
FIR/IIR Lattice 필터의 설계를 위한 Circulant Matrix Factorization을 사용한 Spectral Factorization에 관한 연구

김상태* · 박종원**

Syudy of Spectral Factorization using Circulant Matrix Factorization to Design the FIR/IIR Lattice Filters

Sang-Tae Kim* · Jong-Won Park**

이 논문은 한국과학재단의 해외 Post-Doc. 연수지원에 의하여 연구되었음

요 약

Circulant Matrix Factorization (CMF)는 covariance 행렬의 spectral factorization된 결과를 얻을 수 있다. 우리는 얻어진 결과를 가지고 일반적으로 잘 알려진 방법인 Schur algorithm을 이용하여 finite impulse response (FIR)와 infinite impulse response (IIR) lattice 필터를 설계하는 방법을 제안하였다. CMF는 기존에 많이 사용되는 root finding을 사용하지 않고 covariance polynomial로부터 minimum phase 특성을 가지는 polynomial을 얻는데 유용한 방법이다. 그리고 Schur algorithm은 toeplitz matrix를 빠르게 Cholesky factorization하기 위한 방법으로 이 방법을 이용하면 FIR/IIR lattice 필터의 계수를 쉽게 찾아낼 수 있다. 본 논문에서는 이러한 방법들을 이용하여 FIR과 IIR lattice 필터의 설계의 계산적인 예제를 제시했으며, 제안된 방법과 다른 기존에 제시되었던 방법 (polynomial root finding과 cepstral deconvolution)들과 성능을 비교 평가하였다.

ABSTRACT

We propose the methods to design the finite impulse response (FIR) and the infinite impulse response (IIR) lattice filters using Schur algorithm through the spectral factorization of the covariance matrix by circulant matrix factorization (CMF). Circulant matrix factorization is also very powerful tool used for spectral factorization of the covariance polynomial in matrix domain to obtain the minimum phase polynomial without the polynomial root finding problem. Schur algorithm is the method for a fast Cholesky factorization of Toeplitz matrix, which easily determines the lattice filter parameters. Examples for the case of the FIR filter and for the case of the IIR filter are included, and performance of our method check by comparing of our method and another methods (polynomial root finding and cepstral deconvolution).

키워드

FIR/IIR Lattice Filter, Circulant Matrix Factorization

I. 서론

1917년 I. Schur는 power series가 unit circle이내의 범위로 제한되는지의 특성을 조사하는 알고리즘을 제시하였다. 이렇게 제시된 알고리즘은 공학분야의 multirate 신호처리 [1,2], 역 산란 현상의 문제 [3], 음성 신호처리 [4], 광 산란 필터 [5,6], 지층 profiling [4], 그리고 해수의 음향속도 profiling [7]과 같은 다양한 문제들에 적용되었다. 특히 Schur 기법은 lattice 필터 구조의 계수를 빠르고 쉽게 구할 수 있는 장점을 가지고 있으며, Lattice 필터 구조는 다양한 신호처리에 적용하기에 적당한 구조를 가지며 고정된 wordlength의 수행에서 낮은 roundoff 잡음 특성과 양자화 잡음에 민감하지 않다는 특성을 갖는 장점이 있다[8].

