족하다는 뜻이다. 그 동안 교사 양성 기관이나 연수 기관에서 이산수학 또는 그래프 이론 등의 이름으로 교과목 개설이나 강의가 있어 왔으나 통일된 교육과정이 제시되지 않은 상태였다. 따라서 이산수학 강좌에서 구체적으로 어떤 내용을 다루어야 하며 그 수준을 어디에 맞추어야 하는지 또한 정하기가 어려웠다. 이는 이산수학이라는 과목 자체가 아직 완전히 정립되지 않았다는 데에도 원인이 있으며, 이산수학에서 다룰 수 있는 영역이 방대하고 각 영역마다 특성이 있어 이를 획일화하여 하나의 교육과정으로 정하는 것에는 많은 논란과 이견이 있을 수밖에 없다는 데에도 있다.

교육인적자원부의 제7차 교육과정에서 고등학교에서의 이산수학 교육과정이 정해졌으나 이것이 앞으로의 교육과정에서 그대로 유지된다고 보기도 어려우며 실제로 많은 개선의 여지가 있을 것이다. 그러므로 NCTM(1990)의 연구보고서에서 제안한 고등학교 수준의 이산수학 내용이나 이산수학을 실제로 가르치고 있는 외국의 고등학교 교육과정과 비교하고, 수학의 타 영역과의 연계성, 실제 교육 현장의 상황 등을 고려하여 이산수학 교육과정은 더 연구되어 이산수학, 더 나아가서 수학 본래의 교육 목표에 더 접근할 수 있도록 개편되어야 할 것이다.

이런 시점에서 교사양성기관에서는 이러한 미래를 전망하고 그에 대처할 수 있도록 이산수학 교육과정을 미래 지향적으로 적절히 정하는 것은 매우 의미있는 일이다. 본 연구에서는 중등학교 교사 양성 대학에서 학생들에게 가르쳐야 할 이산수학에 대하여 그 성격과 목표 및 교육과정을 개발하고 그 교육과정에 따른 교수 요목(실라버스)을 정하기로 한다. 특히, 교육과정의 개발에서는

* 2003년 9월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : B55, D45
* MSC2000분류 : 97B02, 97D02
* 주제어 : 교사양성대학에서의 수학교육과정.

NCTM(2000)이 '학교 수학의 원칙과 규준'에서 언급한 교육과정의 원칙을 만족시키도록 교육과정이 단순히 여러 가지 활동이나 내용을 모아 둔 것만이 아니라 일관성 있고, 중요한 수학을 강조하며, 종합적인 교육과정을 통해 각 학년에 걸쳐 명료하게 표현되도록 유념해야 한다. 또, 수학은 상호 연관성이 매우 높고 누적적인 과목이므로 위계별로 개념을 잘 조직하여 제시해야 하며, 또한 관련성이 무시된 주제별 모음으로 수학을 보지 않고 중요한 수학적 개념 사이의 관련성을 인식할 수 있도록 해야 한다. 학생들은 이러한 관련성과 기능을 습득함으로써 수학에 대한 이해가 더 깊어지고 확장된다. 교육과정은 또한 중요한 수학 즉, 앞으로 상급학교에서의 학습이나 가정, 직업 등에서의 문제 해결을 준비하는 수학에 초점을 맞추어야 한다.

II. 이산수학의 내용

이산수학은 수학의 다른 분야와 비교하여 상대적으로 새로운 분야이며 그 내용이 타 영역과 중복되기도 하고, 많은 사람이 인정하는 표준화된 내용도 정해졌다고 볼 수 없는 실정이다. 컴퓨터와 관련된 이산수학의 내용-알고리즘의 복잡도, 유한상태 기계, 부울 대수-이나 부호이론, 암호학, 선형계획법 등의 응용수학도 이산수학의 범주에 포함될 수 있으며, 집합론의 명제, 관계, 함수 등의 내용도 대부분의 이산수학 책에서 다루어지고 있다. 국내외에서 연구된 이산수학의 목표나 주제를 살펴보면 다음과 같다.

