

반복법을 사용한 단층영상 재구성을 위한 투사기 및 역투사기의 고속 구현

김수미 · 이수진 · 김용호

배재대학교 전자공학과

(2003년 9월 30일 접수, 2003년 10월 31일 채택)

Fast Implementations of Projector-Backprojector Pairs for Iterative Tomographic Reconstruction

S.M. Kim, S.J. Lee, and Y.H. Kim

Department of Electronic Engineering, Paichai University

(Received September 30, 2003. Accepted October 31, 2003)

요약: 반복법을 사용한 영상재구성은 기존의 여과역투사 방법에 비해 월등한 장점을 가지고 있으므로 방출 전산화단층촬영에 있어 매우 중요한 역할을 해왔다. 그러나, 반복법을 사용한 영상재구성은 데이터의 투사 및 역투사 계산의 반복으로 이루어져 있으므로 한 영상을 재구성하는데 필요한 계산량은 알고리즘의 구현을 위해 사용된 투사기 및 역투사기의 성능에 크게 좌우된다. 본 연구에서는 투사기 및 역투사기를 구현하기 위한 대표적 방법들의 성능을 정량적으로 비교한다. 각 구현방법에 있어서 투사-역투사 계산에 필요한 연산량을 줄이기 위해 이전에 계산된 결과들을 재사용함으로써 불필요하게 반복되는 연산들을 최소화하도록 하는 방법에 고찰한다. 실험결과에 의하면 선추적법은 연산속도 면에서 다른 방법에 비해 우수할 뿐 아니라, 정확성이 높은 개선된 영상을 제공하는 것으로 나타났다.

Abstract: Iterative reconstruction methods have played a prominent role in emission computed tomography due to their remarkable advantages over the conventional filtered backprojection method. However, since iterative reconstructions typically are comprised of repeatedly projecting and backprojecting the data, the computational load required for reconstructing an image depends highly on the performance of the projector-backprojector pair used in the algorithm. In this work we compare quantitative performance of representative methods for implementing projector-backprojector pairs. To reduce the overall cost for the projection-backprojection operations for each method, we investigate how previously computed results can be reused so that the number of redundant calculations can be minimized. Our experimental results demonstrate that the ray tracing method not only outperforms other methods in computation time, but also provides improved reconstructions with good accuracy.

Key words: Emission tomography, Iterative reconstruction, Ordered subsets, Projection, Backprojection, Image rotation

서 론

방출 전산화 단층촬영술(emission computed tomography, 이하 ECT)에서 주로 사용되는 영상재구성 알고리즘은 투사과정의 단순 역변환에 해당하는 여과역투사(filtered backprojection, FBP) 방법 이다. 그러나, FBP 영상재구성법은 광자방출의 물리적·통계적 특성에 의한 영향을 무시하고 투사과정의 수학적 단순역변환을 사용하는 방법이므로 정량적 측면에서 재

구성된 영상의 질이 매우 저조할 뿐 아니라 역투사 시 투사데이터에 포함된 잡음이 역투사선을 따라 각 화소에 그대로 전달되어 재구성된 영상의 전 영역에 걸쳐 방사형태의 잡음이 강하게 나타난다.

한편, 통계학적 영상재구성은 ECT 영상 잡음의 주된 원인이 일정시간 동안 방사성물질로부터 방출되는 광자 개수의 변화에 기인하므로 이를 수학적으로 묘사할 수 있는 포아송(Poisson) 확률분포함수를 이용하여 영상재구성 알고리즘을 유도함으로써 FBP 영상재구성의 단점을 극복할 수 있는 매우 우수한 방법으로 알려져 있다[1]. 통계학적 영상재구성법 중 현재 실용화 단계에 있는 대표적인 예가 기댓값 최대화(expectation maximization, EM)[2] 방법이다. EM은 기존의 FBP에 비해 정량적으로 양질의 영상을 제공하는 우수한 알고

<속보논문>

본 연구는 과학기술부 원자력기초연구개발과제 연구비로 수행되었음.

통신저자: 이수진, (302-735) 대전시 서구 도마 2동 439-6

배재대학교 전자공학과

Tel. 042)520-5711, Fax. 042)520-5773

E-mail. sjlee@pcu.ac.kr

리즘으로 알려져 있다. 그러나, EM 방법은 최종 영상을 얻기 까지 투사(projection)와 역투사(backprojection) 과정을 약 20~50회 정도 반복하므로 근사적으로 FBP 방법의 약 20~50배 정도의 연산시간을 필요로 하는 단점을 가지고 있다.

한편, 최근에는 투사데이터의 블록화를 통해 고속화한 OS-EM(ordered subsets EM)[3] 연산방법이 소개되어 기존의 반복연산횟수를 급격히 감소시키고도 양질의 영상을 얻을 수 있게 되었다. 그러나 OS-EM 방법도 각 블록 내에서 투사와 역투사의 반복연산이 필요하므로 연산시간을 최소화시키기 위해서는 반복되는 연산과정의 요소 중 불변하는 항목을 연산의 초기에 미리 메모리에 저장한 뒤 투사 및 역투사의 반복연산 시 이들을 재사용하는 것이 필수적이다.

본 논문에서는 OS-EM 영상재구성 알고리즘을 위한 대표적인 투사기 및 역투사기의 성능을 정량적으로 비교함으로써 알고리즘에 최적한 투사기 및 역투사기의 구현법을 제시한다. 본 논문에서 고려하는 투사기 및 역투사기의 대표적 세 가지 유형은 (i) 화소구동법(pixel-driven method, 이하 PDM)(ii) 선추적법(ray-tracing method, 이하 RTM)(iii) 회전기반법(rotation-based method, 이하 RBM) 으로서 PDM 및 RTM에서는 실제 시스템에서 투사데이터를 형성하는 물리적 과정과 같이 검출기를 고정된 물체주변으로 회전시키는 반면, RBM에서는 검출기를 고정하고 대상 물체를 회전시키는 가상적인 방법이다. RBM은 인체를 촬영하기 위한 실제 시스템에서는 물리적으로 적용될 수 없는 방법이나 감쇠(attenuation) 및 검출기 응답(detector response) 특성 등에 의한 물리적 현상을 모델링하기가 매우 용이하므로 영상 재구성 시 매우 효과적으로 사용될 수 있는 방법 중의 하나이다[4]. 본 연구에서는 위의 세 가지 방법을 독립적으로 구현하여 OS-EM 알고리즘에 적용한 뒤 연산속도 면에서의 성능을 비교하고 정량적 차원에서 재구성된 영상의 질을 비교함으로써 OS-EM 알고리즘의 효율적 구현에 적합한 투사기 및 역투사기의 구현 방법을 제시한다.

