韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 4호, 523-540.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 4, 523-540.

중등 교사 양성을 위한 미적분학 강좌 운영방안

강 미 광 (동의대학교)

1. 서 론

수학은 인류의 역사를 통해서 기술과 과학발전의 중요한 원동력이자 세상과 우주를 이해하고 이와 관련된 문제의 주요 해결자로서의 큰 역할을 해 오고 있다. 그러나 많은 사람들이 일상생활에서 수학에서 파생된 개념이나 결과로 인해 편리한 생활을 하고 있으면서도 수학의 유용성을 인식하지 못하며 수학을 긍정적으로 평가하는데 대단히 인색하다.

보통 사람들이 가지고 있는 수학에 대한 이미지는 마음이 끌리고 친숙하다는 느낌보다는 차갑고 딱딱하며, 논리적이라 비인간적이라는 느낌이 더 큰 것 같다. 수학을 잘하는 학생들조차도 유달리 수학에 대해서는 부정적인 성향을 가지고 있으며 학년이 올라갈수록 수학에 대한 자신감을 잃어가고 있다(김진규 외, 1996; Mullis et al., 2000). 수학교사가 되기 위해 사범대학이나 교육대학에 진학한 학생들조차도 그다지 긍정적인 수학적 신념이나 태도를 가지고 있지 않다(Noh, 1998)고 한다. 그러나 수학은 학생들의 전공선택이나 진로에 막대한 영향력을 지니는 교과일 뿐 아니라, 첨단학문과 관련된 분야와 보수와 조건이 좋은 전문직에 진출하는데 결정적인 여과기(critical filter)로 작용한다(Sells, 1973). 이러한 사회적 중요성 때문에 수학에 대한 일반인들의 부정적인 이미지는 개선되어져야 할 필요가 있다.

그런데 일반인들이 가지는 수학에 대한 부정적 이미지는 수학 교수・학습에서 수학적 개념이 발생된 당시의 필요성이나 실생활과의 구체적인 관련성은 배제된 채, 기호와 알고리즘의 조합으로 제시되고 수학적 공식에 따른 절차적 연습만이 실행되는 학교 수학 수업에서 주로 형성되어진다(Ernest, 1995). 그러므로 교사는 학교수학에서 수학적 개념을 실생활의 맥락과 학생들의 구체적인 경험과 연결시키고 수학적 내용이 학생들 마음에서는 실제의 문제 상황으로 받아들여 질 수 있도록 만들어야 한다(Zulkardi, 2002). 또한 수학이 자연현상과 사회전반에 걸쳐 어떻게 활용되고 인류발전에 공헌하고 있는지를 학생들이 인식할 수 있도록 수학의 유용성과 본질의 가치를 알리는데 좀 더 주력해야 한다. 수학은 생활에 필요한 지식과 편리함을 제공하는 교과이고 자신이 진출하고자 하는 분야에 장애가 아니라 도움을 준다고 학생들이 인식한다면, 수학교과에 대해 목적의식도 생기고 긍정적인 교과로서의 이미지가 형성될 것이기 때문이다.

예비교사들이 대학 교육과정을 통해 교육전문가로서의 자질을 갖추기 위해서는 수학 각 영역의 내용을 심도있게 이해하고 전체적인 구조하에서 수평적, 수직적 연계성을 파악할 수 있는 능력을 갖추고 교수방법과 평가방법에도 정통해 있어야 한다. 또한 정보통신기술을 적절히 활용하고 현대의 지식기반 사회에 잘 적응할 수 있도록 수학적 사고 계발에 도움이 되는 경우에는 계산기, 그래픽 계산기, 컴퓨터 등과 같은 교육공학적 도구를 적절히 활용할 수 있어야 한다. 그래야만 대학에서 배운 지식들을 학생들에게 보다 적합한 지식형태로 재창출해 내고 보다 적절한 교수 방법을 선택할 수 있기 때문이다.

본고에서는 교사양성대학의 목적과 특성에 보다 적합한 미분적분학 강좌의 교과과정 및 교수・학습 방법을 신현용(2003)의 내용을 참고로 하여 개발하고자 한다.

미적분학은 역사 발생적인 측면이나 실제 생활에서 수학의 유용성을 가장 쉽게 체험할 수 있고 문제해결의 강력한 도구를 제시해주는 실용적 면이 가장 많이 부각되는 과목이다. 고등학교에서도 '수학 II'와 '미분과 적분'을 가르치지만 대학 입시의 부담으로 미적분의 계산적인

---

* 2003년 9월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : B55, D45
* MSC2000분류 : 97B02, 97D02
* 주제어 : 교사 교육, 예비 교사, 미적분학.

면에만 치중하는 바람에 미적분학이 가지고 있는 본래의 가치를 놓치는 수가 많다. 그래서 대학에서의 미적분학 강좌는 고등학교에서 간과해 왔던 수학적 개념의 의미나 중요성을 제대로 인식할 수 있는 계기가 되고 다양한 분야에서 미적분의 유용성을 심도 있게 느낄 수 있는 기회이기도 하다. 이와 같이 많은 장점을 가진 미적분학 강좌를 효율적으로 운영함으로써 예비교사들이 미적분학 교과의 본질을 이해하고 바람직한 수학적 성향을 개발하고자 한다.

본고에서는 교사양성 대학의 미적분학 강좌에서 학습목표가 무엇인지, 초·중등학교에서의 수학 교과내용과의 연계, 수학의 타 영역과의 관련, 실생활과 자연현상에서 수학적 개념의 응용되는지, 수학적 정리가 가지는 진정한 가치와 아름다움, 적절한 곳에서 교육공학 도구를 적절히 사용하고 해석하는 방법에 초점을 맞추었다.

2. 미적분학 강좌의 성격과 목표

수학의 해석 영역의 목표는 여러 물리적, 사회적, 정신적 현상에서의 문제를 종속과 변화 관계인 함수적 관점으로 파악할 수 있는 함수적 사고를 신장시키고, 이를 수학적 내용으로 변환·조직화하여 문제를 해결하는 능력과 이를 현상으로 재해석함으로써 합리적 판단력과 예측 능력을 키우는 것이다.

해석영역 중 특히, 미분적분학은 운동과 변화의 현상을 수리적으로 연구한 수학의 한 분야로서 움직임이나 성장이 있는 곳, 또는 변화하는 힘이 작용하여 가속력이 생기는 자연 현상이나 실생활에서 응용력이 큰 학문이다. 미적분학의 탁월한 유용성은 무한 개념과 극한 개념의 도입으로 이루어지는데, 이 강좌는 현대수학 학습에서 필수적인 무한개념을 수학적 대상으로 다루고 접근하는 방법을 다루기 때문에 거의 모든 영역의 수학분야에 기초가 되는 교과이다.

대학에서의 미적분학 강좌는 고등학교에서 직관적이고 계산위주로 배운 미적분을 엄밀히 정의하고 전개하는 형식적 체계를 갖춘 해석학에 연결시키고 전공수학의 교과목을 소화시킬 수 있는 기반을 갖추게 하는 준비적인 성격을 띠고 있다(Tall, 1975). 그래서 미적분학은 수치적(numeric), 기호적(symbolic), 그리고 시각적(visual) 표현으로 구성된 직관적인 표현과 수리적 해석학의 형식적 표현(formal representation)을 함께 다루고 있다.

이 강좌의 첫 번째 목표는 먼저 미적분 교과내용의 전체적인 연계성과 구조를 심도 있게 이해하는 것이다. 학생들이 미분과 적분이란 실제 무엇이고 이것을 하는 목적은 무엇이며, 미분과 적분을 계산하는 정교한 방법들이 왜 필요하고 어떤 분야에 활용되는지를 아는 것이다. 그리고 미분 가능한 함수들을 멱급수로 왜 전개시키는지, 벡터함수와 다변수 함수에서의 미분과 적분이란 어떤 개념이고 어떤 분야에 활용되는지를 파악하는 것이다.

두 번째 목표는 미적분학의 수학적 개념이 중등학교에서의 수학 교과 내용과 어떻게 연계되고 해석되어지는지, 해석학과 미분방정식, 선형대수학, 벡터해석학, 위상수학의 개념과 어떻게 연결되는지를 제시하여 수학적 위계성과 연관성 속에서 이 교과목의 내용이 이해되도록 하는 것이다.

세 번째 목표는 다양한 예들에서 나타나는 현상들이 수학적 개념으로 추상화되고 단순화되어 정립되어 가는 과정을 통해 수학하는 즐거움과 논리적 아름다움을 제공함으로써, 예비교사들이 실생활에서 수학을 행하고 문화로서 수학을 즐길 수 있는 수학적 기질과 수학에 대한 긍정적 성향을 계발하는 것이다.

미적분학 강좌의 내용은 고등학교에 배웠던 개념과 해석학에서 다룰 내용과 중복되는 부분이 많을 수 있으므로 이전에 직관적으로 도입했던 극한과 무한 개념을 객관적인 방법으로 다룰 수 있도록 엄밀한 정의를 도입하여 전개함으로써 고등학교 과정과 차별화하고 대학교 2학년에서 배울 해석학적인 사고방식과 자연스레 연결되도록 한다.

3. 미적분학 강좌의 기본 운영 방안

(1) 현재 다루고자 하는 수학적 개념이 초·중등 교육과정과 연계된 교육이 되게 하기 위해서는 그 개념이 이전에는 어떻게, 어느 정도 다루어졌는지에 관한 방법이나 수준을 먼저 파악해야 한다. 각 단원마다 관련된 학교 수학 내용과 방법이 제시하여 중등과 대학교육이 효율적으로 연계되고 전체적인 구조 속에서 이해될 수 있도록 한다. 다음은 현행 제 7차 중·고등학교 교육과정에서 미적분학 강좌에 관련된 영역과 내용들이다(교육부, 1997).