Schur 기법으로 설계할 수 있는 lattice 필터 구조는 plane rotation을 사용하여 설계할 수 있는 FIR lattice 필터와 hyperbolic rotation을 사용하여 계산할 수 있는 IIR lattice 필터구조를 갖는다 [9,10,11]. 이러한 두 종류의 lattice 필터 구조를 Schur algorithm을 이용하여 필터의 계수를 계산하기 위해서는 z-transform 영역에서의 전달함수 (transfer function)의 계수가 필요하며, 원하는 필터 특성을 가지는 lattice 필터의 전달함수를 구하기 위해서 covariance polynomial의 spectral factorization의 과정이 필수적으로 필요하게 된다. 이러한 spectral factorization은 lattice 필터 구조와 같은 필터 설계에 매우 중요한 주제로서, 과거에 연구되어 왔던 방법들로는 polynomial root finding [12], Cholesky factorization of the infinite banded Toeplitz matrix [13], wilson에 의해 제안된 방법 [14], cepstral deconvolution [15,16], 그리고 discrete time algebraic Riccati equation의 해 [17]를 구하는 방법들이 있다. 그러나 본 논문에서는 기존에 제시된 방법들을 사용하지 않고, 행렬의 형태로 계산하는 방법으로 covariance polynomial을 CMF로 spectral factorization하는 방법을 제안하였다. 그리고 본 논문에 제안된 방법과 기존에 많이 사용되고 있는 polynomial root finding과 cepstral deconvolution 방법들과 성능에 대한 비교 분석하여 볼 것이다.

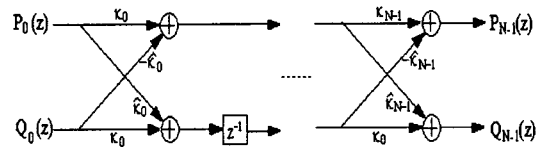
본 논문은 우선 II절에서 FIR/IIR lattice 필터에 대해 설명할 것이고, III절에는 본 논문에서 제안한 CMF를 이용하여 spectral factorization을 하는 방법을 설명

할 것이다. IV절에서는 Schur algorithm을 이용하여 FIR/IIR lattice 필터의 계수를 찾는 방법을 설명할 것이며, V절에서는 본 논문에서 제안한 spectral factorization 방법과 기존의 방법과의 비교를 보일 것이다. 마지막으로 VI절에서는 결론을 이야기한다.

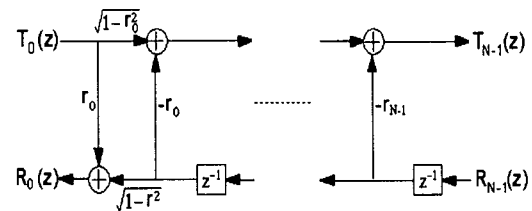
II. FIR/IIR lattice 필터

2.1. Lattice Filter 구조

Lattice 필터 구조는 그림 1에서 보인 것과 같이 plane rotation을 이용한 FIR과 hyperbolic rotation을 사용하는 IIR 두 가지의 타입으로 분류될 수 있다. 그림 1(a)은 FIR lattice 필터의 신호 흐름도 이고, 여기서 $P_0(z)$, $Q_0(z)$, $P_{N-1}(z)$, 그리고 $Q_{N-1}(z)$ 은 입력과 출력 polynomial을 의미하고 x_i 와 \hat{x}_i ($i=0, 1, \dots, N-1$)는 lattice 필터 계수를 나타낸다. 그림 1(b)는 IIR lattice 필터의 신호 흐름도이고, 여기서 $T_0(z)$, $R_{N-1}(z)$, $R_0(z)$, 그리고 $T_{N-1}(z)$ 은 입력과 출력 polynomial을 나타내고, r_i ($i=0, 1, \dots, N-1$)는 lattice 필터 계수(또는 반사계수)를 나타낸다.



(a) FIR lattice filter.



(b) IIR lattice filter.

그림 1. FIR/IIR lattice 필터의 신호 흐름도.
Fig. 1 Signal flow graph of FIR/IIR lattice filters.

2.2 FIR/IIR Lattice 필터의 수식표현

그림 1의 FIR/IIR Lattice 구조를 식으로 간단하게 표현하기 위해서 그림 1(a)에서 $P_0(z)=1$ 과 $Q_0(z)=0$ 으로 놓고, 그림 1(b)에서는 $T_0(z)=1$ 과 $R_{N-1}(z)=0$ 로 놓으면 다음과 같이 에너지 보존의 법칙이 성립한다 [2,6,10].