OS-EM 알고리즘의 개요

ECT에서 방출원(emission source)인 방사성물질로부터 방출되는 광자가 어느 특정 검출기에 도달되는 과정을 통계학적으로 표현한 EM 알고리즘의 최종 식은 다음과 같이 주어진다 [2]:

$$\hat{f}_{ij}^{n+1} = \frac{\hat{f}_{ij}^n}{\sum_{t\theta} H_{t\theta,ij}} \cdot \sum_{t\theta} \frac{g_{t\theta} H_{t\theta,ij}}{\sum_{kl} H_{t\theta,kl} \hat{f}_{kl}^n} \quad (1)$$

식(1)에서 \hat{f}_{ij} 는 복원하고자 하는 영상 내의 (i, j) 에 위치한 화소이고 \hat{f}_{ij}^n 는 \hat{f}_{ij} 의 n 번째 추정치, \hat{f}_{ij}^0 는 \hat{f}_{ij} 의 초기값이다. $g_{t\theta}$ 는 검출기 t 의 위치에서 각도 θ 의 방향으로 검출된 투사값을 의미하며, $H_{t\theta,ij}$ 는 (i, j) 위치에서 방출된 단일 광자가 검출기의 t 위치에서 각도 θ 의 방향으로 검출될 확률,

표 1. OS-EM 알고리즘의 개요

```

SET  $n=0, \hat{f}^0$ 
REPEAT until convergence  $\hat{f}^n$  of.
  FOR subsets  $n=1, \dots, N$ 
    · Project :
      calculate  $\hat{g}_{t\theta} = \sum_{ij} H_{t\theta,ij} \hat{f}_{ij}^k, \forall (t, \theta) \in S_n$  (a)
    · Backproject :
      calculate  $\sum_{t\theta} H_{t\theta,ij} \cdot \frac{\hat{g}_{t\theta}}{\hat{g}_{t\theta}^n}, \forall (t, \theta) \in S_n$  (b)
    · Calculate  $\sum_{t\theta} H_{t\theta,ij}, \forall (t, \theta) \in S_n$ 
    · Update pixels using
       $\hat{f}_{ij}^{k+1} = \frac{\hat{f}_{ij}^k}{\sum_{t\theta} H_{t\theta,ij}} \cdot \sum_{t\theta} H_{t\theta,ij} \cdot \frac{\hat{g}_{t\theta}}{\hat{g}_{t\theta}^n}$ 
  END REPEAT
    
```

즉 시스템 행렬을 의미한다. 식 (1)에서 $g_{t\theta}$ 는 관측된 투사데이터인 반면 $\sum_{kl} H_{t\theta,kl} \hat{f}_{kl}^n$ 는 추정된 투사값의 평균치이므로 이를 $\hat{g}_{t\theta}^n = \sum_{ij} H_{t\theta,ij} \hat{f}_{ij}^n$ 로 정의하여 식 (1)을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\hat{f}_{ij}^{n+1} = \frac{\hat{f}_{ij}^n}{\sum_{t\theta} H_{t\theta,ij}} \cdot \sum_{t\theta} \left\{ H_{t\theta,ij} \cdot \frac{g_{t\theta}}{\hat{g}_{t\theta}^n} \right\} \quad (2)$$

식(2)를 분석해 보면 우변의 두 번째 항 $\sum_{t\theta} \{ \}$ 이 $g_{t\theta} / \hat{g}_{t\theta}^n$ 의 역투사에 해당됨을 알 수 있다. 따라서 EM 알고리즘은 (i) $g_{t\theta}$ 를 구하기 위한 투사과정과 (ii) $\sum_{t\theta} H_{t\theta,ij} g_{t\theta} / \hat{g}_{t\theta}^n$ 항을 계산하기 위한 역투사 과정으로 요약된다. 즉, EM 알고리즘을 구현하기 위해서는 투사기와 역투사기의 구현이 필수적이다. 그런데, EM 알고리즘은 역투사의 계산이 단 한번만 수행되는 FBP 영상재구성법과는 달리 수렴된 최종 해를 얻을 수 있을 때 까지 투사 및 역투사의 연산이 반복 수행되어야 하는 바, 전체 연산 시간의 단축을 위해서는 효율적인 고속 투사기-역투사기의 구현이 필요하다.

최근에 EM 알고리즘의 수렴속도를 향상시키기 위한 다양한 방법들이 소개되었는데, 이 중 OS-EM (ordered subsets EM)[3]은 기존의 EM 알고리즘을 간단히 수정함으로써 쉽게 구현될 수 있는 장점이 있어 이를 응용한 알고리즘들이 다수 소개되었다. OS-EM 알고리즘은 투사데이터 $g_{t\theta}$ 를 몇 개의 블록 (또는 부분집합)으로 구분한 뒤 블록단위로 투사 및 역투사의 연산을 수행하므로 기존의 EM에 비해 블록의 개수가 증가할수록 알고리즘의 수렴속도가 증가한다. 기존의 표준 EM 알고리즘에 투사데이터를 N 개의 블록으로 구분하고 n 번째 블록을 S_n 으로 표기하여 OS-EM 알고리즘을 요약하면 표 1과

같다.

OS-EM의 경우 위에 언급된 바와 같이 투사데이터를 N 개의 블록으로 구분하여 표 1에 있는 식(a)의 투사와 식(b)의 역투사를 각 블록단위 (S_1, S_2, \dots, S_N)로 수행한다. 표준 EM 알고리즘은 OS-EM에서 $N=1$ 인 경우에 해당되므로 OS-EM을 구현할 경우 필요에 따라 표준 EM으로도 실행할 수 있다.