<미적분학와 관련된 제 7차 중·고등학교 교육과정 영역의 내용>

<table>
<tr><th>7~10 단계</th><th>수학 I</th><th>수 학 II</th><th>미분과 적분</th></tr>
<tr><td rowspan="6">함수
7단계: 함수도입
8단계: 일차함수
9단계: 이차함수
10단계: 대응관계로 함수도입</td><td rowspan="2">수열의 극한</td><td>· 함수의 극한
· 함수의 연속성</td><td>삼각 함수
· 삼각함수의 덧셈정리
· 삼각 방정식</td></tr>
<tr><td rowspan="2">다항 함수의 미분법
· 미분계수
· 도함수
· 도함수 활용</td><td rowspan="2">함수의 극한
· 삼각함수의 극한
· 지수, 로그함수의 극한</td></tr>
<tr><td rowspan="2">지수 함수</td></tr>
<tr><td rowspan="2">다항함수의 적분법
· 부정적분
· 정적분
· 정적분의 활용</td><td>· 여러 가지 함수의 미분법
· 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td rowspan="2">로그 함수</td><td rowspan="2">적분법
· 부정적분
· 정적분
· 정적분의 활용</td></tr>
<tr><td>· 벡터의 연산
· 벡터의 내적
· 직선과 평면의 방정식</td></tr>
</table>

(2) 교차지원의 허용으로 인해 '수학II'와 '미분과 적분'을 배우지 않은 학생이 있을 수 있으므로 이들을 위한 배려가 필요하다. 즉 제 7차 교육과정에서는 '함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법, 적분법이 수학I에서 수학II로 이동하였기 때문에 수학II를 배우지 않은 학생은 미적분을 한 번도 접한 적이 없다. 그러므로 따로 강좌의 시간을 마련하거나 조교를 이용하는 교수·학습방법, 또는 이들도 이해시킬 수 있는 적정한 수준의 강의가 이루어져야 한다.

(3) 이 강좌는 계산위주의 고등학교 미적분과 대학에서 형식적 체계를 갖춘 해석학을 연결시키는 성격을 띠고 있으므로 학생들이 직관적으로 이해했던 수학적 개념과 용어를 명확하게 정의하고 그 정의에서 출발하여 정리를 엄밀하게 전개하고 서술하는 방식을 취하도록 해야 한다. 한 예로, 고등학교에서는 함수의 극한 개념을 $\varepsilon-\delta$ 논법을 사용하지 않고 직관적으로 구체적인 보기들과 그래프를 사용하여 극한개념을 지도하지만 대학의 미·적분학강좌에서는 수열과 함수의 극한 개념을 각각 표준정의인 $\varepsilon-N$ 방법과 $\varepsilon-\delta$ 방법을 사용해 엄밀하게 도입하는 방법을 다루어야 한다. 그러나 $\varepsilon-\delta$ 방법을 완전히 이해하는데는 많은 시간과 노력이 요하고 그 개념은 2학년 해석학과 연계되어 다시 자세히 다루기 때문에 적절한 수준에서 엄밀성을 조절하도록 한다.

(4) 각각의 수학적 개념이 발생하게 된 동기와 영역, 수학화해 온 발달과정을 역사적으로 고찰함으로써 그 개념을 공부할 필요성을 느낄 수 있도록 한다(박문환 외, 2002). 예를 들면, 정의를 소개하더라도 왜 이러한 정의가 나오게 되었는지에 대한 배경과 필요성을 먼저 부각시키고 충분한 공감대를 얻을 수 있도록 유도한 뒤 정의를 도입하도록 한다. 그리고 다양한 분야에서 어떻게 활용되고 있는지를 항상 염두에 둠으로써 학생들이 수학이란 생활 속에서 자연스럽게 대두된 지적 활동임을 자각하고 수학에 대해 긍정적인 성향을 갖는데 도움이 되도록 한다.

(5) 미적분학은 유용성뿐만 아니라 논리적인 교과의 가장 멋진 표본이므로 학생들이 논리 정연한 순서적 전개 방법에서 아름다움을 느끼고 수학적 개념이나 정리의 결과에서 형태와 응집의 미를 찾을 수 있는 혜안을 갖출 수 있도록 한다. 예를 들면, 미적분학의 기본정리가 가지는 이론적 가치와 유용성, 왜 '기본'이라는 말이 들어갔는지에 대한 이유가 의미 있게 이해되어야 한다(한대희, 1999; Swan, 1997). 즉, 서로 독립적인 문제와 해결방식을 가진 분야인 미분학과 적분학이 기본정리에 의해 하나의 체계적인 분야로 통합되어 적분이 미분의 역연산 관계로 이해되고 넓이나 부피의 계산등을 미분법의 공식을 이용하여 간단하게 구할 수 있게 하는 실용적인 의의가 근대 자연과학의 발전에 지대한 영향을 끼쳤다는 사실을 인식해야 한다(Eves, 1994).

(6) 현재 다루고 있는 수학적 개념을 가르칠 때 있을 법한 인지적 장애를 파악함으로써 학생들이 겪는 어려움을 알아내고, 적절한 교수방법을 설계해야 한다. 구체적으로 학생들의 개인적인 발달과정에서 생기는 심리적 장애와 교수방법에 의한 교수학적 장애, 수학 개념 그 자체 특유의 속성으로 인한 인식론적 장애를 알아내고 이를 극복하기 위한 교수방법에 관심을 기울여야 한다(박선화, 2000).

(7) 실생활에서 파생된 문제는 계산 과정이 복잡할 수 있으므로 계산기나 컴퓨터를 사용하여 계산하도록 한다. 기호화되고, 추상화된 수학 내용도 함수의 그래프나 수치적 방법을 이용하면 다소 구체화되고 직관적으로 제시해 줄 수 있으므로 내용에 따라 공학적인 교육 기자재

를 교수·학습 과정에서 적절하게 활용한다(김영익 외, 1999; 김안형 외, 2000; 박경수 외, 2001). 컴퓨터나 계산기, 그래픽 계산기와 같은 교육공학적 도구는 이론이나 응용이 강조되는 문제에서 계산적 장치로서 적절할 때나 토픽의 도입을 쉽게 할 때, 또는 정확한 2, 3차원 그래프가 필요한 경우와 같이 미적분학을 더욱 더 발전시키기 위해 유용하게 활용된다. 특히 이분법, 뉴우튼 방법, 수치적 적분, Taylor의 다항식을 수반하는 오차의 분석과 같은 수치적 방법이나 극한의 계산에서 이러한 도구들은 현명하게 사용되어진다면 좋은 효과를 발휘한다.

(8) 참고 문헌이나 인터넷 사이트를 구체적으로 제시하여 학생들의 수업과 과제해결에 실질적인 도움을 줄 수 있어야 한다. 각 단원마다의 참고 문헌은 그 단원 내용의 활용적 측면이나 역사적 배경 및 다른 영역과의 연계성을 보여줄 수 있는 곳이고 인터넷 사이트는 컴퓨터 소프트웨어인 Mathematica나 Maple, Java 등을 이용해 미적분학 문제를 해결할 수 있는 곳이어야 한다.

(9) 학생들의 피드백을 강화시키고 동시에 출석 체크도 하기 위해 첫 4주 동안은 5분 이내에서 퀴즈를 실시한다(조벽, 2002). 팀별 협력을 위해 수학자의 업적이나 개념의 역사 발달적 과정, 수학 교육적 측면과 학교수학과의 관련성은 팀별로 나누어 토의주제나 과제 형식으로 제시하도록 한다. 팀별의 토의과제는 리포트 형식으로 제출하되 한 학기에 1~2번은 발표할 기회를 주어 수업 참여도를 높인다.

(10) 한 달에 한 권 정도의 필독서를 읽고 독후감을 써 오게 하여 평가하고, 수업 시간에 학생들의 적극적인 참여를 유도하기 위해서 수업참여도도 평가에 반영하도록 한다. 학습 평가기준의 한 예는 중간평가 30%, 기말평가 30%, 평가 문제 및 독후감 20%, 토의 주제 10%, 출석 및 수업참여도 10% 등이다. 여기서 미적분학의 필독서는 무한 개념에 관한 이해를 돕고 수학의 유용성과 활용성을 보여주는 데 초점을 맞추었다.

【미적분학의 필독서】

1. 유한과 무한으로의 여행, 이종우 편집, 경문사, 2000.
2. 무한의 신비, 신현용·승영조 역, 승산, 2002.
3. 자연, 예술, 과학의 수학적 원형, 마이클 슈나이더 지음, 이충호 옮김, 경문사, 2002 (열 가지 주제 중 두 주제 이상).
4. 수학 먹는 달팽이, 아르망 에르스코비치, 문선영 옮김, 정동명 감수, 까치, 2000 (제1, 2, 3부 중 하나).
5. 괴델 불완전성 정리, 요시나가 요시마사 지음, 임승원 옮김, 전파과학사, 2000.
6. 무한, 그리고 그 너머, Eli Maor 지음, 전대호 역, 사이언스 북스, 1997.
7. 20세기 수학의 다섯가지 황금율, J. L. Casti 지음, 한태식·권기호·김정헌 옮김, 경문사, 1999.