FIR의 경우:

$$P_{N-1}(z)P_{N-1}(z^{-1}) + Q_{N-1}(z)Q_{N-1}(z^{-1}) = 1. \quad (1)$$

IIR의 경우:

$$R_0(z)R_0(z^{-1}) + T_{N-1}(z)T_{N-1}(z^{-1}) = 1. \quad (2)$$

그리고 위의 조건에 만족하는 FIR/IIR lattice 필터의 전달함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다 [2,6].

FIR의 경우:

$$\frac{P_{N-1}(z)}{P_0(z)} = P_{N-1}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i z^{-i}, \quad (3)$$

$$\frac{Q_{N-1}(z)}{P_0(z)} = Q_{N-1}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} q_i z^{-i}.$$

여기서 p_i 와 q_i 는 전달함수의 계수이다.

IIR의 경우:

$$\frac{T_{N-1}(z)}{T_0(z)} = T_{N-1}(z) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} t_i}{1 + \sum_{i=0}^{N-1} d_i z^{-i}} = \frac{c}{D(z)}, \quad (4)$$

$$\frac{R_0(z)}{T_0(z)} = R_0(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} n_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^{N-1} d_i z^{-i}} = \frac{M(z)}{D(z)}.$$

여기서 $t_i = \sqrt{1-r_i}$ 는 i 번째 전송계수이고 c 는 상수이다. 식 (2)에 식 (4)를 대입하여 계산하면 $D(z)D(z^{-1}) + M(z)M(z^{-1}) = c$ 가 된다.

식 (3)의 경우에 원하는 주파수특성에 맞는 minimum phase를 갖는 $P_{N-1}(z)$ 또는 $Q_{N-1}(z)$ 를 설계했을 경우 나머지 $P_{N-1}(z)$ 또는 $Q_{N-1}(z)$ 를 에너지 보존에 법칙을 성립하도록 spectral factorization으로 얻을 수 있다. 식 (4)의 경우에는 우선 minimum

phase를 보장하는 autoregressive 모델인 $c/D(z)$ 를 원하는 주파수특성에 맞게 구한 후에 에너지 보존의 법칙에 맞는 $N(z)$ 를 spectral factorization으로 구한다. 이렇게 구하는 부분을 본 본문에서는 다음절에 설명하는 것과 같이 circulant 행렬을 이용하여 구하는 방법을 제안한다.

III. Circulant 행렬

수학이나 공학에서 일반적으로 아래 식(5)와 같이 $N \times N$ 행렬 C 의 구조를 갖는 행렬을 circulant 행렬이라고 부른다 [18].

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

그리고 행렬 C 는 Toeplitz 행렬의 형태이기도하며, Circulant 행렬은 Fourier 변환 행렬을 곱하므로 diagonal 형태의 행렬로 만들 수 있다. 그래서 Circulant 행렬은 식(6)과 같이 Fourier 변환 행렬과 diagonal 행렬의 곱으로 나타낼 수 있다[18].

$$C = F^* \Lambda F, \quad (6)$$

식 (6)에서 $(\cdot)^*$ 는 복소 변환을 나타내며, 행렬 F 는 $FF^* = F^*F = I$ 의 unitary 성질을 가진다 (여기서 I 는 identity 행렬이라 한다).

식 (6)에서 F 는 $N \times N$ Fourier 변환 행렬이고, $w = \exp(-j2\pi/N)$, $j = \sqrt{-1}$ 라고 놓으면 식(7)과 같이 표현된다.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Λ 는 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ 의 행렬 형태를 가지며, Λ 의 대각선 요소인 식(8)과 같은

discrete Fourier 변환 행렬의 형태를 가진다.