1. NCTM(1989)에서 제안한 이산수학(9-12 학년에서 다룰 내용)의 목표

1) 유한그래프, 행렬, 점화식 관계와 같은 이산 구조를 사용하여 문제 상황을 표현할 수 있어야 한다.

2) 행렬을 사용하여 유한 그래프를 표현하고 분석할 수 있어야 한다.

3) 알고리즘을 개발하고 분석할 수 있어야 한다.

4) 세기와 이산 확률 문제를 풀 수 있어야 한다.

대학 진학 학생들은 이에 더하여 다음을 더 요구하고 있다.

5) 선형계획법과 차분방정식을 이용하여 문제를 표현하고 해결할 수 있어야 한다.

6) 알고리즘의 응용 및 컴퓨터 타당화와 관련된 문제 상황을 탐구할 수 있어야 한다.

2. COMAP의 제안

최근 미국에서 연구·발표된 COMAP(Consortium for Mathematics and its Applications)에서 제안하는 이산수학의 내용은 다음과 같다.

1) 그래프이론(4-5주)

최소생성수형도(Prim의 알고리즘, Kruskal의 알고리즘)

그래프의 구조(기본 개념, 다이어그램이나 인접행렬 등으로 표현하기)

회로와 경로(오일러 회로 알고리즘, 해밀턴 회로, 경로, 순회판매원 문제, 최단경로문제에 대한 Dijkstra의 알고리즘)

Network 색칠 문제

수형도의 구조

2) 헤아림의 기술(4-5주)

논리, 집합, 벤 다이어그램(disjuction and union, conjuction and intersection, negation and complement, 포함배제의 원리)

합의 법칙, 곱의 법칙

순열과 조합

파스칼 삼각형과 이항계수

이산확률과 그 응용(mutually exclusive events and addition rule, 독립사건과 곱의 법칙, 조건부 확률, 이산상황에서의 기대값)

3) 수학적 귀납법과 반복(차분방정식)(4-5주)

일계 반복 관계(Iterating first-order recursion relations)

반복의 응용(등차수열, 등비수열, 지수적 성장, 재정수학, population dynamics)

일계 선형 점화식에서 일반항 구하기

이계 반복 차분방정식(피보나치 수열)

4) 행렬의 모델(1-2주)

Markov 연쇄

인구 분포에 대한 Leslie 모델

Leontief input-output 모델

3. 국내외 이산수학 교재의 내용

1) a 출판사(국내)

집합 및 함수 : 집합, 관계, 함수, 함수의 성장

기초 : 알고리즘, 알고리즘의 복잡성, 수치함수의 연산, 수학적 귀납법, 순열과 조합, 비둘기집의 원리, 램지의 성질

점화관계

그래프 이론

언어와 유한상태 기계

2) b 출판사(국내)

수학적 모델, 알고리즘 언어

명제와 논리, 집합의 정의, 연산, 성질, 종류

수학적 귀납법, 관계와 함수

그래프 이론

형식언어와 기계

부울 대수

대수체계

수치함수와 생성함수, 계차방정식, 알고리즘의 분석

3) c 출판사(국외)

알고리즘 언어

논리와 집합, 관계와 함수

조합

그래프 이론

부울 대수, 대수 구조

기계와 계산-오토마타, 유한상태 기계, 튜링 머신

확률

4) d 출판사(국외)

선거이론

분배이론

게임이론

그래프이론

Markov Chain

5) e 출판사(국외)

수와 세기 : 정수, 함수와 세기, 세기의 원칙(오일러 함수, 치환), 디자인, 분할, 모듈러 계산

그래프와 알고리즘 : 알고리즘과 복잡도, 그래프, network, 점화식

대수적 방법 : 군, 환, 체, 다항식환, 유한체와 그 응용, 오류정정 부호, 생성함수,

자연수의 분할, 대칭성과 세기(Polya's theorem)