4. 내용체계

(1) 미적분학 I의 단원구성

1. 실수계와 함수	◦실수계의 구조(체의 공리, 순서 공리, 완비성 공리) ◦실변수 실가 함수의 연산과 성질 ◦다양한 함수가 나타나는 영역들
2. 극한과 연속	◦극한의 엄밀한 정의 ◦일방극한과 무한극한 ◦극한의 정리와 연속성 ◦압축정리와 치환법칙 ◦구간상의 연속과 중간값 정리
3. 도함수	◦미분계수와 도함수 ◦여러 영역에서 나타나는 변화율 ◦연쇄법칙 ◦음함수 미분법과 고계도함수 ◦평균값정리와 그 응용 ◦근사값과 미분
4. 미분법의 응용	◦최대값과 최소값 ◦일계, 이계 도함수 판정법 ◦함수의 그래프 그리기 ◦무한대에서의 극한과 수평점근선 ◦최적화 문제 ◦다양한 분야에서 미분법의 응용
5. 적분과 그의 활용	◦정적분의 정의와 성질 ◦미적분학의 기본성질 ◦부정적분과 전체변화정리 ◦치환법 ◦곡선 사이의 넓이 ◦부피 ◦원주각에 의한 부피 ◦일 ◦함수의 평균값
6. 역함수	◦역함수 ◦지수함수와 그의 도함수 ◦로그함수와 그의 도함수 ◦역삼각함수 ◦쌍곡선함수 ◦로피탈 정리

7. 적분법의 기법	◦부분적분 ◦삼각적분과 삼각치환 ◦유리함수의 적분 ◦적분표와 컴퓨터를 이용한 적분 ◦적분의 근사 계산 ◦이상적분(특이적분)
8. 다양한 적분의 응용	◦곡선의 길이 ◦회전곡면의 넓이 ◦다양한 분야(물리학, 공학, 경제학, 생물학, 확률 등)에서 적분의 응용

(2) 미적분학 II의 단원 구성

1. 무한수열과 무한급수	수열과 급수	◦수열의 수렴발산 ◦급수의 수렴발산
	급수 판정법	◦양항 급수 판정법 (적분판정법, 비교판정법) ◦교대급수 ◦절대수렴과 비판정법 및 근판정법
	멱급수와 Taylor 급수	◦멱급수 ◦Taylor 급수와 Maclaurin 급수 ◦이항급수 ◦Taylor 다항식의 응용
2. 벡터, 직선과 평면	벡터	◦공간에서의 직교좌표 ◦공간벡터 ◦스칼라곱, 외적과 삼중적
	직선과 평면	◦공간내의 직선 ◦공간내의 평면
3. 벡터함수	벡터함수의 미분과 적분	◦벡터함수의 극한과 연속 ◦벡터함수의 미분과 적분
	공간곡선	◦공간곡선의 길이 ◦곡선의 접선과 법선 ◦곡률
4. 편도함수	다변수함수의 편도함수	◦다변수함수의 극한과 연속 ◦일계편도함수와 이계편도함수 ◦연쇄법칙
	방향도함수	◦방향도함수와 그래디언트(gradient) ◦접평면, 근사와 미분 ◦극값과 Lagrange 승수
5. 중적분	이중적분	◦직교좌표, 극좌표에서의 이중적분 ◦이중적분의 활용 ◦중적분에서의 변수변환
	삼중적분	◦직교좌표, 원주좌표, 구면좌표에서의 이중적분 ◦삼중적분의 활용 (질량, 모멘트, 능률)

5. 미적분학의 단원별 구성요소와 교재의 예시

미적분학의 기본 운영방안에 따라 각 단원은 다음과 같은 구성요소를 갖추게 하고 이러한 형태에 맞추어 "극한과 연속" 단원을 교재의 예시로 제시한다.

(1) 구성요소

첫째, 한 단원이 끝날 때마다 【예비 학습】이란 이름으로 학생들이 다음 단원에 대한 준비를 할 수 있도록 생활에서의 범례나 관련된 주제를 조사해 오고 발표를 하게 한다.

둘째, 각 단원마다 【학습 목표】를 명확히 제시함으로써 학생들이 무엇을 배워야 하는가를 확실히 알려주고 교수도 강의방향과 시간조절, 평가에서 성취도와 강의방법 점검에 도움이 되도록 한다.

셋째, 【지도상 주의점】에서는 그 단원의 교수시 참고할 사항이나 강조되어야 할 내용, 그 단원만이 가지는 특유의 학습장애에 대해 언급한다.

넷째, 초·중·고등학교에서 그 단원과 관련한 수학적 개념이 어떻게 전개되어 왔는지를 먼저 파악해야 대학에서 연계성을 가지고 지도할 수 있으므로 제 7차 교육과정에서의 학교수학 내용의 수준과 전개방법 등을 【학교 수학에서의 선행학습】이란 이름으로 제시한다.

다섯째, 【단원 소개】에서는 다루게 될 주제의 필요성과 유용성, 이용가치를 제시하고 이에 필요한 개괄적인 내용과 교육목표 달성을 위한 전개방법 및 순서들을 기술함으로써 방향을 제시한다.

여섯째, 단원의 중요한 수학적 개념의 역사적 배경이나 수학교육에서 학생들이 그 개념학습 시 겪게되는 인식론적 장애와 장애를 극복하기 위한 학습-지도 방안에 관해 언급한다.

일곱째, 【강의 내용】에서는 다루어야 할 개념의 엄밀한 정의를 제시하기 전에 그 개념이 나오게 된 배경과 필요성을 먼저 설명한다. 또한, 타 교과와 타 분야의 수학과 어떤 연계성을 갖고 있는지를 보여주려 노력하고 다양한 분야에서의 미적분의 응용성에 초점을 맞춘다.

여덟째, 학생들의 퀴즈로 이용되거나 전체적인 흐름을 개괄적으로 파악할 수 있고 미적분학이 적용되어질 수 있는 현실적 문제들을 제시하는 【평가 문제】와 팁

별 과제를 위한 【토의 주제】를 제시한다.

아홉째, 그 단원과 연관된 참고문헌을 페이지와 함께 구체적으로 제시하여 개념의 포괄적 이해와 토의 과제에 실질적인 도움이 되도록 하고 공학적 도구를 사용해 문제를 풀 수 있도록 이용 가능한 【참고 문헌 및 인터넷 사이트】를 제시한다.

(2) 교재의 예시 ('극한과 연속' 단원)

【예비 학습】

(1) 'x가 a에 가까이 간다'라는 의미는 건축업자와 미생물학자에게 다르듯이 상황이나 장소에 따라 달라지므로 이를 모든 사람이 공감할 수 있는, 보다 객관적인 표현을 어떻게 할 것인가를 각자 나름대로 생각해 보시오.

(2) $x \to \infty$라는 의미는 무엇인가? 이 때, ∞란 무엇을 의미하는가?

【학습 목표】

(1) 극한을 엄밀한 표준해석학의 $\varepsilon-\delta$ 방법에 의해 정의하고 극한의 기본법칙과 압축정리, 치환법칙을 이용해 극값을 구하고 연속함수의 성질을 이끌어 낼 수 있다.

(2) $\varepsilon-N$에 의한 무한 극한의 정의방법을 이해하고 정확히 표현할 수 있다.

(3) 구간상의 연속인 함수의 성질을 이해하고 중간값 정리를 적용하고 활용할 수 있다.

【지도상 주의점】

(1) 제 7차 교육과정의 수학 II의 '함수의 극한과 연속성' 단원과 연계되며 고등학교에서는 극한과 연속 함수의 성질을 직관과 그래프를 통해 이해시키고 있다. Lynch (1994)는 연속과 적분개념을 표준정의와 같이 엄격하면서도 학생들의 직관에 더 부합되는 방법에 대해 연구하였다.

(2) 극한에 관한 정의와 성질을 직관적으로 지도했을 때 나타날 수 있는 오류를 예를 통해 보여줌으로써 극한의 엄밀한 정의 방법인 $\varepsilon-\delta$방법의 필요성과 타당성에 충분한 공감대를 형성시키고 해석적 방법에 대한 기본을 다진다.

(3) 무한 극한 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$의 의미는 f가 $x=a$에서 극한값이 ∞라는 것이 아니라 극한값은 갖지 않지만 x가 a로 가까이 갈 때 한없이 커지는 상태를 나타내는 하나의 기호임을 알게 한다.

(4) 중간값 정리가 성립하는 궁극적 이유는 위상적 성질인 정의역 $[a, b]$의 연결성(connectedness)과 함수의 연속성 때문이다. 중간값 정리는 연속함수가 영(zero)이 되는 위치와 부동점을 알고자 할 때 유용하며, $f(x)=0$의 해는 이분법과 컴퓨터 zoom 기능을 이용하면 구하기 쉽다(Croom, 1989).

(5) 연속함수가 최대값과 최소값을 가지는 최대·최소값 정리는 존재성에 관한 정리로 해석학에서 Heine-Borel정리와 $\mathbb{R}$의 완비성 공리에 의해 증명된다. 이 정리를 성립하게 하는 유계 폐구간 $[a, b]$의 성질은 위상공간에서 컴팩트성(compactness) 개념으로 일반화된다(Johnsonbaugh et al., 1981; Croom, 1989).

(6) 무한과 극한 개념의 교수학적 양상에서 나타나는 극한에 대한 학생들의 생각과 학습장애를 고찰하고 이에 대한 수업전략에 관심을 가져야 한다(전명남, 2003; Tall, 2003).

【학교 수학에서의 선행학습】

(1) 수학I의 해석영역에서 무한수열의 극한과 무한급수를 다룬다.

1) 무한수열과 무한급수의 수렴과 발산을 판별하고 극한값과 급수합을 구할 수 있다.

2) 무한수열의 극한과 무한급수합에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구하고 활용할 수 있다.

3) 극한에 관한 정의와 성질을 직관에 의하여 지도하고 그래프를 통해 예측한다.

(2) 수학II의 해석영역에서 함수의 극한과 연속성을 다룬다.

1) 함수의 극한에 관한 뜻과 성질을 증명 없이 이해하고 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

2) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$일 때, $x=a$에서 함수 f는 연속이라고 한다.

3) 극한값을 사용한 연속함수의 성질을 직관적으로 이해하게 하고, 구간에서 연속인 함수의 최대·최소값의 정리, 중간값의 정리 등 연속함수에 대한 성질을 직관적으로 이해하게 하고 활용할 수 있도록 한다.

4) 발산의 경우에도 그래프를 이용하여 직관적으로 다루도록 한다.

【단원 소개】

극한은 근사, 연속, 미적분 이론의 기초로서 해석학의 모든 분야에 아주 중요한 개념이다. 이 단원에서는 접선이나 물체의 속도를 구하고자 할 때 극한이 어떻게 일어나는 지를 먼저 이해하고 극한에 대한 정의를 엄밀한 표준해석학의 $\varepsilon-\delta$ 방법으로 도입한다. 고등학교에서는 증명 없이 직관적으로 받아들였던 극한 법칙들을 극한의 명확한 정의로부터 이끌어내고 활용하는 법을 다룬다. 간단한 연속함수로부터 극한의 법칙을 이용하면 다항함수, 유리함수, 제곱근 함수, 삼각함수는 모든 점에서 연속임을 알 수 있다. 폐구간에서 연속인 함수의 중요한 성질인 최대·최소 정리와 중간값 정리의 의미를 이해하고 이 정리를 방정식의 근의 존재성이나 근의 근사치를 이분법을 이용해 구할 때 활용한다.