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w^{mk} \quad (8)$$

FIR/IIR lattice 필터 구조의 전달함수는 II 절에 보인 것과 같이 z-transform 영역에서 에너지 보존의 법칙이 성립을 하므로 circulant 행렬을 사용하는 행렬의 영역에서도 또한 식(8), 식(9)와 같이 에너지의 보존의 법칙이 성립한다.

$$\text{FIR의 경우: } C_p C_p^T + C_q C_q^T = I, \quad (8)$$

여기서 C_p 와 C_q 는 식 (3)에서 보인 polynomial 계수, (p_0, \dots, p_{N-1}) 과 (q_0, \dots, q_{N-1}) 의 요소로 만들어진 circulant 행렬이고, $(\cdot)^T$ 는 행렬의 transpose를 나타낸다.

$$\text{IIR의 경우: } C_d C_d^T + C_n C_n^T = c^2 I, \quad (9)$$

여기서 C_d 와 C_n 은 식 (4)에서 보인 $D(z)$ 와 $N(z)$ 의 polynomial 계수의 요소로 만들어진 circulant 행렬이다.

3.1 Spectral factorization

필터를 설계에 대한 많은 연구자들은 spectral factorization을 이용하여 minimum phase 필터를 설계 하는데 사용하여 왔다 [12,13,14,15,16,17]. 우선 zero들로 이루어진 $2N-1$ 차의 covariance polynomial $H(z)$ 라고 놓고, N 차의 minimum phase polynomial을 $H_m(z)$ 라고 놓을 때 $H(z)$ 와 $H_m(z)$ 의 관계는 식(10)과 같이 정의한다.

$$H(z) = H_m(z)H_m(z^{-1}) \quad (10)$$

여기서 $H(z)$ 에서부터 $H_m(z)$ 를 찾아내는 방법을 spectral factorization이라고 한다. 이와 같이 spectral factorization을 위한 방법으로는 z-평면상에서 unit circle 안쪽의 zero들을 찾아내는 polynomial root finding방법 [12], infinite banded Toeplitz 행렬의 Cholesky factorization 방법 [13], 행렬의 Newton-

Raphson 방법을 이용하여 Willson에 의해 제안된 방법 [14], cepstral deconvolution 방법 [15,16], 그리고 discrete time algebraic Riccati equation의 해로부터 얻는 방법 [17]들이 있다. 그러나 본 논문에서는 CMF를 이용하여 spectral factorization을 수행하였다.

$H(z)$ 를 행렬의 형태인 circulant matrix factorization을 하면 식(11)과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} C_H &= F^* |A|^2 F, \\ &= F^* |A| \Phi F F^* |A| \Phi^* F, \\ &= F^* \Lambda_m F F^* \Lambda_m F, \\ &= C_{H_+} C_{H_-}^* \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $|A|^2 = \text{diag}(|H(w^0)|, \dots, |H(w^{N-1})|)$ 은 $N \times N$ diagonal 행렬이고, $N \times N$ diagonal phase 행렬은 $\Phi = \text{diag}(e^{j\arg\{H_m(w^0)\}}, \dots, e^{j\arg\{H_m(w^{N-1})\}})$ 이다. 그리고 $H_m(z)$ 는 minimum phase 특성을 가지고 진폭이 $|H_m(e^{j\omega})| = \sqrt{H(e^{j\omega})}$ 로 쉽게 구할 수 있기 때문에 Φ 의 diagonal 요소들은 Hilbert 변환이나 FFT 방법을 이용하여 얻을 수 있다. 여기서 $\omega = 2\pi f$ 이고 Hilbert 변환은 식(12)를 이용하여 구할 수 있다 [19].

$$\arg[H_m(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} p \int_{-\pi}^{\pi} \ln|H_m(e^{j\theta})| \cot\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right) d\theta, \quad (12)$$

여기서 기호 p 는 Cauchy principle 값이라고 한다. 또한 위식을 discrete Hilbert 변환식으로 바꾸면 식(13)과 같이 나타낼 수 있다 [20].

$$\begin{aligned} \arg[H_m(e^{j2\pi i/N})] &\approx \frac{1}{N} \sum_{v=1,3,\dots} \ln|H_m(e^{j2\pi v/N})| \cot(v-i)\frac{\pi}{N}, \\ \arg[H_m(e^{j2\pi i/N})] &\approx \frac{1}{N} \sum_{v=0,2,\dots} \ln|H_m(e^{j2\pi v/N})| \cot(v-i)\frac{\pi}{N}. \end{aligned} \quad (13)$$

3.2 FIR/IIR을 위한 Spectral factorization

식 (8)과 (9)의 행렬로부터 circulant matrix factorization을 이용하여 알고있는 polynomial 계수로부터 모르는 polynomial 계수를 찾을 수 있다.