투사기 및 역투사기의 구현

1. 화소구동법 (PDM)

PDM은 주어진 각도에서 방사선을 따라 선적분에 의해 투사데이터를 계산하는 경우와는 달리 순차적으로 화소를 주사하면서 주어진 각도 θ 에 대하여 각 화소가 기여하는 검출기의 특정 위치 t 을 식 (3)을 사용하여 계산하고 이로 인한 투사값을 주변의 검출기 격자에 할당 및 축적함으로써 투사데이터 $g_{t\theta}$ 를 계산한다.

$$y \cos \theta - x \sin \theta = t \tag{3}$$

본 논문에서는 (i, j) 위치의 방출원 f_{ij} 가 θ 방향으로 방출하여 검출기의 t 위치에 도달하는 경우, 이것이 주변의 검출기 격자에 기여하는 양을 계산하기 위해 식 (4)와 (5)에 주어진 1차 (linear) 및 3차 (cubic) 보간법을 적용하였다.

$$\psi(\xi) = \text{tri}(\xi) = \begin{cases} \xi + 1, & -1 < \xi \leq 0 \\ -\xi + 1, & 0 < \xi < 1 \\ 0, & |\xi| \geq 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \frac{3}{2}|\xi|^3 - \frac{5}{2}|\xi|^2 + 1, & 0 \leq |\xi| < 1 \\ -\frac{1}{2}|\xi|^3 + \frac{5}{2}|\xi|^2 - 4|\xi| + 8, & 1 \leq |\xi| < 2 \\ 0, & 2 \leq |\xi| \end{cases} \tag{5}$$

투사 및 역투사 과정의 반복연산을 필요로 하는 EM 알고리즘에 있어서 주어진 각도 θ 에 대하여 각 화소 f_{ij} 가 기여하는 검출기 격자의 위치와 이에 대한 보간함수 값(또는 가중치)은 반복연산에 관계없이 일정한 값을 유지하므로 이들을 최초의 연산 시 메모리에 저장한 뒤 이후 재 연산과정 없이 단순히 읽어 들임으로써 EM 연산 시 반복연산으로 인한 계산시간을 급격히 감소시킬 수 있다. PDM의 경우 다음과 같은 두 가지 종류의 3차원 배열로 구성된 LUT(look-up table)를 고려할 수 있다.

- LUT1: 화소의 위치 (i, j) 및 투사각 θ 에 따른 검출기 격자의 위치 $k(i, j, \theta)$ 저장.

- LUT2: 화소의 위치 (i, j) 및 투사각 θ 에 따른 보간함수의 변수값 $\xi(i, j, \theta)$ 저장.

본 논문에서는 모든 투사기 및 역투사기의 구현방법에 있어 영상의 가로 또는 세로방향의 해상도와 검출기 해상도가 일치

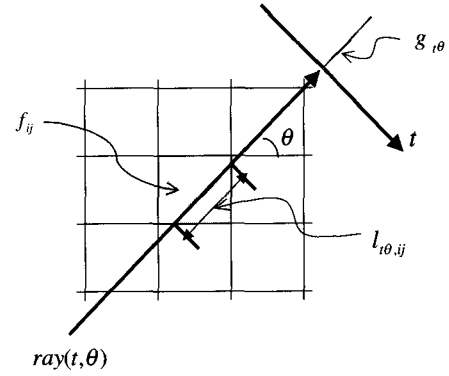


그림 1. 선추적법(RTM)을 사용한 투사값의 계산

하는 것으로 간주한다. (예: 128×128 영상, 128개의 검출기) 따라서, 1차 보간법의 경우 한 화소가 기여하는 검출기의 격자가 최대 2개 이므로 위와 같은 형태의 LUT가 각각 2개씩 ($t_1(i, j, \theta)$, $t_2(i, j, \theta)$ 및 $\xi_1(i, j, \theta)$, $\xi_2(i, j, \theta)$) 필요하고, 3차 보간법의 경우 최대 4개의 검출기를 고려하여야 하므로 위와 같은 형태의 LUT가 각각 4개씩 ($t_1(i, j, \theta)$, $t_2(i, j, \theta)$, $t_3(i, j, \theta)$, $t_4(i, j, \theta)$ 및 $\xi_1(i, j, \theta)$, $\xi_2(i, j, \theta)$, $\xi_3(i, j, \theta)$, $\xi_4(i, j, \theta)$) 필요하다.

PDM은 계산과정이 단순한 반면 주요 물리현상 중의 하나인 감쇠(attenuation)현상을 표현할 수 없으므로 영상재구성 시 감쇠현상의 보정이 불가능하다.

2. 선추적법(RTM)

RTM은 그림 1과 같이 θ 방향으로 진행하여 검출기의 t 위치에 도달하는 방사선 $ray(t, \theta)$ 가 화소 f_{ij} 를 지날 때 통과된 코드(chord) 길이 $l_{t,ij}$ 를 측정하고 방사선을 따라 선적분을 취함으로써 주어진 각도에서의 투사데이터 $g_{t\theta}$ 를 계산한다.

본 논문에서는 $l_{t,ij}$ 를 정확하고 빠르게 계산하기 위하여 Siddon [5]이 제안한 코드길이의 효율적 계산방법을 사용한다 [6]. Siddon 방법의 경우 방사선의 시작점 (x_{min}, y_{min}) 과 끝점 (x_{max}, y_{max}) 이 주어지면 방사선이 통과하는 화소의 개수 N 과 각 화소의 좌표 (i, j) 및 코드길이를 제공한다. RTM에서는 방사선 코드길이 $l_{t,ij}$ 를 정확하게 측정할 수 있으므로 ECT의 주요 물리현상 중의 하나인 감쇠현상을 효율적으로 표현할 수 있다 [6]. 각 화소에 대한 감쇠인자 $A(i_{t\theta}(n), j_{t\theta}(n))$ 은 식 (6)과 같이 계산된다.

$$A(i_{t\theta}(n), j_{t\theta}(n)) = \exp\left[-\sum_{k=1}^N \mu(i_{t\theta}(k), j_{t\theta}(k))l_{t\theta}(k) - \frac{1}{2} \mu(i_{t\theta}(n), j_{t\theta}(n))l_{t\theta}(n)\right] \tag{6}$$

식 (6)에서 $\mu(i_{t\theta}(n), j_{t\theta}(n))$ 와 $l_{t\theta}(n)$ 는 각각 $ray(t, \theta)$ 에

서 n 번째 화소의 평균 감쇠 계수와 코드길이를 나타낸다. 이 경우 투사데이터 $g_{t\theta}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$g_{t\theta} = \sum_{n=1}^N f(i_{t\theta}(n), j_{t\theta}(n)) A(i_{t\theta}(n), j_{t\theta}(n)) l_{t\theta}(n) \quad (7)$$

식 (7)에서 N 은 방사선 $ray(t, \theta)$ 가 통과하는 화소의 개수이다. 그리고 감쇠현상이 없는 $\mu(\cdot) = 0$ 인 경우의 투사데이터는 $g_{t\theta} = \sum_{ij \in ray(t, \theta)} l_{t\theta, ij} f_{ij}$ 로 축소된다.