【극한의 역사적 배경 】

극한의 아이디어는 고대 그리스 학자인 유도세스(Eudoxus)와 아르키메데스(Archimedes)가 넓이와 부피를 계산하고자 사용한 구분구적법에 내포되어 있었지만 극한의 개념을 정확하게 공식화하고 명확히 언급한 사람은 뉴턴(Newton)이다. 그는 극한의 주요 아이디어는 '어떤 주어진 차이보다 더 가까이 접근하는 양'이라고 설명하였고 코시는 극한을 '연속적인 값들이 어떤 고정된 값과의 차이가 원하는 만큼 작아지도록 무한히 접근할 수 있을 때, 이 고정값을 다른 것들의 극한'으로 정의하였다.

함수의 극한의 정의 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ 에서 먼저 독립변수의 접근 $x\to a$ 를 고려하고 그 다음에 종속변수의 극한 $f(x)\to\alpha$를 고려하는 자연스러운 사고 과정을 따르면 '무한히 접근한다'는 의미가 명확하지 않으므로, 정확한 수학적 형식화를 할 수 없다. 그래서 바이어스트라스(Weierstrass)는 극한으로 무한히 접근한다는 모호한 표현 대신에 극한과의 차가 주어진 오차보다 작아진다는 수학적 표현으로 관점을 전환하여 함수의 극한 개념을 직관적인 동적 요소를 배제하고 대수적으로 명확한 $\varepsilon-\delta$ 방법을 통해 정의함으로써 미적분학을 산술적으로 엄밀하게 전개하였다. 이와 같이 극한에 대한 $\varepsilon-\delta$식 정의는 극한의 개념을 건전한 토대 위에 놓으려는 수학자들의 끈기 있는 노력이 200여년 동안 있은 후에 얻어낸 결과이다.

【 극한 개념에서 나타나는 인식론적 장애와 해결 방안 】

극한 개념은 넓이나 도형의 길이 계산과 같은 기하문제, 급수의 합과 수렴속도에 관한 문제, 미분문제 등을 해결하기 위해서 도입되었으며 극한 개념의 역사에서 나타나는 중요한 인식론적 장애는 무한히 큰 것과 무한히 작은 것에 대한 생각, 극한 개념 자체의 형이상학적 특징, 그리고 극한이란 유한한 우리로서는 결코 구할 수는 없는 것이라고 생각하는 것이다(Tall, 2003). 이러한 장애가 생기는 이유는 무한 개념 자체에 대한 인간의 직관적 판단은 유한한 일상 생활에 근거를 두고 있고 무한을 무한히 진행하는 과정으로만 인식하는데 익숙하기 때문이다. 학생들이 새로운 지식을 형성하게 되는 것은 자신의 기존의 인지 구조에 새로운 개념을 동화시키거나 새로운 개념을 받아들이기에 적절하도록 인지구조를 조절하는 것인데 학생들의 오개념은 이미 학생들의 기존의 인지 구조와 적절히 타협하고 있어 새로운 지식을 받아들이기보다는 거부하기가 쉬워진다. 이러한 문제에 대한 해결책으로는 실 무한 개념에 대한 학습에서는 학습자들의 제 1직관에 의한 잠재적 무한개념을 제어하고, 형식적 체계 내에서 정의되는 실 무한 개념에 적절한 제 2직관을 형성시키는 방법이 있다. 즉, 실무한 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해시키는 것이다. 또한, 학습자의 인지적 장애나 오개념을 노출시켜 의식하게 만들고 갈등 단계를 거치게 한 다음 이를 극복할 수 있도록 교사가 적절히 안내하여 학생이 새로운 확신을 갖게 하는데 초점을 맞추는 교수방안들이 있다(Sierpinska, 1987).

【 강의 내용 】

(1) 극한의 개념이 어디에서 나타나는지를 예를 통해 제시한다(접선과 속도의 예).

(2) 엄밀한 극한 정의의 필요성을 인식시키고 정의에 의해 극한을 구할 수 있도록 한다.

1) $f(x)=|x|^3+\frac{\cos 5x}{10000}$가 $x\to 0$일 때 함수의 극한값을 계산기로 추정하면 $f(0.1)=0.001088$이고 $f(0.005)=0.000222$이므로 우리는 극한값을 0으로 추정하는 오류를 범할 수도 있다. 이처럼 극한에 대한 직관적 방법은 때때로 이해하기 어려울 수 있으므로 표준해석학에서 극한에 대한 엄밀한 정의가 필요하다.

2) 극한 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 의 엄밀한 정의 ($\varepsilon-\delta$ 방

법)와 접근법

① $f(x) \to L$ 인 의미는 모든 사람이 동의할 수 있는 '가까이 간다' 라는 의미로 사용되어야 하므로 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 이라는 표현에의 공감을 유도한다.

② 함수의 극한의 정의 $\lim_{x \to a} f(x) = L$에서 모든 사람들의 근방개념을 만족시키기 위해 먼저 종속변수 $f(x) \to a$를 고려하고 그 다음에 독립변수 $x \to a$를 고려해야 하는 당위성을 이해시킨다.

③ 어떠한 $\varepsilon > 0$ 에 대해서도 성립해야 하므로 ε과 $\delta(\varepsilon)$ 와의 일반적인 관계식을 모색해야 한다. 따라서, $|f(x) - L|$ 과 $|x - a|$ 와의 관계를 이용하여 예비분석을 하고 추측한 δ 값이 적합한 지를 논리적인 연역적 방법으로 증명한다.

④ $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ 이 되는 예를 통해 ε 과 δ와의 관계를 더 잘 이해시킨다.

(3) 함수들 결합의 극한을 구하는 5가지 기본법칙의 의미를 이해하고 활용한다.

대부분의 함수들은 간단한 함수들의 결합으로 나타낼 수 있고 극한의 법칙을 이용하면 극한을 계산할 때마다 극한의 정의를 적용하는 번거로움을 줄일 수 있으므로 이를 이용하면 다항함수와 유리함수의 극한값를 쉽게 구할 수 있다.

1) 압축정리의 필요성; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 나 $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 에는 위의 극한 법칙을 적용할 수 없으므로 압축정리를 도입하여 $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ 을 보인 다음 극한법칙과 압축정리를 이용하면 유리함수와 다양한 삼각함수, 지수와 로그 함수들의 극한을 구할 수 있다.

2) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}$와 같은 형의 극한은 공식적인 방법은 없으나 합성함수 $g \cdot f$의 극한 $\lim_{x \to a} g(f(x))$에 적용되는 치환법칙을 이용하면 유용하다.

3) 연속이란 개념은 곡선을 함수의 그래프로 해석하여 곡선이 끊기지 않고 이어져 있다는 직관적인 개념에서 발생하였으며 연속함수란 '가까이 간다'라든지 '근방개념'을 보존하는 함수로서 lim와 f가 $\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$와 같이 교환 가능함을 의미한다.

4) 극한법칙과 치환법칙은 연속인 함수를 많이 만들어 낼 수 있다.

만약 f와 g가 a에서 연속이고 c가 상수이면, $f+g$, $f-g$, cf, $g \circ f$, f/g $(g(a) \neq 0)$도 a에서 연속이므로 임의의 다항식과 유리함수는 연속이다.

(4) 일방 극한과 무한 극한

1) 실수 a에 접근하는 방향은 a의 좌와 우의 두 방향이나 떨어지는 순간의 공의 속도는 일종의 '일방극한' 혹은 '좌방극한'이다.

① 일방 극한과 일방 연속의 정의

② 함수가 점 a에서 연속일 필요충분조건

2) 만약 함수 $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 가 존재하지 않고 x가 a로 접근할 때 $f(x)$의 값이 무한히 커지거나 작아지는 경우를 무한 극한이라하고 $x = a$를 수직점근선이라 정의한다.

① 만약 함수 f가 $f(x) = p(x)/q(x)$ (여기서 $p(x)$ 와 $q(x)$ 는 다항식)인 유리함수이면, 직선 $x = a$는 $p(a) \neq 0$이고 $q(a) = 0$인 경우에 f의 그래프의 수직 점근선이다.

② 무한 극한값의 엄밀한 정의가 올바르게 이해되어야 한다. 예를 들면, 학생들은 $\lim_{x \to 0^+} 1/x$ 은 무한대로 가까워진다고 생각하는 경향이 있는데 무한과 어떤 수와의 차는 줄어드는 것이 아니라 여전히 무한하며 무한 극한값이란 극한값을 갖지 않지만 한없이 커지는 상태를 나타내는 개념이다.

(5) 구간상의 연속과 중간값 정리

1) 구간에서의 연속 정의 제시

2) 중간값 정리 제시(수학II 연속함수의 성질)

① 증명방법은 직관적인 기하학적 증명과 구성적인 해석학적 증명, 그리고 구간의 연결성(connectedness) 성질을 이용한 위상적 증명이 있다.

② 연속함수가 영이 되는 위치를 알고자 할 때 볼차노(Bolzano) 정리는 유용하다. 5차 이상의 다항식은 근을 구하는 일반적 공식이 존재하지 않으므로 볼차노 정리는 이런 경우 특히 유용하다.

③ $f(x) = 0$의 해는 이분법과 컴퓨터의 zoom기능을

이용하면 구하기가 쉽다.

④ f 가 구간 I에서 연속이고 0을 갖지 않으면 f는 I에서 양인 값이나 음의 값만 취하므로 f 가 양 또는 음인 구간을 구하는 데 이용된다(중등학교의 부등식 문제에 활용)

⑤ 모든 양의 수 p 는 제곱근을 가진다(9단계 제곱근과 실수 부분 참조).

【 평가 문제 】

(1) 아래의 각 문항을 말로 표현하고 $\varepsilon > 0$ 이나 큰 양수 M을 먼저 잡은 다음 δ를 추정하는 것에 대한 상황을 설명하시오.

1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ 4) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

(2) 그래프를 이용하여 $|x-2| < \delta$ 일 때 $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 0.2$ 되는 수 δ를 구하여라.