FIR lattice 필터를 설계하기 위하여 만약 $P(z)$ 의 계수를 알고있다고 가정하면 식 (8)에서 우리는 다음과 같이 spectral factorization을 하여 $Q(z)$ 의 계수를 찾

아 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} C_q C_q^T &= I - C_p C_p^T \\ &= F^* [I - \Lambda_p \Lambda_p^*] F, \\ &= F^* \Lambda_d \Phi_q F F^* \Lambda_d \Phi_q^* F \\ &= F^* \Lambda_q F F^* \Lambda_q F \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $|\Lambda_d|^2 = [I - \Lambda_p \Lambda_p^*]$ 이다. 우리는 식 (14)과 같이 C_q 의 행렬 요소로부터 쉽게 $Q(z)$ 의 계수를 얻을 수 있다.

IIR lattice 필터는 우선 전송 전달함수인 AR 모델을 구성하는 식 (4)의 c 와 $D(z)$ 를 안다면 식 (9)를 이용하여 식 (14)과 같은 방법으로 식(15)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_n C_n^T &= C_d C_d^T - c^2 I \\ &= F^* [\Lambda_d \Lambda_d^* - c^2 I] F, \\ &= F^* \Lambda_n F F^* \Lambda_n F \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $|\Lambda_n|^2 = [\Lambda_d \Lambda_d^* - c^2 I]$ 이다

IV. Schur algorithm

Schur algorithm은 일반적으로 Toeplitz 행렬의 빠른 Cholesky factorization을 하는 방법이라고 알려져 왔다 [9,11]. 하지만 공학의 여러 분야에 응용되어 왔으며, 특히 Schur algorithm을 수행할 때 사용되는 rotation 행렬의 요소는 FIR/IIR lattice 필터의 계수가 된다. 본 절에서는 II절과 III절에서 설명한 방법을 이용하여 식 (3)과 (4)의 polynomial 계수를 얻었을 경우 Schur algorithm을 이용하여 어떻게 FIR/IIR lattice 필터 계수를 구할 수 있는지 설명할 것이다.

4.1 FIR lattice 필터를 위한 Schur algorithm

우선 우리가 식 (3)의 polynomial 계수를 알고있다고 가정하면 다음과 같이 generator 행렬을 만들 수 있다 [11].

$$G = \begin{bmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{N-1} & q_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

식 (16)의 generator 행렬로부터 다음과 같은 방식으로 FIR lattice 필터의 계수를 구하기 위한 Schur algorithm을 다음과 같이 수행한다.

① 식 (16)의 generator matrix의 첫 번째 열로부터 다음과 같은 plane rotation matrix를 계산한다.

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} \widehat{x}_0 & -\widehat{x}_0 \\ \widehat{x}_0 & x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}} & -\frac{q_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}} \\ \frac{q_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}} & \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

② $G\Theta_0$ 를 계산하면

$$G_1 = G\Theta_0 = \begin{bmatrix} p'_0 & 0 \\ p_1 & q_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{N-1} & q_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

③ G_1 의 첫 번째 행의 한 열을 밑으로 내린다. 그리고 G_1 의 두 번째 열로부터 Θ_1 을 구한다.

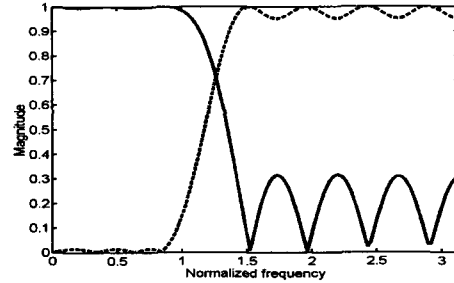
$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_0 & q_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{N-1} & q_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 & -\widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_1 & x_1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

④ ③의 계산이 끝나면 ②와 ③의 계산을 반복한다.