코드길이 $l_{t\theta, ij}$ 또는 감쇠된 코드길이($A(i_{t\theta}(n), j_{t\theta}(n)) \times l_{t\theta}(n)$)의 값은 투사 및 역투사의 반복연산 시 주어진 화소의 위치 (i, j) 및 검출기의 위치 (t, θ) 에 대하여 항상 일정하므로 초기에 이를 메모리에 저장한 뒤 이 후 반복연산과정 없이 단순히 읽어 들임으로써 총 연산시간을 급격히 감소시킬 수 있다. 이를 위해 본 논문에서는 다음과 같은 두 가지 종류의 3차원 배열로 구성된 LUT를 사용한다.

- LUT1: 화소의 위치 (i, j) 및 투사각 θ 에 따른 검출기의 위치 $t(i, j, \theta)$ 저장.

- LUT2: 화소의 위치 (i, j) 및 투사각 θ 에 따른 감쇠된 코드길이 $attlen(i, j, \theta)$ 저장.

PDM의 경우와 마찬가지로 영상의 가로 또는 세로방향의 해상도와 검출기 해상도가 일치할 경우 한 화소를 통과하는 방사선의 최대 개수는 2개 이므로 위와 같은 형태의 LUT가 각각 2개씩 ($t_1(i, j, \theta)$, $t_2(i, j, \theta)$ 및 $attlen_1(i, j, \theta)$, $attlen_2(i, j, \theta)$) 필요하다. 이와 같이 LUT를 사용할 경우 방사선을 따른 선적분에 의한 연산과정 대신 PDM 방법에서 사용된 순차적 화소주사방식으로 투사데이터 $g_{t\theta}$ 를 쉽게 계산할 수 있다. 이러한 방식은 화소주사방식으로 표현되는 EM 알고리즘의 구현을 매우 용이하게 하며 단 1회의 화소주사로 쉽게 $g_{t\theta}$ 를 계산할 수 있도록 한다. 한편, PDM의 경우 방사선이 항상 화소의 중점에서 출발하는 것으로 간주되므로 검출기의 격자구조 상에서 보간법을 적용하는 것이 필수적으로 요구되는 반면, RTM의 경우 화소를 통과하는 방사선의 실제길이(코드길이)를 측정하므로 검출기의 격자구조에 정확히 도달되는 방사선만을 선택할 수 있어 별도의 보간법이 필요하지 않다. 따라서, RTM은 PDM에 비해 보간법으로 인한 투사데이터의 정확성 저하의 문제점을 극복할 수 있을 뿐 아니라 감쇠 현상도 효율적으로 표현할 수 있다.

3. 회전기반법 (RBM)

RBM은 카메라를 고정하고 물체를 가상적으로 회전시켜 투사 및 역투사를 계산하는 방법이다 [7]. 물체의 회전을 위한 정확한 계산 방법이 주어질 경우, 그림 2와 같이 카메라의 검출기에 수직으로 향하는 평행 방사선을 따라 선적분을 계산하면 된다. RBM의 경우 RTM 방법에서 사용된 코드길이 $l_{t\theta, ij}$ 가 화소 한 변의 길이에 해당되어 항상 일정하므로 주어진 θ

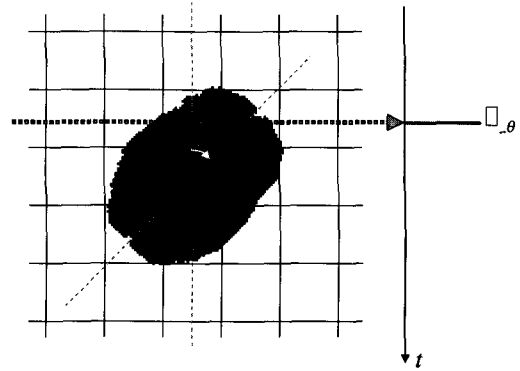


그림 2. 회전기반법(RBM)을 사용한 투사값의 계산

에 대하여 물체를 그림 2와 같이 회전하고 단순히 수평방향으로만 선적분을 취함으로써 투사데이터 $g_{t\theta}$ 를 쉽게 계산할 수 있다.

영상을 회전시키기 위한 가장 기본적인 방법은 아래와 같은 회전행렬식을 사용하는 것이다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8)$$

식(8)에서 θ 는 시계방향의 각도를 의미하며, (x, y) 는 원영상의 좌표, (x', y') 은 회전된 영상의 좌표를 의미한다. 그러나 이와 같은 방법을 사용할 경우 중첩 또는 빈 화소 등에 의해 회전영상의 화소가 균일하게 분포되지 않으므로 보간법을 적용하더라도 결과영상이 다소 거칠게 나타나는 경향이 있다 [8]. 이러한 문제점을 해결하기 위해 영상회전 시 주로 사용되는 방법은 (8)의 역변환인 식 (9)를 사용하여 회전영상 내의 각 화소의 위치 (x', y') 에 대한 원영상의 해당 좌표 (x, y) 를 계산하고 주변 화소들을 사용한 보간법을 통해 (x', y') 위치의 화소값을 결정함으로써 중첩 또는 빈 화소가 발생되지 않도록 하는 것이다 [8].

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (9)$$

본 논문에서는 RBM에 의한 투사데이터 $g_{t\theta}$ 의 계산을 위해 식 (9)에 표현된 역방향 사상 방법을 사용하였으며, PDM에서 사용된 두 가지 형태의 보간 함수 (1차 및 3차)를 2차원의 양방향으로 확장하여 적용한 양방향 1차 (bilinear) 및 양방향 3차 (bicubic) 보간법을 사용하였다. 따라서, PDM에서 1차 보간 시 2개, 3차 보간 시 4개의 검출기 격자가 사용된 반면 RBM에서는 각각 4개와 16개의 화소가 사용된다.