III. 교육과정 개발 방향

중등학교의 수학 프로그램은 학생들이 장래에 다양한 전공이나 직업을 택할 수 있도록 그 영역을 보다 넓히고 깊게 하는 것이 바람직하다. 따라서, 많은 선진국에서는 학생들의 능력, 적성, 포부를 고려하여 다양한 교육 과정을 제시하고 있으며 우리 나라 제7차 수학교육과정도 이를 수용하여 10단계 이후에서 여러 가지 선택 과목(수학I, 수학II, 미분과 적분, 확률과 통계, 이산수학, 실용수학)을 제시하고 있다. 이산수학에서도 이와 같은 교육과정의 취지를 살려 미래에는 그 내용이 더욱 다양해지고 깊어질 것이 예상된다. 이에 대비하여 교사 양성 기관에서의 교육과정은 미래를 대비하여 준비하는 것이 되어야 한다. 따라서, 대학에서의 이산수학도 현재의 고등학교 이산수학의 영역에서 더 확장하고 보다 전문화된 내용으로 교육과정을 구성하여야 할 것이다. 또한, 이산수학을 통하여 수학의 본질을 이해하고 수학을 즐길 수 있으며 이 과정에서 실생활에서의 수학의 활용성과 유용성을 느끼게 하는 교육과정이 되어야 한다. 한편, 이산수학의 기초 개념인 집합이나 논리를 비롯하여 대수학에서 다루어질 수 있는 부울 대수, 부호이론, 암호학과 수치해석학에서 다루어지는 계차방정식이나 방정식의 수치적 해법 등은 각각의 영역에서 다루어지는 것이 더욱 타당할 것이다. 이와 같은 맥락에서 교사 양성 기관에서의 이산수학 교육과정의 주제를 선별하는 데 다음과 같은 원칙을 설정하는 것은 적절할 것이다.

1. 수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 해결할 수 있는 주제를 선별한다.

2. 초·중등학교 교육과정, 특히 고등학교 이산수학의 교육과정과 연계된 주제를 선별한다.

3. 수학의 타 영역과의 연계성을 고려하여 일반적으로 수학교육과에서 개설되는 다른 과목의 한 주제로 다루어질 수 있는 것은 제외한다.

4. 미래의 중등학교 교육과정에 대비하여 미래 지향적인 폭넓은 주제와 깊이를 고려한다.

Ⅳ. 교육과정

1. 성격과 목표

수학에서 나온 여러 가지 개념과 계산 방법은 일상생활이나 타 학문의 연구에 매우 유용하게 쓰인다. 특히, 수학의 기본 개념에서 출발한 이산수학은 실생활의 문제를 모델링하고 그 문제를 해결하는 데 일반적인 방법론으로서의 역할을 하고 있다. 실제로 '이산수학'이 무엇인가라고 정확히 정의하기는 쉽지 않다. '이산(discrete)'의 뜻은 따로 따로 떨어진 것을 의미하며 이산수학은 연속수학이라는 수학과 대비되는 말이다. 여기서 연속이란 말은 틈이 없으며 갑작스런 변화가 없다는 뜻이다. 우리에게 익숙한 미분, 적분은 연속수학의 대표적 예이다. 이산수학이나 연속수학에서 사용하는 주제나 기술은 대부분 같다. 예를 들어, 집합이나 그 원소와 거기에 정의된 구조에 관한 성질을 연구하는 것은 동일하다. 또, 문제 해결을 위한 일반적인 방법론(아래 그림 참조)도 마찬가지이다.

문제 　　　　　　　 문제의 해

⇓ 　　　　　　　　 ⇑

추상적 모델 　 ⇒ 변환된 모델

그러나 연속수학은 실수의 집합이나 그와 비슷한 집합(구간이나 평면에서의 한 영역)이 주된 기본공간이 되고 따라서 이들 공간은 기하학적으로 볼 때 연속적인 표현을 갖는다. 반면에, 이산수학은 기하학적으로 볼 때 그 원소가 서로 떨어져 있는 집합을 기본공간으로 한다. 즉, 이산수학에서는 유한집합이나 가산집합에 관한 성질을, 연속수학에서는 비가산집합에 관한 성질을 연구한다.