(3) 다음 두 함수가 점 $x=1$ 에서 연속이 아닌 이유를 설명하고 그래프를 그려라.

1) $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

(4) 중간치 정리를 이용하여 주어진 구간 (0, 1)에서 방정식 $2\sin x = 3-2x$ 의 근이 존재함을 보이고 1/16이하의 오차를 가진 f의 역을 찾으시오

(5) 한 수도승이 오전 8시 수도원을 떠나서 평상시 가는 길을 따라 산 정상까지 오후 8시에 도착한다. 다음날 아침 그는 오전 7시에 정상을 출발하여 똑같은 길로 오후 7시 수도원에 도착한다. 중간값 정리를 이용하여 수도승이 이틀 동안 정확하게 똑같은 시간에 길을 지나간 지점이 존재함을 보여라.

【 토의 주제 】

(1) 우리나라 고등학교 학생들의 극한 개념에 대한 인지적 장애를 기술하고 이러한 극한 장애를 극복하기 위한 학습-지도 방안을 제시하시오.

(2) 고등학교에서 연속함수의 효과적인 교수·학습을 위해 보조 소프트웨어(Mathematica, Maple, Java 등)를 이용하여 ε 에 의해 δ가 어떻게 정해지는지를 실행해 보고 각각의 장단점을 비교하시오(인터넷사이트 참고).

【 참고 문헌 및 인터넷 사이트 】

(1) 박선화 (2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애와 극복방안 연구, 대한 수학교육학회지 수학교육연구 제 10권 제 2호, 247-262.

(2) 박숙영 (1997). $\varepsilon-\delta$ 의 논법을 이용한 함수의 연속성 이해에 관한 연구<보조 소프트웨어-Mathematica-를 이용한 교수 중심>, 강원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

(3) Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. Education Studies in Mathematics, 12.

(4) 고등수학적 사고, David Tall, 류희찬·조완영·김인수 옮김 (2003), pp 207-226, 10장 극한.

(5) 학교수학의 교육적 기초, 우정호 (1998), 서울대학교 출판부.

(6) 수학학습-지도 원리와 방법, 우정호 (2000), 서울대학교 출판부.

(7) http://www.ma.iup.edu/projects/CalcDEMma/Summary.html

(8) http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/index.html

(9) http://www.maths.abdn.ac.kr/~igc/tch/ma2001/notes/notes.html

(10) http://www.calculus-help.com

【 예비 학습 】

(1) 지상 450m 높이의 63빌딩의 전망대에서 공을 떨어뜨린다고 가정하자.

1) 5초 후의 공의 속도는 얼마인가?

2) 그 공이 땅에 닿을 때 얼마나 빨리 움직이고 있는가?

(2) 연속인 함수와 미분 가능한 함수의 관계를 논하시오.

6. 미적분학 I의 단원별 교육목표와 지도상 유의점

(1) 실수계와 함수

1) 실수계 $\mathbb{R}$ 의 체의 공리, 순서공리, 완비성 공리,

거리개념을 이해한다.

2) 함수들의 연산구조는 함수의 공변역인 실수계의 연산구조에 의해 결정되고 연산 법칙도 유도됨을 이해한다.

3) 주어진 함수에서 새로운 함수들을 만들어내는 방법인 합성과 역관계의 중요성과 유용성을 인식할 수 있다.

4) 공학적인 교육 기자재를 교수·학습 과정에서 활용할 때는 과잉, 과소에 의한 오류나 그래프 읽기에 내재해 있는 문제점들을 간파하고 적절히 대처할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 제 7차 교육과정의 1~10단계의 내용 영역 중 '규칙성과 함수'와 직접적으로 연관된다.

2) 실수계 $\mathbb{R}$은 유리수 집합의 cut 이론인 구성적 방법과 체의 공리(현대대수학), 순서공리(집합론), 완비성 공리(해석학)를 주는 공리적 방법이 있다. 여기서 완비성(completeness) 공리는 수열의 수렴성을 증명할 때 빈번히 사용되는 아르키메데스 원리(Archimedean Principle)가 이에 의해 돌출되므로 이에 대한 언급이 필요하다.

3) 대수적 함수와 초월함수를 구별하고 각 함수가 발생하고 응용되는 영역을 알게 한다. 물리학의 운동법칙이나 생산의 소득함수는 다항함수 형태로 주로 나타나고 삼각함수는 파동과 진동, 회전, 굴절지수에서, 지수함수는 인구증가나 복리계산 방사선 물질의 감소 등에서 나타나며 로그함수는 천문학과 지진의 규모, 데시벨, 산성도를 나타낼 때 이용된다.

5) 함수는 초·중·고등학교 과정에서 전반적으로 다 나타날 정도로 중요하므로 학생이 함수 개념을 학습하면서 부딪히는 심리적 장애와 인식론적 장애를 파악하고, 그 대처 방안에는 어떤 교수법이 있을 수 있는지에 대해 관심을 가진다(우정호, 1998; Tall, 2003).

6) 제 6차 교육과정에서는 함수를 중학교 1학년에서 대응으로 도입했지만 제 7차 교육과정에서는 7단계에서 비례관계로 도입하고 10단계에 와서야 대응관계로 정의한다. 이렇게 함수도입 방법이 바뀐 교수학적 측면과 배경에 대해서도 언급한다.

(2) 극한과 연속

앞 절에서 예시로 제시했으므로 여기서는 생략한다.

(3) 도함수

1) 미분계수의 정의와 다양한 분야에서 함수에 따라 결정되는 미분계수의 의미를 이해하고 활용할 수 있다.

2) 함수의 극한 법칙에서 도함수의 미분법칙을 이끌어 내고 이들의 효용가치를 알고 활용할 수 있다.

3) 연쇄법칙의 의미를 이해하고 이를 합성함수의 미분에 이용할 수 있다.

4) 적절한 곳에서 음함수 미분법의 효용가치를 알고 미분계수의 의미를 해석할 수 있다.

5) 고계도함수의 의미를 알고 활용할 수 있다.

6) 미분가능한 함수들의 함수값을 선형 근사법에 의한 근사값으로 구할 수 있고 미분 dx의 의미를 알고 활용할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 제 7차 교육과정의 수학 II에서는 '다항함수의 미분법', 미분과 적분에서는 '여러가지 미분법'과 연계되고 중복되는 내용이 많으나 근사값과 미분 dx는 다루지 않고 있음에 유의한다.

2) 접선과 속도와 같은 구체적인 예에서 순간변화율 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$과 같은 형태가 자주 나타나므로 특별한 명칭을 사용하여 미분계수라 정의하였다. 이것은 밀도, 전류, 힘, 화학에서의 반응율, 군락의 성장률, 경제학의 한계비용, 심리학에서 성취 증진율, 사회학의 유언비어의 전파율 등의 다양한 영역에서 폭넓게 나타난다. 이처럼 단순한 수학적 개념인 미분계수가 여러 영역에서 다양한 형태를 해석하기 위한 도구로 사용되어짐을 경험하게 함으로써 수학의 추상성에 대한 위력을 실감하게 한다.

3) '미분가능하다'는 의미를 기하학적으로, 또는 수치적으로 다양하고 직관적으로 인식시키는 교수방법을 모색한다. 컴퓨터 그래픽 기능을 이용해 미분가능한 점의 근방에서는 그래프가 직선으로 보임을 확인함으로써 접선의 기울기와 연결시키고 $f(x+h)-f(x)/h$ 값의 변화 상태를 표로 만들어 값을 계산함으로써 극한 방법으로 정의한 $f'(x)$의 의미를 확인시킨다. 더 나아가 미분가능하지 않은 점들을 분류하고 컴퓨터를 이용하여 미분불가능한 점의 특징을 조사하게 한다.

4) 도함수의 많은 성과들 중 하나는 미분가능한 함수

들의 근사값을 아는 것으로, 선형 근사법은 x에 가까운 a점에 대해 $f(a)$와 $f'(a)$를 구하기 쉬울 때 매우 유용하며 f의 Taylor 다항식에 의한 근사로 확장된다.

5) 미분 개념은 근사값뿐 만 아니라 미분과 적분에서 변수의 치환과 연결될 수 있음을 염두에 둔다.

(4) 미분법의 응용

1) 함수의 일계도함수와 이계도함수를 이용해 최대값, 최소값을 구할 수 있고 이들 값을 추정하는데 공학도구를 활용할 수 있다.

2) 평균값 정리의 의미를 이해하고 이를 함수의 증가·감소 상태를 판별하거나 지수적 성장과 감소와 같은 여러 가지 응용문제에 활용할 수 있다.

3) 무한대에서의 극한과 수평 점근선을 구할 수 있고 이것의 의미를 해석하고 그래프를 그릴 때 활용할 수 있다.

4) 극한과 연속성, 도함수를 이용해 그래프의 증가, 감소상태와 오목성과 볼록성, 변곡점 그리고 수직 점근선과 수평점근선 등에 관한 모든 정보를 결합하고 분석하여 함수의 그래프의 개형을 정확히 그릴 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 제 7차 교육과정의 수학II와 미분과 적분에서 미분법 단원의 '도함수 활용'에서 접선의 방정식, 평균값 정리, 함수의 증가·감소 판정, 극대·극소 판정법, 그래프 개형 그리기, 속도와 가속도에 관한 문제 활용을 다룬다. 계산문제에 익숙한 학생들에게는 습득한 내용의 활용의 미와 가치를 제대로 전달하는데 초점을 맞춘다.

2) 함수의 최대값, 최소값을 추정한다든지, 그래프를 그릴 때 그래픽 계산기나 컴퓨터에서 정보를 얻는 방법을 알게 하고 도함수에 의해 곡선의 증가나 감소상태, 극점, 변곡점과 같은 정보와 결합시켜 보다 정확한 함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

3) 극값과 평균치 정리가 다양한 생활 영역의 최적화 문제와 개체수에 비례하는 개체증가율의 문제에서 어떻게 응용되는지를 경험하게 함으로써 미분의 유용성과 수학적 정리의 활용 가치를 느낄 수 있게 한다.

4) 학생들은 함수가 그래프로 표현되었을 때 도함수나 2계 도함수를 구하는 문제나 역으로 도함수의 그래프가 주어졌을 때 함수에 대한 정보를 이끌어 내는 면이 약하므로 그래프와 기하적 해석에 관심을 둔다.