두 보간법 모두 OS-EM에 적용될 경우 회전좌표의 계산이 반복되므로 PDM의 경우와 유사한 LUT를 사용함으로써 반복 연산을 피할 수 있다. 식 (9)에서 연속좌표 (x, y) 를 격자좌표 (i, j) 로, (x', y') 을 (i', j') 으로 각각 변환하여 다음과 같이

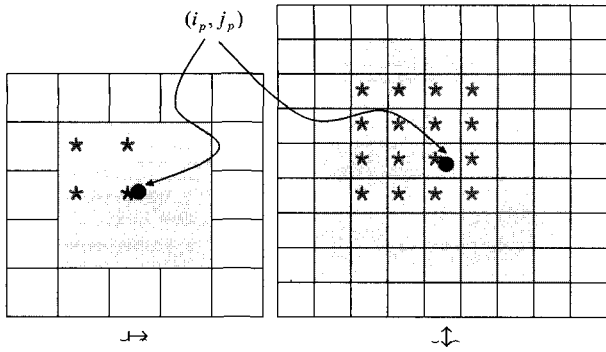


그림 3. 시스템 행렬의 계산을 위한 포인트 영상 ; (a) 양방향 1차 보간법 (b) 양방향 3차 보간법

LUT에 저장한다.

- LUT1: 주어진 화소의 위치 (i, j) 및 회전각 θ 에 대한 정수형 좌표 $i(i, j, \theta)$ 및 $j(i, j, \theta)$ 저장.

- LUT2: 주어진 화소의 위치 (i, j) 및 회전각 θ 에 대한 보간 함수의 변수값 $\xi_i(i, j, \theta)$ 및 $\xi_j(i, j, \theta)$ 저장.

시스템 행렬의 계산

OS-EM을 구현하기 위해서는 식 (2)와 표 1에 사용된 시스템 행렬 $H_{\theta, ij}$ 의 계산이 필요하다. 시스템 행렬 $H_{\theta, ij}$ 는 (i, j) 위치의 방출원에서 하나의 광자가 방출되어 (i, θ) 로 지정되는 특정한 검출기에 도달될 확률을 의미한다. 따라서 (i, j) 위치의 화소 값이 1이고 이외의 모든 화소값을 0으로 한 포인트 영상에 의한 투사데이터 g_{θ} 를 계산함으로써 $H_{\theta, ij}$ 를 계산할 수 있다. PDM과 RTM의 경우 표 1의 투사기에서 $f_{ij}=1$ 에 대한 g_{θ} 를 계산함으로써 근사화된 시스템 행렬의 값을 구할 수 있으며, RBM의 경우도 투사기의 구현 시 전방향 사상법을 사용하면 유사한 방법으로 $H_{\theta, ij}$ 를 계산할 수 있다.

그러나 RBM의 경우 앞에서 언급된 바와 같이 역방향 사상법이 적용되므로 PDM이나 RTM의 경우와 같이 단순히 $f_{ij}=1$ 에 대한 g_{θ} 의 계산으로 시스템 행렬을 계산할 수 없고 다소 복잡한 계산과정을 통해 계산된다. 포인트 소스의 위치를 $(x=j_p, y=i_p)$ 라 할 경우 역방향 사상법을 사용한 시스템 행렬의 계산과정은 다음과 같이 요약된다.

- (i) 식(8)의 전방향 사상을 통한 포인트 소스의 변환좌표 $(x'(i_p, j_p), y'(i_p, j_p))$ 계산.
- (ii) $(x'(i_p, j_p), y'(i_p, j_p))$ 주위의 정수형 좌표들 (i', j') 을 식 (9)의 역방향 사상에 대입하여 $(x(i', j'), y(i', j'))$ 계산.
- (iii) $(x(i', j'), y(i', j'))$ 중 포인트 소스 (i_p, j_p) 를 포함하는 2×2 또는 4×4 보간영역에 양방향 1차 또는 3차 보간법을 적용하여 회전좌표 (i', j') 의 화소값을 계산.
- (iv) 회전된 영상에서 각 행을 따라 0이 아닌 화소값을 모

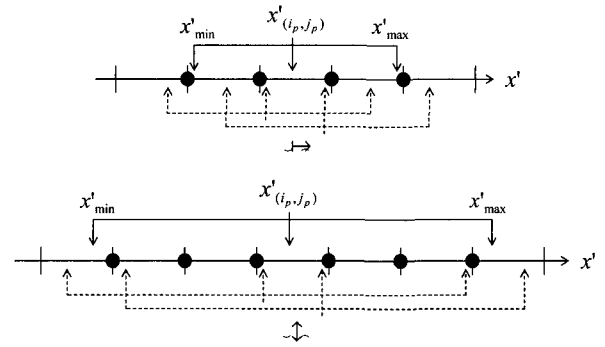


그림 4. x' 축 상의 거리 D_x 의 범위: (a) 양방향 1차 보간법 (b) 양방향 3차 보간법

두 더하여 $H_{\theta, ij}$ 계산.

그림 3은 시스템 행렬의 계산을 위한 포인트 영상을 나타낸 것으로서 별 표시가 있는 좌표들은 보간 영역 내에 검은 점으로 표시된 포인트 소스의 좌표 (i_p, j_p) 를 포함시킬 수 있는 좌표들 (i', j') 을 나타낸다. 양방향 1차 보간법에서 (i', j') 에 해당되는 좌표들은 그림 3(a)에 표시된 바와 같이 $(i_p-1, j_p-1), (i_p-1, j_p), (i_p, j_p-1), (i_p, j_p)$ 이다. 또한 그림3에서 빗금친 영역은 $(x(i', j'), y(i', j'))$ 의 각 정수형 좌표가 (i', j') 와 일치할 때 보간영역에 포함될 수 있는 모든 화소들을 의미한다. 앞에 서술한 $H_{\theta, ij}$ 를 계산하는 절차 중 (ii)에서 필요한 (i', j') 에 속하는 화소들을 구하기 위해서는 식 (8)에 각각 (i', j') 와 (i_p, j_p) 를 대입하여 계산한 $(x'(i', j'), y'(i', j'))$ 와 $(x'(i_p, j_p), y'(i_p, j_p))$ 사이의 거리를 계산할 필요가 있다. 양방향 1차 보간의 경우 $D_x = x'(i_p, j_p) - x'(i', j')$ 와 $D_y = y'(i_p, j_p) - y'(i', j')$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x'(i_p, j_p) - x'(i_p, j_p-1) &= \cos \theta, & y'(i_p, j_p) - y'(i_p, j_p-1) &= -\sin \theta \\ x'(i_p, j_p) - x'(i_p-1, j_p) &= \sin \theta, & y'(i_p, j_p) - y'(i_p-1, j_p) &= \cos \theta \\ x'(i_p, j_p) - x'(i_p-1, j_p-1) &= \cos \theta + \sin \theta, \\ y'(i_p, j_p) - y'(i_p-1, j_p-1) &= \cos \theta - \sin \theta \end{aligned}$$