본 교육과정의 목표는 이산수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 유한이나 불연속 상황의 문제를 수학적으로 분류하고 논리적으로 사고하여 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 것이다. 이 목표를 달성하기 위하여 이산수학의 학습내용을 세기의 원리와 점화식, 알고리즘, 그래프, 의사결정 과정의 5개 영역으로 하며, 각 영역에서의 내용 전개에는 이산적인 상황의 문제를 모델링한 다양한 소재를 사용하도록 한다. 한편, 이산수학은 고등학교 수학 I의 내용 중에서 순열, 조합, 확률 및 통계 영역을 충분히 이해하고, 대학에서 집합론을 이수한 모든 학생을 대상으로 개설할 수 있는 필수 과목으로 한다.

2. 내용 체계

다음은 교육과정의 기본 방향에 부합하고 현재 이산수학이란 이름으로 분류된 주제 가운데 중등학교 교사로서 꼭 알아야 할 내용을 선별하여 체계적으로 조직한 것이다.

1) 헤아림의 원리
  - 1-1. 포함배제의 원리
  - 1-2. 교란
  - 1-3. 비둘기집의 원리
  - 1-4. 집합의 분할
  - 1-5. 수의 분할

2) 귀납적 정의
  - 2-1. 점화식
  - 2-2. 특성다항식
  - 2-3. 생성함수

3) 알고리즘
  - 3-1. 기본적 알고리즘
  - 3-2. 알고리즘의 분석
  - 3-3. 탐색알고리즘
  - 3-4. 분류알고리즘

4) 그래프 이론
  - 4-1. 그래프의 정의
  - 4-2. 여러 가지 그래프
  - 4-3. 유향그래프
  - 4-4. 오일러 그래프
  - 4-5. 해밀턴 그래프
  - 4-6. 경로 알고리즘
  - 4-7. 수형도
  - 4-8. 평면그래프
  - 4-9. 그래프의 색칠

5) 모델링
  - 5-1. 게임이론
  - 5-2. Markov 연쇄
  - 5-3. Leontief input-output 모델
  - 5-4. 선형계획법

3. 영역별 내용 및 목표

1) 헤아림의 원리

이 영역에서는 포함배제의 원리, 비둘기집의 원리 및 집합과 수의 분할에 대하여 알아본다. 포함배제의 원리는 기본 원리의 이해와 구체적인 상황에서 이들 원리를 적절히 적용할 수 있도록 하는 것이 중요하다. 집합과 수의 분할에서는 조직적으로 나열할 수 있는 능력과 이로부터 유추할 수 있는 규칙성을 찾아내도록 한다.

가. 포함배제의 원리를 이해하고 구체적인 사례에서 이 원리를 적용하여 개수를 계산할 수 있다.

나. 교란(Derangement) 의 뜻을 알고 그 값을 구하는 방법을 이해한다.

다. 비둘기집의 원리를 이해하고, 이 성질을 이용하여 해결할 수 있는 구체적 상황을 안다. 또, 여러 가지 경우에 이 원리를 적용할 수 있다.

라. 집합의 분할을 이해하며 스터링의 수를 알고 이를 이용할 수 있다.

마. 수의 분할에서는 주어진 자연수를 몇 개의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있고 이를 응용할 수 있다.

용어와 기호 : 포함배제의 원리, 교란, 비둘기집의 원리, 램지의 성질, 집합의 분할, 스터링의 수, 수의 분할, D_n, $S(n,k)$, $P(n,k)$

2) 귀납적 정의

반복적 상황을 점화식으로 나타내고, 점화식으로부터 수열의 일반항을 구할 수 있게 한다. 또, 이를 응용하여 수와 관련된 여러 가지 규칙성의 문제를 해결할 수 있도록 한다.

가. 점화식의 뜻을 이해한다.

나. 두 항, 세 항 사이의 관계식으로부터 특성다항식이나 생성함수를 이용하여 일반항을 구할 수 있다.