(5) 적분과 정적분의 활용

1) 넓이와 부피를 구하기 위한 구분구적법에 의해 정적분을 도입하고 물리적 상황에서의 합의 극한을 정적분으로 인식할 수 있으며 기호의 의미나 표현을 올바르게 사용할 수 있다.

2) 정적분과 부정적분과의 관계를 알고, 미적분학의 기본 정리를 이용해 여러 가지 함수의 정적분을 구하고 다양한 예와 응용에서 전체 변화 정리의 의미를 이해한다.

3) 입체도형의 부피와 가하는 힘이 변하고 있을 때 일에 대한 정의를 정적분을 이용해 이끌어내고 이를 활용할 수 있다.

4) 함수의 평균값에 대한 정의를 정적분을 이용해 이끌어내고 적분에 대한 평균값 정리를 이해하고 활용할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 제 7차 교육과정의 측정영역에서 평면도형의 둘레와 넓이(5-가, 5-나), 직육면체의 겉넓이와 부피(6-가), 원주율과 원넓이, 원기둥의 겉넓이와 부피, 곡선도형(원)의 넓이를 직선도형(삼각형)넓이의 합으로 계산한다(6-나). (7-나)에서는 부채꼴의 넓이와 호의 길이, 입체도형의 겉넓이와 부피를 구하고 수학 II와 미분과 적분의 적분법에서 부정적분과 정적분을 다룬다.

2) 곡선 도형의 넓이에 대한 직관적 개념을 넓이에 대한 정확한 정의로 정립시키기 위해 학생들의 합의점이 돌출될 수 있도록 토의과정을 거치고 곡선 아래의 넓이나 물체의 주행 거리가 동일한 형태의 극한 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\Delta x$을 취하고 있음에 주목하여 정적분 정의의 필요성을 이끌어 낸다.

3) 현행 고등학교 과정에서는 정적분보다 먼저 부정적분을 미분의 역으로 도입하므로 정적분은 부정적분과 실제로는 다른데도 학생들은 정적분 자체의 의미보다는 계산법에 익숙하고 치중해 있는 경향이 있다. 따라서 리만(Riemann)합의 극한인 정적분이 다양한 분야에서 어떻게 응용되는지를 제대로 알기 위해서는 부정적분보다

정적분이 먼저 소개되어야 한다.

4) 접선문제로 시작된 미분학과 넓이문제로 탄생한 적분학은 각각 독립적으로 발달하였으나 서로 역과정으로 밀접하게 연결되어 있음을 밝혀낸 미적분학의 기본정리의 이론적 가치와 복잡한 넓이와 부피 문제, 곡선의 길이를 부정적분으로 매우 간단히 구할 수 있게 된 유용성을 학생들이 충분히 느끼고 감상할 줄 아는 안목을 갖게 한다(Swann, 1997; 한대희, 1999).

5) 이 단원은 정적분의 정의가 다양한 영역에서 어떻게 나타나는가를 살핌으로써 적분의 본질을 알리고 응용력을 신장시키는데 중점을 둔다.

6) 적분에 대한 평균값 정리와 전체 변화정리의 기하학적 의미와 다양한 영역에서의 이들의 활용가치를 염두에 둔다.

(6) 역함수

1) 미분 가능한 함수의 역함수의 도함수를 구하고 기하학적 의미를 이해한다.

2) 일반 지수함수로부터 자연 지수함수, 로그함수를 이끌어내고 이들의 도함수를 구할 수 있다.

3) 적분으로 정의한 자연로그함수로부터 시작하여 자연 지수함수, 일반 지수함수, 일반 로그함수를 이끌어내는 방법을 이해한다.

4) 쌍곡선 함수와 그의 도함수를 구하고 이들의 성질을 이끌어 낼 수 있다.

5) 역삼각함수, 역쌍곡선 함수, 그들의 도함수를 구하고 그래프와 성질을 이해할 수 있다.

6) 극한에서 $\frac{0}{0}$과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 부정형의 유형들을 분류하고 로피탈(L'Hospital) 법칙이 가지는 의미와 적용되는 조건을 정확히 알고 활용할 수 있다.

【지도상 유의점】

1) 7차 교육과정의 수학 I의 대수 영역에서 지수와 로그에 대해 다루고 해석 영역에서는 지수함수와 로그함수에 대해 다룬다. '미분과 적분'의 삼각함수, 함수의 극한, 미분법의 단원이 이 단원과 연계성을 가지며 거기에서는 삼각함수, 지수함수와 로그함수의 극한값과 도함수를 구하고 매개변수로 나타내어진 함수와 역함수의 미분법을 다룬다.

2) 지수함수와 로그함수를 정의하고 이 함수들의 성질과 도함수를 설명하는데는 두 가지 방법이 있다. 하나는 지수함수로 시작해서 그의 역함수로 로그함수를 정의하는 것으로 매우 직관적인 방법으로 고등학교에서는 이 방법을 택하고 있다. 다른 한 가지 방법은 적분으로 로그를 정의하여 그 함수의 역함수로 지수함수를 정의하는 방법인데, 이 접근방법은 전자보다 덜 직관적이나 함수의 성질들이 더 쉽게 유도된다.

3) f가 미분 가능한 일대일 대응 함수일 때 기하학적 방법을 이용하여 f^{-1}의 미분가능성을 예측하고 미분계수를 구하는데 학생들의 직관적 이해를 도울 수 있다.

4) e가 어떻게 정의되는지를 알아보고 극한값으로의 표현도 구한다.

5) 지수함수 e^x과 e^{-x}을 적당히 결합하여 얻은 쌍곡선함수들은 매개변수로서 쌍곡선을 나타내므로 이렇게 명칭을 부여한 것이므로 이들의 도함수는 로그함수로 표현됨을 예측할 수 있다. 쌍곡선함수의 과학과 공학에의 응용은 빛, 속도, 전기, 방사능 같은 실체가 점진적으로 흡수되거나 소멸되는 경우에 일어나고 현수선은 $y=c+\cosh\frac{x}{a}$로 표현된다.

6) 로피탈 법칙은 일방 극한과 무한에서의 극한에 대해서도 유효하며 이것의 의미는 컴퓨터의 줌 기능을 이용하면 확인할 수 있다. 즉, 미분 가능한 두 함수 f, g가 $x \to a$일 때, 0으로 접근할 때, 점 $(a, 0)$ 근방을 확대해 나가면 그 그래프들은 점차 직선으로 보이므로 그것들의 비가 도함수의 비와 같다는 것을 확인할 수 있다.

(7) 적분법의 기법

1) 부분적분의 의미와 이 적분법이 유용한 함수 유형을 이해하고 구할 수 있다.

2) 삼각함수, 무리함수, 유리함수의 적분을 구하고 활용할 수 있다.

3) 문제에 따라 사용되어야 할 적절한 적분방법을 찾아내고 이를 적용할 수 있다.

4) 적분표를 보고 적분하는 법을 알고 컴퓨터를 이용해 적분할 수 있다.

5) 정적분의 근사값을 구하는 방법들을 이해하고 활용할 수 있다.

6) 정적분의 개념을 확장한 이상적분의 개념을 이해

하고 활용할 수 있다.

【지도상 유의점】

1) 제 7차 교육과정의 '미분과 적분'의 적분법 단원에서 여러 가지 함수에 대한 부정적분과 정적분을 다루며 거기서 삼각함수, 지수함수와 로그함수의 부정적분과 치환적분법, 부분 적분법을 다룬다.

2) 부분 적분은 다항식, 지수함수, 로그, 삼각함수 등 등을 곱한 형태를 적분할 때 유용하며 $\int \sin^n x\, dx$와 $\int \cos^n x\, dx$ 의 차수를 낮출 때 유용하다.

3) 삼각항등식을 이용하면 삼각함수들의 곱으로 이루어진 적분이나 주어진 근호 식에 대해 효과적인 삼각치환을 할 수 있다. 유리함수의 적분은 분수식들의 합으로 변형시켜 적분을 구하는데 결과는 항상 유리함수, 로그, 역 탄젠트 함수의 형태로 나타난다

4) 대수적 계산이 가능한 컴퓨터를 이용하여 적분을 구할 때, 컴퓨터는 특수한 역도함수로 답하므로 결과를 올바르게 해석하고 활용하기 위해서 학생들이 다양한 소프트웨어를 경험할 수 있도록 만들어야 한다.

5) 정확한 역도함수를 구하는 것이 불가능하거나 함수가 기계적인 수치나 수집된 자료를 통한 과학적 실험으로부터 나온 것으로 함수에 대한 식이 없을 때는 중점 법칙과 사다리꼴 공식, Simpson 공식을 이용하여 정적분의 근사값을 구하도록 한다.

6) 무한 구간에서의 f의 특이적분과 불연속함수의 적분은 각각 유한 구간에 대한 적분들의 극한과 연속 가능한 구간에 대한 적분들이 극한으로 정의하여 계산하는 법을 통해 무한에 접근해 가는 수학적 방법을 익히게 한다. 이상적분은 양항 급수의 수렴판정법인 적분판정법과 확률분포에서 아주 중요하게 활용된다.

(8) 다양한 적분의 응용

1) 곡선의 길이와 회전곡면의 넓이를 구할 수 있다.

2) 물리학에서의 일, 모멘트, 유체정력 등과 같은 응용문제를 적분을 이용하여 해결할 수 있고 타 교과와의 관련성을 이해할 수 있다.

3) 경제학과 생물학, 확률에서 적분의 응용을 이해하고 구할 수 있다.

【지도상 유의점】

1) 제 7차 교육과정의 '수학II'와 '미분과 적분'의 적분법단원에서 정적분 활용이라는 이름으로 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 입체도형의 부피, 그리고 속도와 거리에 관한 문제를 주로 다루고 있다.

2) 다양한 영역에서 리만합의 극한 모양이 나오도록 유도하여 정적분을 이용할 수 있다는 것을 보여줌으로써, 수학의 단일화되고 추상화된 방법의 응용성을 체험하게 한다.