따라서, D_x 와 D_y 의 범위를 $x'_{\min} \leq D_x \leq x'_{\max}$, $y'_{\min} \leq D_y \leq y'_{\max}$ 로 나타낼 경우

$$\begin{aligned} x'_{\min} &= x'(i_p, j_p) - \sqrt{2}, & x'_{\max} &= x'(i_p, j_p) + \sqrt{2}, \\ y'_{\min} &= y'(i_p, j_p) - \sqrt{2}, & y'_{\max} &= y'(i_p, j_p) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

가 됨을 알 수 있다. 이와 유사한 방법으로 양방향 3차 보간법에서의 x'_{\min}, y'_{\min} 과 x'_{\max}, y'_{\max} 를 계산하면

$$\begin{aligned} x'_{\min} &= x'(i_p, j_p) - 2\sqrt{2}, & x'_{\max} &= x'(i_p, j_p) + 2\sqrt{2}, \\ y'_{\min} &= y'(i_p, j_p) - 2\sqrt{2}, & y'_{\max} &= y'(i_p, j_p) + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

이다.

그림 4는 1차원(x -축)의 수직선상에서 거리 D_x 의 범위 내에 얼마나 많은 화소들이 놓일 수 있는지를 나타낸 것이다. 그림 4에서 검은 점은 x -축 상의 정수형 좌표를 나타낸다.

그림 4(a)에서 실선과 점선은 각각 2개와 3개의 정수형 좌표를 포함하는 범위를 나타낸다. 반면에 그림 4(b)에서 실선과 점선은 각각 6개와 5개의 정수형 좌표를 포함하는 범위를 나타낸다. 그러므로 그림 4를 2차원으로 확장하면 시스템 행렬을 계산하기 위한 절차 중 (ii)의 (i_p, j_p) 에 해당되는 영역은 $(x'(i_p, j_p), y'(i_p, j_p))$ 의 위치에 따라 양방향 1차 보간법의 경우 $3 \times 3, 3 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 2$, 양방향 3차 보간법의 경우 $6 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 6, 5 \times 5$ 로 다양할 수 있다. 이와 같이 결정된 (i_p, j_p) 을 식 (9)에 대입하면 $(x(i_p, j_p), y(i_p, j_p))$ 을 계산할 수 있다. 그러나 $(x(i_p, j_p), y(i_p, j_p))$ 의 정수형 좌표들과 이에 해당되는 가중치들은 이미 계산되어 LUT1과 LUT2에 저장되어 있으므로 $i(\cdot), j(\cdot), \xi_i(\cdot), \xi_j(\cdot)$ 를 읽어 들여 이들로부터 $(x(i_p, j_p), y(i_p, j_p))$ 을 쉽게 계산할 수 있다.

LUT로부터 $(x(i_p, j_p), y(i_p, j_p))$ 의 정수형 좌표들을 얻으면 다음 단계는 이 정수형 좌표들이 (i^*, j^*) 에 속하는지를 판별하는 것이다. 만약 $(x(i_p, j_p), y(i_p, j_p))$ 의 한 정수형 좌표가 (i^*, j^*) 에 속한다면 그 보간 영역에 포인트 소스 (i_p, j_p) 를 포함하는 것이며 보간영역에 0이 아닌 값을 가지는 것은 오직 (i_p, j_p) 의 화소뿐이므로 각 보간법에 따라 계산된 (i_p, j_p) 의 가중치 값은 회전된 영상내의 (i^*, j^*) 에 해당되는 화소의 값이 된다. 모든 (i_p, j_p) 를 구한 후에 회전된 영상에서 0이 아닌 화소들을 행의 방향으로 모두 더하면 H_{i^*, j^*} 를 계산할 수 있다.

RBM의 경우 $-\theta$ 의 각도로 회전된 영상에서 (i, j) 에 위치한 화소에 대한 감쇠인자 $A_\theta(i, j)$ 는 식(10)에 의해 계산된다.

$$A_\theta(i, j) = \exp - \sum_{k=j+1}^M \mu_\theta(i, k) - \frac{1}{2} \mu_\theta(i, j) \quad (10)$$

식 (10)에서 M 은 각 행의 화소수이고 $\mu_\theta(i, j)$ 는 $-\theta$ 로 회전된 감쇠지도를 나타낸다. 이 경우 투사 데이터 $g_{i\theta}$ 는 식 (11)과 같이 계산된다.

$$g_{i\theta} = \sum_{j=1}^M f_\theta(t, j) A_\theta(t, j) \quad (11)$$

식 (11)에서 $f_\theta(i, j)$ 는 $-\theta$ 로 회전된 영상을 나타낸다.

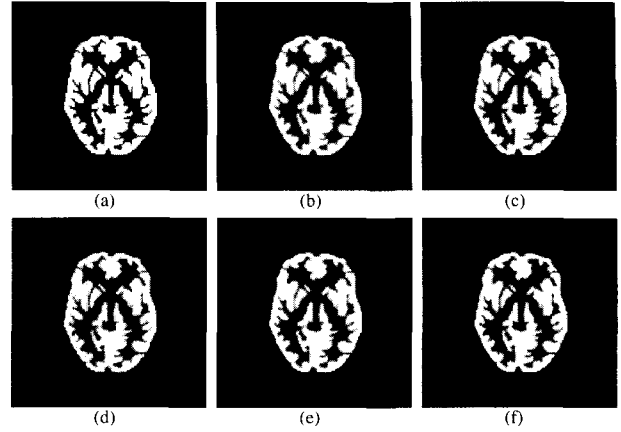


그림 5. 소프트웨어 모형을 사용한 잡음이 없는 표준 EM 영상재구성: (a) 128×128 소프트웨어 모형; (b) 1차 보간 PDM ($\epsilon = 17.05\%$); (c) 3차 보간 PDM ($\epsilon = 15.34\%$); (d) RTM; (e) 양방향 1차 보간 RBM ($\epsilon = 17.04\%$); (f) 양방향 3차 보간 RBM ($\epsilon = 15.05\%$)

영상의 가로 또는 세로방향의 해상도와 검출기 해상도가 일치할 경우 물체가 회전함으로써 한 화소가 투사데이터에 기여하는 검출기의 개수는 양방향 1차 보간법의 경우 최대 3개이므로 다음과 같은 LUT가 필요하다.