용어와 기호 : 점화식, 특성다항식, 특성해, 일반해, 생성함수

3) 알고리즘

문제 해결의 일반적인 과정에서 한 단계에서 다음 단계로 변화하는 과정을 알고리즘의 사고로 살펴보고 특정한 문제의 해결 과정에서 일반화의 가능성을 추정하고 그 추정을 확인하는 절차는 문제 해결 전략에서 중요하다. 실세계에 기반을 둔 수열의 문제나 점화 관계도 알고리즘으로 접근함으로써 수학적 탐구활동이 풍부해 질 수 있다. 알고리즘의 개발과 분석은 컴퓨터를 이용하여 문제 해결하는 방법의 핵심이 된다. 알고리즘의 관점에서 수학을 탐구하는 기회를 경험하고 컴퓨터 등 기술 공학적 도구를 수학 활동에 이용하고 나아가 수학적 소프트웨어를 개발할 수 있는 능력은 현대인이 갖추어야할 기본 소양이다.

가. 알고리즘의 뜻을 이해하고, 간단한 문제 해결을 위한 알고리즘을 간단 명료하게 작성할 수 있다.

나. 알고리즘의 분석을 위해 알고리즘의 복잡도를 이해하고 복잡도에 관한 기본 성질을 이해한다.

다. 탐색 알고리즘과 분류알고리즘을 이해한다.

용어와 기호 : 알고리즘, 복잡도, 탐색알고리즘, 분류알고리즘, $f=O(g)$, $f \prec g$, $f \asymp g$

4) 그래프

그래프는 그 응용 범위가 매우 넓어 수학뿐만이 아니라 자연과학, 사회과학 등 거의 전 학문 분야에서 쓰이고 있다. 특히, 컴퓨터 과학과 관련된 분야나 도시 계획, 교통 문제 등 현대에 이르러 그 쓰임새가 더욱 광범위해지고 있다. 이 영역에서는 실생활의 문제를 주요 소재로 하여 그래프 이론을 전개하고 이들 이론을 바탕으로 문제 해결 능력을 기른다.

가. 그래프의 뜻을 알고 여러 가지 용어의 뜻을 안다.

나. 그래프로 모델링될 수 있는 여러 가지 실제 문제 상황의 예를 안다.

다. 여러 가지 종류의 그래프를 알고, 유향그래프의 뜻을 안다.

라. 그래프를 행렬을 이용하여 나타낼 수 있고, 그래프의 여러 가지 성질을 이해한다.

마. 오일러 그래프와 해밀턴 그래프를 이해하고 이를 응용할 수 있다.

바. 최단경로 문제와 스케쥴링의 문제를 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.

사. 수형도와 생성수형도를 이해하고 이를 이용하여

배낭꾸리기 문제를 해결할 수 있다.

아. 평면그래프를 이해하고 오일러 공식, 그래프의 평면성 판단, 평면그래프의 쌍대그래프를 이해한다.

자. 그래프의 색칠 문제를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. 또, 지도의 색칠 문제도 이해한다.

용어와 기호 : 그래프, 꼭지점, 변, 면, 유향그래프, 단순그래프, 완전그래프, 이분그래프, 오일러 회로, 해밀턴 회로, 꼭지점(변, 면)의 차수, 경로, 수형도, 생성 수형도, 평면그래프, 오일러 공식, 쌍대그래프, 꼭지점(변)의 색칠, 채색다항식, 지도, 사색정리, $\deg(v)$

5) 모델링

주어진 상황을 수학적으로 모델링하고, 그 모델에서 우리가 알고자 하는 여러 가지 사실을 파악하여 문제 해결을 할 때 수학이 어떻게 적용되는지 이해함으로써 수학의 가치를 인식하고 수학의 흥미를 유발하도록 한다. 게임이론에서는 기하학적인 풀이가 가능한 2×2 게임만을 다루도록 하며, 선형계획법은 단체법을 이해하는 수준으로 한다.

가. 여러 가지 게임의 뜻을 이해한다.

나. 혼합전략의 게임에서 최적전략을 구할 수 있다.

다. 마코프 체인(Markov Chain)을 이해한다.

라. 경제 시스템에서 Leontief input-output 모델을 이해한다.

마. 선형계획법의 뜻을 알고 실생활의 문제를 선형계획법의 문제로 모델링할 수 있다.

사. 단체법을 이해하고, 이를 이용하여 선형계획법의 문제를 풀 수 있다.