3) 물리학과 공학, 경제학과 생물학, 확률과 같은 다양한 분야에서의 적분 응용문제를 통해 적분도 미분만큼 실생활과 밀접한 관계에 있음을 알게 하고 학생들로 하여금 다양한 예를 찾아보게 한다.

7. 미적분학 II의 단원별 교육목표와 지도상 유의점

(1) 무한 수열과 무한급수

1) $\varepsilon - N$ 방법에 의한 극한 정의에 의해 무한수열과 무한급수의 수렴, 발산을 판별하고, 극한에 관한 성질을 이끌어 낼 수 있다.

2) 급수의 여러 가지 수렴 판정법(적분판정법과 비교판정법, 비판정법과 근판정법, 교대급수 판정법 등)을 이해하고 효율적인 급수 판정법을 선택하고 적용할 수 있다.

3) 중요한 함수들의 Taylor 급수와 수렴반경을 구할 수 있고 Taylor 다항식을 이용해 오차범위 내에서 함수값의 근사값을 구할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 제 7차 교육과정의 '수학I'의 수열의 극한 단원에서 '무한수열의 극한'과 '무한급수'를 다룬다. 무한수열과 무한급수의 수렴, 발산의 뜻을 직관적으로 이해하게 하고 판별하며 무한 등비급수의 합과 활용에 대해 다룬다.

2) 자연수 집합을 정의역으로 가지는 함수 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$을 수열이라 하고 $f(n) = a_n$ 으로 정의하는 수열의 형식적 정의를 도입함으로써 위상수학에서 net 도입의 기초가 되게 하고 수열의 극한을 함수의 무한극한으로 해석할 수 있도록 한다.

3) 무한등비 급수가 사용되는 예(제논의 파라독스, 아르키메데스가 구한 포물선의 구적방법, Cantor 집합과 프랙탈 개념 등)를 많이 소개함으로써 무한등비 급수의

활용성과 중요성을 인식시킨다.

4) 컴퓨터를 이용하여 급수를 계산할 때 나타나는 문제점을 인식하여 부정확한 결론에 도달하지 않도록 한다. 조화급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 는 발산함에도 불구하고 부분합 수열은 매우 느리게 증가하므로 컴퓨터로 계산하면 '조화급수가 수렴하지 않을까'하고 생각할 수 있다.

5) 유한합이나 절대수렴하는 급수는 항들의 순서를 재배열하더라도 합은 변하지 않으나 조건부 수렴하는 급수는 재배열에 의해 다른 합을 가질 수 있다.

6) 함수를 무한급수로 나타내는 이유는 적분하기 어려운 함수를 적분한다든지 부분합인 다항식으로 함수를 근사 접근시킴으로써 함수값을 다항식의 값을 이용해 근사치를 구할 때 유용하기 때문이다.

7) 수열의 극한 개념의 교수학적 양상에서 나타나는 극한에 대한 학생들의 생각과 학습장애를 고찰하고 이에 대한 수업전략에 관심을 가져야 한다(박선화 2000; 박임숙 외, 2002).

(2) 벡터, 직선과 평면

1) 공간에 직교 좌표계와 거리 개념을 도입하는 의미를 이해한다.

2) 벡터의 동치 개념과 다양한 표현법, 벡터의 합, 스칼라 배를 이해하고 이를 활용할 수 있다.

3) 벡터의 스칼라 곱과 외적의 의미와 성질을 이해하고 활용할 수 있다.

4) 벡터를 이용해 공간내의 직선과 평면의 방정식, 한 점에서 직선까지의 거리, 한 점에서 평면까지의 거리를 구할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 제 7차 교육과정 '수학II'의 기하 영역에서 공간에서의 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치관계, 정사영, 좌표공간에서 두 점 사이의 거리와 구의 방정식을 구하고 벡터의 연산과 내적, 좌표공간에서의 직선과 평면의 방정식을 다룬다.

2) 3차원 공간에서의 벡터와 거리개념 및 연산은 1차원, 2차원 공간구조의 확장이자 n차원 공간의 구조로 일반화, 추상화될 수 있다는 관점을 갖게 한다.

3) 벡터들의 합, 차에 대한 연산법칙이 가지는 기하학적 의미를 중요시하고 활용되는 다양한 예를 다루도록 한다. 두 벡터의 곱을 정의할 때 벡터의 합과 차와 같이, 두 벡터를 성분별로 곱하는 것은 물리학적 의미가 거의 없고 응용에서도 별 쓸모가 없다.

4) 스칼라 곱은 두 벡터의 사이각과 한 벡터의 다른 벡터위로의 정사영을 구할 때 유용하고 외적은 삼각형과 평행사변형 면적, 평면의 방정식과 힘의 비틀림 모멘트를 구할 때 유용하다.

5) 직선 l 은 l 상의 한 점과 직선과 평행한 벡터에 의해 유일하게 결정되므로 유향 성분인 벡터를 이용해 공간내의 직선을 다양하게 표현하는 법을 알게 한다.

6) 학생들은 벡터란 개념을 유클리드 평면벡터나 공간벡터에 국한하여 생각하는 경향이 있음을 유의하여 선형대수학에서 다룰 벡터 공간의 개념과 자연스레 연결되도록 한다.

(3) 벡터함수

1) 벡터 함수의 표현법과 극한·연속개념의 정의 방법, 연속 벡터함수와 공간 곡선사이의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있다.

2) 벡터함수의 미분계수의 기하학적 의미와 성질을 이해하고 활용할 수 있다.

3) 성분 함수을 이용한 벡터함수의 적분을 이해하고 미적분학의 기본정리를 이끌어내고 활용할 수 있다.

4) 공간곡선의 곡률과 곡률 반경을 구할 수 있고 이를 활용할 수 있다.

5) 매끄러운 공간곡선의 길이, 접선벡터와 법선 벡터, 법평면과 접평면을 구할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 벡터함수 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 의 그래프는 4차원이라 그릴 수 없으므로 연속 벡터함수 F 의 치역만을 공간곡선으로 표현하고, 역으로 공간에서의 곡선은 벡터함수의 형태로 표현할 수 있다. 벡터함수는 물리학에서는 나선형의 DNA 분자모양뿐만 아니라 균일한 자기장내에서 움직이는 전자의 경로, 위성의 움직임을 그리는 데 매우 유용하게 사용된다.

2) 벡터함수 F 의 극한과 연속성, 도함수와 적분은 F 의 각 성분들의 성분함수들의 극한과 연속성, 도함수와 적분을 구하는 문제로 귀결되므로 이를 통해 일변수 다가함수의 전개방식을 이해시키고 이들의 기하학적 의

미가 잘 전달될 수 있도록 한다.

3) 벡터함수의 도함수를 물리학적으로 응용한 것 중 가장 중요한 것은 운동에 적용한 것이다. 물체의 위치함수로부터 속도, 속력, 가속도 등을 구하고 뉴우튼의 제2 운동법칙과 중력의 법칙에서 케플러(Kepler)의 세 가지 법칙의 유도는 좋은 학습과제가 될 수 있다(Serway, 1999).

4) 곡률은 곡선이 얼마나 빠르게 방향을 바꾸는가 하는 것을 잰 것으로 매개변수의 표시방법과 무관한 곡선의 길이를 이용해 정의하며 공학문제를 푸는 데 중요한 역할을 한다.

5) 벡터함수의 접선과 법선은 직선이 아니라 벡터가 되며, 곡선 C 위의 점 P에서 법선벡터 $\boldsymbol{N}$과 종법선벡터 $\boldsymbol{B}$, 접선벡터 $\boldsymbol{T}$를 이용하여 법평면과 접평면을 정의한다. 이러한 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ 체계는 항공기와 우주선의 탄도계산에 이용된다.

(4) 편도함수

1) 다변수 함수를 등위선과 등위면을 이용해 표현할 수 있다.

2) 다변수 함수의 극한과 연속개념을 일변수 함수의 확장으로 이해하고 활용할 수 있다.

3) 편도함수의 정의와 표기법 그리고 기하학적 의미를 알고 구할 수 있다.

4) 다변수 함수의 방향도함수와 그래디언트(gradient)를 구하고 이를 활용할 수 있다.

5) 이변수 함수의 근사값을 접평면을 이용해 구할 수 있다.

6) 이변수 함수의 극값을 일계 편도함수와 이계 편도함수, Lagrange승수를 이용해 구하고 활용할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 일변수 함수에 대해 성립했던 성질들이 다변수 함수에서는 어떤 개념으로 대응되는지를 인식하고 구조적으로 생각하는 법을 익히게 한다.

2) 실제 세계에서 대부분의 현상들은 일반적으로 둘 또는 그 이상의 변수들에 의존하므로 다변수함수 훨씬 많이 접하게 되는데 이들을 가시화하기 위해서는 그래픽 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하여 그래프를 그리고 등위곡선과 등위곡면을 이용하는 것이 효율적이다.

3) 편도함수가 활용되는 예들을 조사함으로써 유용성을 인식한다. 열전도, 유체유학, 전기 포텐셜의 문제 등에서 중요한 역할을 하는 라플라스의 편미분방정식 $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$, 파도, 음파, 광파의 운동을 묘사하는 파동방정식 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 거시경제문제에서 생산함수 $P(L,K)$에서의 노동한계생산성 $\frac{\partial P}{\partial L}$, 무지개색의 배열순서에서 편도함수는 중요한 역할을 한다.

5) 이변수함수의 최대, 최소값 정리와 극대 극소값을 일계 편도함수와 이계 편도함수를 이용해 구하는 법, 접평면을 이용한 근사값, 연쇄법칙 등을 일변수함수와 비교하고 확장시키는 방법을 통해 다변수 함수에 적용되는 수학적 방법를 익히도록 한다.

(5) 중적분

1) 리만(Riemann) 합에 의한 중적분의 정의를 이해하고 반복적분을 이용하여 중적분값을 구할 수 있다.

2) 일변수 함수에서 성립했던 근사값 정리, 평균값정리, 곡선의 길이 등에 대응하는 정리들이 이변수 함수에도 적용되고 일반화되어 가는 과정을 이해하고 이들을 활용할 수 있다..