- LUT3: $t_1(i_p, j_p, \theta), t_2(i_p, j_p, \theta), t_3(i_p, j_p, \theta)$
- LUT4: $h_1(t_1, \theta), h_2(t_2, \theta), h_3(t_3, \theta)$

LUT4에서 h_n 은 $H_{t_n, \theta, i}$ 를 의미한다. 양방향 3차 보간법의 경우 한 화소가 투사데이터에 기여하는 검출기의 개수는 최대 6개 이므로 각 LUT 마다 6개의 원소 (t_1, \dots, t_6 및 h_1, \dots, h_6)가 필요하다.

실험 결과

투사기 및 역투사기의 구현을 위한 세 가지 방법(PDM, RTM, RBM)의 성능을 비교·분석하기 위해 그림 5(a)와 같은 128×128 소프트웨어 모형을 사용하였다. 각 방법으로부터 얻어진 투사데이터는 128개의 검출기 격자 (t)와 360 에 걸친 128개의 이산각도로 구성되었다. 각 방법에 대한 연산소요시간을 비교하기 위해 PDM, RTM, RBM 방법을 독립적으로 적용한 OS-EM 알고리즘을 구현하였으며, 세 방법 공히 표준 EM 알고리즘 (1블록 또는 1개의 부분집합을 사용한 OS-EM에 해당)의 64회 반복연산을 기준으로 총 블록의 개수가 1일 경우 64회 반복연산, 2일 경우 32회 반복연산, 32일 경우 2회 반복연산이 되도록 블록의 개수를 $N=1, 2, 4, \dots, 32$ 로 구분하였다. PDM의 경우 감쇠현상의 표현이 불가능하므로 다른 두 방법과 동일한 조건 하에서 성능을 비교하기 위해 본 실험에서는 모든 방법에 있어 감쇠현상을 고려하지 않았다.

실험을 위해 사용된 컴퓨터는 Pentium-4 3.06 GHz 프로세서를 사용한 시스템이며, LUT에서 사용된 투사데이터의 인덱

표 2. RTM, RBM, PDM의 LUT 설정을 위한 메모리 용량 비교

	PDM-L	PDM-C	RTM	RBM-BL	RBM-BC
LUT의 개수	4	8	4	10	16
LUT 종류	(t_1, t_2) (ξ_1, ξ_2)	(t_1, \dots, t_4) (ξ_1, \dots, ξ_4)	(t_1, t_2) $(attlen_1, attlen_2)$	(i, j) (ξ_i, ξ_j) (t_1, \dots, t_3) (h_1, \dots, h_3)	(i, j) (ξ_i, ξ_j) (t_1, \dots, t_6) (h_1, \dots, h_6)
총 사용 메모리 (MB)	20	41	20	65	96

표 3. PDM, RTM, RBM의 정량적 성능 비교

	LUT	CPU 시간 (msec)		Percent Error(%)
		Per Iteration	Total	
1 Subset (64 iterations)	PDM-L	30	84	17.05
	PDM-C	120	201	15.34
	RTM	770	47	16.16
	RBM-BL	1,550	127	17.04
	RBM-BC	12,240	314	15.05
8 Subsets (8 iterations)	PDM-L	30	183	16.85
	PDM-C	120	402	15.11
	RTM	770	164	15.86
	RBM-BL	1,550	275	16.85
	RBM-BC	12,240	691	14.81
32 Subsets (2 iterations)	PDM-L	30	660	16.16
	PDM-C	120	1,395	14.57
	RTM	770	600	15.27
	RBM-BL	1,550	107	16.13
	RBM-BC	12,240	2,175	16.590

스 변수 t 는 1-byte를, 회전식에 의해 계산된 좌표를 위한 인덱스 변수 (i, j) 는 4-byte 정수형 변수를 사용하였고 그 외의 변수는 모두 4-byte 실수형 변수를 사용하였다.

그림 5 (b)-(f)는 (a)의 소프트웨어 모형을 본 논문의 각 방법에 의해 구현한 투사기를 사용하여 잡음이 없는 투사데이터를 형성한 뒤 표준 EM (1블록 OS-EM) 방법으로 재구성한 결과를 나타낸 것이다. 그림 5 (b)는 1차 보간을 적용한 PDM (이하 PDM-L), (c)는 3차 보간을 적용한 PDM (이하 PDM-C), (d)는 RTM, (e)는 양방향 1차 보간을 적용한 RBM (이하 RBM-BL), (f)는 양방향 3차 보간을 적용한 RBM (이하 RBM-BC)에 의한 결과를 나타낸 것이다. RTM 영상의 경우 다소 거칠게 보이나 다른 영상에 비해 비교적 선명해 보이는데 이는 RTM의 경우 정확한 코드길이를 계산하는 반면, PDM과 RBM은 보간법에 의해 결과영상이 평활화되어 경계정보가 다소 유실되기 때문이다. 각 결과에 대한 정량적 비교를 위해 다음과 같이 정의된 퍼센트 오차 (ϵ)를 계산하였다.

$$\epsilon = \frac{\|f - \hat{f}\|}{\|f\|} \times 100\% \quad (12)$$

식(12)에서 f 는 원영상, \hat{f} 은 재구성된 영상을 각각 의미한다. PDM은 검출기 배열 상에서 1차원의 보간법이 적용되는 반면 RBM은 2차원 영상에 보간법이 적용됨에도 불구하고

그림 5에 나타난 바와 같이 (b) PDM-L과 (e) RBM-BL의 퍼센트 오차가 매우 근접하며 (c) PDM-C와 (f) RBM-BC의 결과도 매우 유사하게 나타났는데, 이는 PDM에서 사용된 1차원 보간이 RBM에서 사용된 2차원 보간과 궁극적으로 재구성된 영상에 동일한 효과를 줄을 나타낸다. 그리고 3차 보간을 이용한 (c) PDM-C 및 (f) 양방향 3차 보간을 이용한 RBM-BC의 결과 영상은 1차 보간을 적용한 (b) PDM-L과 (e) RBM-BL의 영상에 비해 결과 영상이 더 세밀하게 재구성되었고 퍼센트 오차도 상대적으로 적음을 알 수 있다.