용어와 기호 : 게임, 영합게임, 비영합게임, 결정적 게임, 순수 전략, 혼합 전략, 게임의 값, Markov Chain, transition matrix, Leontief input-output 모델, 선형계획법, 가능해, 최적해, 단체법

V. 강좌의 구성요소와 예시

이산수학 강좌의 각 단원은 신현용(2003)에서 제시한 9가지 기본 방향에 맞추어 개발되었으며 다음과 같은 구성요소를 갖추고 있다. 전체적인 내용은 연구보고서 '교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발(신현용 외, 2003)' 제7권 이산수학 부분에 있으며, 본고에서는 '헤아림의 원리' 단원 중 일부를 예시로 제시한다.

1. 단원의 구성요소

학습 목표: 학생들에게 무엇을 배워야 하는가를 확실히 알려줌으로써 강의 및 평가 방향을 이해하는데 도움이 되도록 한다.

단원 내용의 소개: 본 단원에서 다루게 될 주제의 필요성과 유용성, 이용가치를 제시하고 이에 필요한 개괄적인 내용 및 전개방법을 제시한다.

연계성: 초·중·고등학교에서 그 단원과 관련한 수학적 개념이 어떻게 전개되어 왔는지, 타 교과나 타 분야의 수학과 어떤 연계성 갖고 있는지를 파악하게 한다.

강의 내용: 본 강좌에서 다룰 개념에 대하여 그 개념이 나오게 된 배경과 필요성을 이해하게 하며, 다양한 분야에서의 이산수학의 응용성에 초점을 맞춘다.

평가: 본 단원의 학습 목표가 달성되었는지를 평가한다. 평가 방법으로는 지필 시험이나 수행 과제를 단원의 성격에 따라 적절히 활용하도록 한다.

참고 사항: 단원과 연관된 참고문헌을 구체적으로 제시하여 개념의 포괄적 이해와 토의 과제에 실질적인 도움이 되도록 하며, 가능한 경우 공학적 도구를 사용할 수 있도록 이와 관련된 인터넷 사이트를 제시한다.

2. 단원의 예시

단원명: 헤아림의 원리

학습 목표: 이 영역에서 포함배제의 원리, 비둘기집의 원리 및 집합과 수의 분할에 대하여 알아본다. 포함배제의 원리는 기본 원리의 이해와 구체적인 상황에서 이들 원리를 적절히 적용할 수 있도록 하는 것이 중요하다. 집합과 수의 분할에서는 조직적으로 나열할 수 있는 능력과 이로부터 유추할 수 있는 규칙성을 찾아내도록 한다.

가. 포함배제의 원리를 이해하고 구체적인 사례에서 이 원리를 적용하여 개수를 계산할 수 있다.

나. 교란(Derangement) 의 뜻을 알고 그 값을 구하는 방법을 이해한다.

다. 비둘기집의 원리를 이해하고, 이 성질을 이용하여 해결할 수 있는 구체적 상황을 알아본다. 또, 여러 가지 경우에 이 원리를 적용할 수 있다.

라. 집합의 분할을 이해하고 스터링의 수를 알고 이를 이용할 수 있다.

마. 수의 분할에서는 주어진 자연수를 몇 개의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있게 하고 이를 응용할 수 있다.

단원 내용의 소개와 연계성: 물건의 개수를 헤아리는 것에서부터 어떤 사건이 일어날 수 있는 경우의 수를 세는 것은 초등학교 혹은 그 이전의 유치원 교육에서 시작하여 지금까지의 교육에서 뿐만이 아니라 일상 생활에서 항상 일어나는 일일 것이다. 여기에서는 우리가 그동안 알게 모르게 그 원리를 이용하였던 헤아림(counting)의 기본 원리를 다시 한번 조명해 보고, 이를 수학적으로 표현하고 더 나아가 일반화의 과정을 거쳐 보다 고급의 헤아림의 기술로 발전시켜 보도록 한다. 단, 여기에는 순열과 조합이 기본적인 도구로 쓰이나 이와 관련된 내용은 선수학습으로 이미 이루어져 있다고 생각한다.