3) 극좌표와 구면좌표 상에서의 중적분을 구할 수 있다.

4) 중적분을 이용하여 입체의 부피, 곡면의 넓이를 구하고 물리학에서의 질량, 전하, 질량중심, 관성모멘트를 구할 수 있다.

【지도상 주의점】

1) 이변수함수의 중적분도 입체도형의 부피를 구하는 문제에서 출발하여 정의의 필요성을 먼저 보여준 후 도입하고, 중점 법칙, 사다리꼴 정리, 심프슨 정리를 이용하여 근사값을 구한다. 이중적분을 정의에 따라 계산하기는 어려우므로 반복적분으로 표현하여 구할 수 있는 푸비니(Fubini) 정리의 중요성을 인식시키고 이용하도록 한다.

2) 직사각형 영역에서의 이중적분을 먼저 정의한 다음 이를 이용해 일반영역에서의 중적분을 도입하는 것이 좋으며 반복 적분 시, 적분순서는 피적분함수, 적분의 영역한계, 사용의 편리성 등의 상황에 따라 결정하는 것이 좋다.

2) 이중적분이나 삼중적분에서 어느 좌표계를 이용하는 것이 쉽게 적분을 구할 수 있는지를 판단하고 적분영역의 표시를 정확히 나타낼 수 있도록 한다.

3) 중적분을 이용한 다양한 영역에서의 활용을 일변수 함수의 적분 활용과 비교하고 n변수인 경우에도 확장될 수 있음을 주지시킨다. 이중적분은 입체도형의 부피와 곡면의 면적, 질량, 전하, 질량중심, 관성모멘트의 계산에 활용되고 두개의 확률변수를 가지는 확률밀도함수에도 이용된다.

8. 결 론

대학교 해석 영역의 첫 단계인 미적분학은 고등학교에서 직관적으로 다룬 극한과 무한 개념을 엄밀한 형식적 체계를 갖추어 전개하는 해석학에 연결시키고 수학의 여러 분야에 접근하는데 필수적으로 요구되는 과목일 뿐 아니라, 실제 생활 속에서 수학의 유용성을 가장 쉽게 체험하게 하고 문제해결의 강력한 도구를 제시해주는 실용적 면이 가장 많은 과목이다. 또한 학생들이 고등학교 교사로 부임했을 때 수학 I 과 수학 II, 미분과 적분 과목과 바로 직결되는 영향력이 큰 강좌이므로 교과내용에 대한 지식을 심도 있고 전체적인 연계 구조하에서 파악할 수 있도록 해야 나중에 그들이 가르칠 학생들에게 보다 적합한 형태로 재창출해 내고 적절한 교수 방법을 택할 수 있다.

교사의 학습경험과 수학교과에 대한 지식, 수학에 대한 신념은 교사의 교수방법에 많은 영향을 끼칠 수 있기 때문에(Raymond, 1997) 수학에 대한 이미지를 긍정적으로 바꾸고 문화로써 수학을 즐길 수 있는 사회적 풍토를 조성하기 위해서는 수학교사들이나 수학을 전공한 사람들이 먼저 수학의 유용성과 아름다움을 먼저 느끼고 문화 창달자의 역할을 하여야 한다.

본고에서는 교사들이 그러한 역할을 제대로 수행해 나갈 수 있도록 교사 양성 대학의 미적분학 강좌의 운영 방안을 다음과 같은 내용을 염두에 두고 개발해 보았다.

첫째, 미적분 교과내용은 동기부여와 필요성을 가지고 도입되어야 하며 학생들에게 미분과 적분은 실제 무엇이고 이것을 하는 목적은 무엇이며, 미분과 적분을 계산하는 정교한 방법들이 왜 필요하고 어떤 분야에 활용되는지를 알도록 해야 한다.

둘째, 미적분학의 수학적 개념이 중등학교에서의 수학 교과 내용과 어떻게 연계되고 해석되어지는지, 해석학과 미분방정식, 선형대수학, 벡터해석학, 위상수학의 개념과 어떻게 연결되는지를 제시하여 수학적 위계성과 연관성 속에서 이 교과목의 내용이 이해하도록 했다.

세째, 다양한 예들에서 나타나는 현상들이 수학적 개념으로 추상화되고 단순화되어 정립되어 가는 과정을 통해 수학하는 즐거움과 논리적 아름다움을 제공함으로써, 예비교사들이 실생활에서 수학을 행하고 문화로서 수학을 즐길 수 있는 수학적 기질과 수학에 대한 긍정적 성향을 계발하는 데 목적을 두었다.

미적분학의 내용이 방대하여 교과지식을 완벽히 소화하기로는 강좌 개설기간이 짧을 수도 있으므로 미적분 계산 방법의 숙달보다는 수학적 개념이 만들어진 모티브가 무엇이고 어디에 활용되며, 어떻게 일반화되어 가는지에 중점을 두었다.

미적분학 강좌는 어떻게 운영하느냐에 따라 앞에서 언급한 결실들을 효율적으로 수확할 수 있는 매우 중요하면서도 실용적인 과목이다. 그러므로 교사는 수학적 개념 교수 시, 역사적으로 이 개념이 어떻게 발전하고 학생들이 어떠한 개념적 장애를 가지고 있는가를 파악하여 학생들에게 접근해 나가야 할 교육적 방법을 끊임없이 연구해야 한다. 따라서 중·고등교육에서는 고유의 개념상(concept images)과 개념을 내면화시키면서(Tall 외, 1981) 점차적으로 해석학을 형식화로 유도할 수 있는 인지적 토대를 마련해 줄 수 있는 방안을 지속적으로 강구할 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 제7차 교육과정 교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8]

김안현·김향숙·류재칠·신준용·이강래·표용수 (2000). 수학에서의 Mathematica 활용, 서울: 경문사.

김진규·김찬종·류희찬·임형 (1996). 학력평가 국제비교연구: TIMSS 본검사 질문지 분석 연구보고서, 서울: 국립교육평가원.

김영익·이규봉 (1999). 아름다운 수학 Mathematica와

함께, 교우사.

박경수 · 한동승 (2001). MAPLE VI 미분적분학을 중심으로, 서울: 경문사.

박문환 · 민세영 (2002). 역사발생적 관점에서 본 미적분 지도, 대한수학교육학회지 <학교수학> 4(1), pp.49-62.

박선화 (2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애와 극복방안 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육연구> 10(2), pp.247-262.

박임숙 · 김홍기 (2002), 고등학교에서의 극한개념, 교수 · 학습에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육연구> 12(4), pp.557-582.

신현용 (2003). 교사 양성대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.431-452, 서울: 한국수학교육학회.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

우정호 (1997). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

전명남 (2003). 무한 개념이해 수준의 발달과 반성적 추상, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(3), pp.303-326, 서울: 한국수학교육학회.

조벽 (2002). 조벽교수의 명강의 노하우 & 노와이, 해냄.

한대희(1999) 미적분학의 기본정리에 대한 역사-발생적 고찰, 대한수학교육학회지 <수학교육연구> 9(1), pp.217-228.

Courant R. & Robbins H. 지음 (2002), 수학이란 무엇인가, Ian Stewart 개정, 박평우 · 김운규 · 정광택 역, 서울: 경문사.

Croom F. H. (1989). *Principles of Topology*, Sauders College Publishing.

Ellis R. & Gulick D. (1998), 수학교재편찬 위원회 역, 미분적분학과 해석기하학, 청문각.

Ernest P. (1995) Values, gender and images of mathematics: a philosophical perspective, Int. *J. Math. Educ. Sci. Technol.* 26(3), pp.449-462.

Eves H. (1994), 수학의 위대한 순간들, 허민 · 오혜영 옮김, 서울: 경문사.

Johnsonbaugh, R. & Pfaffenberger (1981). *Foundations of Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc, New York.

Lynch, M. (1994), Advanced calculus reform: continuity and integration, Int. *J. Math. Educ. Sci. Technol.* 25(4), pp563-571.

Mullis, I. V. S. et al., (2000). *TIMSS 1999 international mathematics report. Chestnut Hill, MA*: The International Study Center, Boston College.

Noh, S. (1998). *Prospective mathematics teachers' preconceptions about learning and teaching mathematics*, Unpublished master thesis, Louisiana State University.

Sells, L. (1973). *In Proceedings of the Conference on Minority Graduate Education*, Berkeley, University of California, pp.37-49.

Sierpinska, A (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits, *Journal of Research in Mathematics Education*, 18.

Serway R. A. (1999). 기초물리학, 임종수 외 옮김, 청범출판사.

Stewart J. (2001), 미분적분학, 수학교재편찬위원회 역, 청문각.

Swann H. (1997), Commentary on Rethinking Rigor in Calculus: The Role of the Mean Value Theorem, *the American Mathematical Monthly* 104(3), pp.241-245.

Tall, D. (2003). 고등수학적 사고, 류희찬 · 조완영 · 김인수 옮김, 경문사.

Tall D. (1997). Functions and Calculus, In Bishop et al., *Interatonal Handbook of Mathematics Education*, pp.289-325, Dortrecht; Kluwer.

Tall, D. (1975), A Long-Term Learning Schema for Calculus and Analysis, *Mathematical Education for Teaching* 2(5), pp3-16.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12.

Raymond, M. A. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice, *Journal for Research in Mathematics Education* 28(5), pp.550-576.

Zulkardi (2002). *How to design mathematics lessons based on the realistic approach?* RME. Literature Review.

http://archives.math. utk.edu/visual.calculus/index.html

http://www.calculus-help.com

http://www.ma.iup.edu/projects/CalcDEMma/Summary.html

Learning Program of Calculus Related Courses for Training of Mathematics Teacher of Secondary Schools

Kang, Mee-Kwang

Department of Mathematics, Dongeui University

E-mail: mee@dongeui.ac.kr

The main purpose of this work is to propose programs of calculus for the department of mathematics education of teacher training universities. There is a description of the characteristics, goal and contents of calculus course for pre-service teacher, followed by principles for teaching the subject. We suggest the constituents and something being kept in mind for each part in calculus.

* ZDM Classification : B55, D45

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B02, 97D02

* Key Word : Teacher training, pre-service teacher, calculus.