표 2는 각 방법의 구현 시 반복 연산속도를 극대화하기 위해 LUT에 사용된 메모리 용량을 비교한 것이다. 검출기의 격자 간격과 화소의 간격이 일치하는 경우 RTM과 PDM-L에서는 한 화소에서 주어진 방향으로의 투사데이터에 기여하는 검출기의 최대 격자수가 2개인 반면, RBM-BL에서는 3개, PDM-C에서는 4개, RBM-BC에서는 6개이다. RBM의 경우는 회전식에서 계산된 좌표를 저장하므로 PDM과 RTM에 비해 더 큰 용량의 메모리 소요됨을 알 수 있다.

표 3은 PDM, RTM, RBM을 사용한 OS-EM 알고리즘의 연산시간 및 퍼센트 오차를 블록의 개수별로 구분하여 비교한 것이다. 각 방법 공히 총 연산시간 면에 있어서 블록의 개수가 증가할수록 연산시간이 급격히 감소함을 알 수 있다. LUT 설정 시간 면에 있어서는 PDM이 가장 빠른 것으로 나타났는데, 이는 PDM의 연산이 다른 방법에 비해 매우 단순하기 때문이다. 한편, RBM은 LUT를 위해 소모된 메모리 용량도 많고

LUT 설정 시간도 다른 방법에 비해 가장 많은 시간을 소요하는 것을 볼 수 있다. 표준 EM (1 subset)의 결과는 그림 5 (b)-(f)의 결과와 연관되는 것으로서 RBM-BC와 PDM-C가 RTM에 비해 다소 개선된 영상을 제공하는 반면 영상을 재구성하는데 소요되는 총 시간은 RBM-BC의 경우 약 8.5배, PDM-C의 경우 약 3.4배에 이르는 것을 보여준다. 블록의 개수가 증가할수록 총 연산시간이 예상대로 감소하며 이 경우 PDM-L이 RTM에 비해 다소 빠른 속도를 보여주는 반면 결과 영상의 질이 퍼센트 오차 면에서 매우 저하됨을 볼 수 있다. 사용된 블록의 개수와 무관하게 퍼센트 오차 면에서 가장 양질의 영상을 제공하는 방법은 RBM-BC로 나타났으나 가장 빠른 32블록의 경우에도 RBM-BC의 총 연산시간은 RTM에 비해 약 8.4배가 소요되었다. 따라서, 표 2와 3에 나타난 결과는 PDM과 RBM의 총 연산시간과 영상의 질에 대한 균형관계를 보여주는 것으로 요약된다. 즉, 양질의 영상을 위해 보간함수의 차수를 증가시킬 경우 계산의 효율은 급격히 저하됨을 알 수 있다.

결 론

본 연구의 목적은 투사 및 역투사의 반복연산을 필요로 하는 ECT 영상재구성 알고리즘에 적합한 효율적인 투사기 및 역투사기의 개발을 위한 것이다. 이를 위해 투사 및 역투사의 반복연산 시 불변하는 연산결과를 미리 메모리에 저장함으로써 각 구현방법에 있어 불필요한 연산을 최소화 하도록 설계하였다.

본 연구결과에 의하면 RBM의 경우 고차의 보간함수를 사용할 경우 재구성된 영상의 정확도를 높일 수 있으나 이로 인한 연산속도 뿐 아니라 메모리의 사용량도 급격히 증가하는 것으로 나타났다. 1차 보간법을 적용한 PDM의 경우 연산속도가 비교적 빠른 반면 결과영상의 질이 다른 방법에 비해 저하되는 것으로 나타났으며, 일반적으로 감쇠현상의 표현이 불가능하므로 본 연구에서는 다른 구현방법과 단순히 비교하기 위한 방법으로만 사용되었다. 한편, RTM의 경우 RBM 및 PDM에서 요구되는 보간법의 적용이 불필요하므로 연산속도가 매우 빠를 뿐 아니라 재구성된 영상의 정확성도 비교적 높은 것으로 나타났다. 실제로, RTM은 양방향 1차 보간법을 적용한 RBM-BL과 양방향 3차 보간법을 적용한 RBM-BC의 중간 수준에 해당되는 양질의 영상을 제공하면서도 연산속도는

RBM-BC의 8배 이상인 것으로 확인되어 다른 방법에 비해 종합적으로 우수한 것으로 나타났다.

따라서, RTM 방법을 사용하여 투사 및 역투사의 반복연산을 필요로 하는 영상재구성 알고리즘을 구현할 경우 적은 양의 메모리를 사용하고도 연산시간을 단축시킬 수 있을 뿐 아니라 정량적으로 우수한 영상을 얻을 수 있는 것으로 평가된다.

참 고 문 헌

1. J. M. Ollinger and J. A. Fessler, "Positron-Emission Tomography", IEEE Signal Processing Magazine, pp. 43-55, Jan, 1997.
2. L. Shepp and Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography", IEEE Trans. Med. Imaging, 1, pp. 113-122, 1982.
3. H.M. Hudson and R.S. Larkin, "Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data", IEEE Trans. Med. Imaging, 14(2), pp. 132-137, 1995.
4. J. Ye, Z. Liang, and D.P. Harrington, "Quantitative reconstruction for myocardial perfusion SPECT: an efficient approach by depth-dependent deconvolution and matrix rotation", Phys. Med. Biol., 39, pp. 1263-1279, 1994.
5. R. Siddon, "Fast calculation of the exact radiological path for a 3D CT array", Med. Phys., 12, 252-255, 1985.
6. S. J. Lee, "Implementing a fast projector-backprojector for EM-based tomographic reconstruction", 의 공학회지, 20(6), pp. 523-529, 1999.
7. E. V. R. Di Bella, A. B. Barclay, R. L. Eisner, and R.W. Schafer, "A comparison of rotation-based methods for iterative reconstruction algorithms", IEEE Trans. Nuclear Science, 43(6), pp. 3370-3376, 1996.
8. M. Seul, L. O'Gorman, and M. J. Sammon, Practical algorithms for image analysis, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.