강의 내용: 예시된 다음 강의의 내용에는 새로운 개념이 있는 것이 아니라 우리가 이미 잘 알고 있는 사실을 수학적으로 표현하고 이를 일반화하는 것이 주 내용이므로 먼저 질문을 통하여 일반화 과정을 유도하는 것이 적절할 것이다.

1-1. 포함 배제의 원리

이산수학을 수강하는 100명의 학생 중에 3/4은 여학생이며 80%는 자기 컴퓨터를 가지고 있다고 한다.

<u>질문 1</u> 자기 컴퓨터를 가지지 않은 남학생은 몇 명인가? 공식을 구해 보자. 이 수는 최대 몇 명이며 최소 몇 명인가?

<u>질문 2</u> 자기 컴퓨터를 가지고 있는 여학생은 몇 명이라고 생각할 수 있는가?

<u>성질 1</u> 유한집합 U의 부분집합 A, B 에 대하여 다음이 성립한다.

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2) $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$
3) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| \geq |A| - |B|$
4) $|A^c| = |U| - |A|$
5) $|A \triangle B| = |A \cup B| - |A \cap B|$
$= |A| + |B| - 2|A \cap B|$
$= |A \setminus B| + |B \setminus A|$
6) $|A \times B| = |A| \times |B|$

<u>문제 1</u> 세 유한집합 A, B, C의 합집합의 원소의 개수에 대한 공식을 만들고 증명하여라. 또 이를 일반화하여 나타내어 보아라.

<u>성질 2</u> (포함 배제의 원리). 유한개의 유한 집합 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 에 대하여 합집합 $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$ 의 원소의 수는 다음과 같다.

$$|A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

1-2. 교란(Derangements)

4집에 각각 한 통의 편지를, 글자를 모르는 배달부가 한 집에 한 통씩 아무렇게나 배달한다고 할 때, 4집 모두 자신에게 오는 편지를 받지 못하는 경우의 수는 몇 가지나 될까? 또, 하인이 파티에 참석한 각 사람의 코트를 보관했다가 임의로 돌려줄 때, 모든 사람이 다 자신의 코트를 돌려 받지 못할 확률은 어떻게 될까?

<u>정의</u> 순서가 정해진 n개의 서로 다른 기호(symbol)를 각 기호가 모두 원래의 위치에 있지 않도록 배열하는 것을 n개의 교란(derangement)라고 부르고 n개 기호의 교란의 총 수를 D_n으로 나타낸다.

<u>예</u> 두 기호 1, 2의 교란은 21 하나 뿐이다. 따라서,

$D_2=1$이다.

1, 2, 3의 교란은 312, 231 두 개다. 즉, $D_3=2$이다.

1, 2, 3, 4의 교란은 다음의 9개가 있다.

2341	2413	2143
3142	3412	3421
4123	4312	4321

따라서, $D_4=9$.

D_n을 구하는 일반적 방법을 생각해 보기 위해 먼저, D_4를 구해 보자.

1, 2, 3, 4의 치환 중 첫째 자리에 1이 위치하는 치환의 집합을 A_1, 둘째 자리에 2가 위치하는 치환의 집합을 A_2라 하고 A_3, A_4를 같은 방법으로 정하자. 이때, 적어도 한 숫자가 자신의 순서에 위치하는 치환의 집합은

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

이다. 1, 2, 3, 4의 치환 전체의 개수는 $4!=24$이고 교란은 위 집합의 여집합이므로

$$D_4=4!-|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

그런데,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$
$$=\sum_i |A_i|-\sum_{i<j}|A_i \cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

여기서, $|A_1|=3!$, $|A_1 \cap A_2|=2!$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=1!$이므로

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|=4\cdot 3!-{}_4C_2\cdot 2!+{}_4C_3\cdot 1!-1$$

따라서,

$$D_4=4!-(4\cdot 3!-{}_4C_2\cdot 2!+{}_4C_3\cdot 1!-1)$$
$$=4!-4!+\frac{4!}{2!}-\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{4!}$$
$$=4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=9$$

이상을 일반화하면 다음 공식을 얻을 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여,

$$D_n=$$
$$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$
$$\approx \frac{n!}{e}$$

평가: <u>문제 1</u> 어느 대학 수학과에 30대의 PC가 있으며 이 중 20대는 Window 98을 운영하고 있으며, 8대는 액정 모니터, 25대는 외장 CD-ROM 드라이버가 장착되었다. 또, 20대는 이들 사양 중 적어도 2개 이상을 가지고 있으며, 6대는 이들 사양 모두가 장착되었다고 한다.

1) 이들 사양 중 적어도 한 가지 이상이 장착된 PC는 몇 대인가?

2) 이들 사양이 하나도 없는 것은 몇 대인가?

3) 오직 한 가지 사양만 가지고 있는 PC는 몇 대인가?

<u>문제 2</u> 1에서 300까지의 정수 중에서 다음 조건을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

1) 3, 5, 7 중 적어도 하나로 나누어지는 수

2) 3과 5로는 나누어지지만 7로는 나누어지지 않는 수

3) 5로는 나누어지나 3과 7로는 나누어지지 않는 수

<u>문제 3</u> 일상생활에서 교란을 이용한 재미있는 문제를 몇 개 만들고 이를 해결해 보자.

참고 사항

다음은 헤아림의 원리에 대한 보충 자료의 목록이다.

1. 교육인적자원부, 고등학교 이산수학, pp. 10-44. 강원대학교 1종도서 편찬위원회,
   천재교육, 2003.
2. 교육인적자원부, 고등학교 확률과 통계, pp. 59-67. 한국교원대학교
   1종도서 확률과 통계 편찬위원회, 천재교육, 2003.
3. Goodaire, E. G., Parmenter, M. M, Discrete Mathematics with Graph Theory,
   pp. 211-274. Prentice-Hall, 1998.
4. Biggs, N. L., Discrete Mathematics, pp. 27-112. Oxford University Press, 1985.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 교육부 고시 1997-15호, 제7차 수학과 교육과정, 대한교과서.

교육부 (2001). 고등학교 교육과정 해설 5, 수학, 대한교과서.

교육인적자원부 (2003). 고등학교 확률과 통계, 한국교원대학교 1종도서 확률과 통계 편찬위원회, 천재교육.

교육인적자원부 (2003). 고등학교 이산수학, 강원대학교 1종도서 편찬위원회, 천재교육.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.*

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.*

Goodaire, E. G. & Parmenter, M. M, (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*, Prentice-Hall.

Dossey, Giordano, McCrone, Weir, COMAP, (2002). Mathematics Methods and Modeling for Today's Mathematics Classroom, *A Contemporary Approach to Teaching Grades* 7-12, Brooks/Cole.

Wilson, R. J. & Watkins, J. J. (1990). *Graphs An Introductory Approach*, John Wiley & Sons.

West, D. B (1996). *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall.

Hu, T. C. (1982). *Combinatorial Algorithms*, Addison-Wesley.

김세헌 (1999). 현대 경영과학-계량의사결정론, 무역경영사.

이효구 · 박승안 (1997). 신정판 경제 · 경영수학, 박영사.

이재학 (2003). 교사양성대학에서의 이산수학 교육과정, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, pp.43-52, 서울: 한국수학교육학회.

이준열 (2002). 이산수학 제7차 교육과정의 구현 방안 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A, <수학교육> **41(1)**, pp.127-137, 서울: 한국수학교육학회.

박진홍 (1996). 새로운 이산수학, 교우사.

유원희 (1992). 이산수학, 서울: 경문사.

신현용 외 (2003). 연구 보고서 "교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수, 학습 방법 개발" 제7권 이산수학, 서울: 한국수학교육학회.

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육 과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.431-461, 서울: 한국수학교육학회.

A Study on Learning Program of Discrete Mathematics for Training of Mathematics Teacher of Secondary Schools

Lee, Jae Hak
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education
E-mail: jaelee@knue.ac.kr

The main purpose of this work is to propose programs of discrete mathematics for the department of mathematics education of teacher training universities. There is a description of the characteristics, goal, syllabus and contents of discrete mathematics course for pre-service teacher, followed by principles for teaching the subject.

* ZDM Classification : B55, D45
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B02, 97D02
* Key Word : Teacher training, pre-service teacher, discrete mathematics.