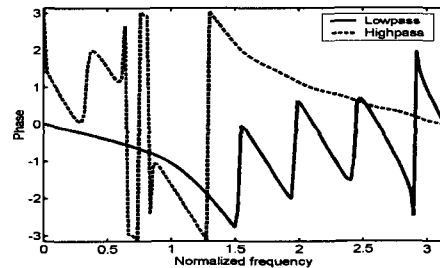
이와 같은 계산단계를 마지막 열까지 계속 반복하면 그림 1(a)에 보인 FIR lattice 필터 계수를 모두 찾아낼 수 있다. FIR lattice 필터를 설계하는 방법을 요약해보면 우선 원하는 조건에 맞는 $P_{N-1}(z)$ 또는 $Q_{N-1}(z)$ 를 필터 여러 가지 설계방법으로 설계를 한다. 그리고 II절에서 제안한 spectral factorization 방법을 이용하여 에너지 보존의 법칙에 맞는 또 다른 $Q_{N-1}(z)$ (또는 $P_{N-1}(z)$)를 찾아낸다. 이렇게 구해진 $P_{N-1}(z)$ 또는 $Q_{N-1}(z)$ 의 계수를 가지고

Schur algorithm을 이용하여 FIR lattice 필터 계수를 찾아낸다.

제안된 방법의 이해를 돕기 위해 다음과 같은 설계 사양을 가지는 FIR lattice 필터의 설계 예를 설명한다. 우선 설계하려는 필터는 16 tap의 길이를 가진다. 그림 2의 실선로 그린 것과 같이 $P_{N-1}(z)$ 는 McClellan-Parks algorithm을 이용하여 minimum phase lowpass 필터로 설계를 했다 [21,22]. 여기서 $P_{N-1}(z)$ 의 사양은 cutoff 주파수 0.4π , passband deviation은 0.0001, stopband deviation은 0.05, 그리고 linear equiripple FIR 필터 $P_{N-1}(z)P_{N-1}(z^{-1})$ 은 31이다. 그리고 에너지보존의 법칙을 만족하는 $Q_{N-1}(z)$ 는 II절에서 제안한 CMF 방법을 이용하여 구했다(그림 2의 점선). 얻어진 $P_{N-1}(z)$ 와 $Q_{N-1}(z)$ 의 계수와 Schur algorithm으로 구한 lattice 필터 계수는 표 1에 정리를 해놓았다.



(a) 진폭(Magnitude)



(b) 위상(Phase)

그림 2. 저역통과 및 고역통과 FIR 필터.
Fig. 2 Lowpass and highpass FIR filters.

표 1. $P_{N-1}(z)$ 와 $Q_{N-1}(z)$ 의 계수와 Schur algorithm으로 구한 lattice 필터 계수.

Table 1. The coefficients of $P_{N-1}(z)$ and $Q_{N-1}(z)$, and lattice filter parameters computed Schur algorithm.

Number (i)	p_i	q_i	κ_i	κ_i
0	0.34375421417149	0.20868854230714	0.85480888599505	0.51894293368722
1	0.39511664799102	-0.53660761892531	0.51818387537161	-0.85526923907321
2	0.30872352296355	0.40677315019674	0.98232899412004	0.18716235548612
3	0.09561121892434	0.10472431263126	0.87192557155267	0.48963843566566
4	-0.09747617402342	-0.18186841278792	0.99893900554334	0.04605283057629
5	-0.10668750336056	-0.10866899165947	0.95583071302558	-0.29391775726726
6	-0.00504739442716	0.06973774731997	0.98881332193477	-0.14915835331729
7	0.06861363034123	0.09924826992187	0.99221959567119	0.12450009624937
8	0.04825523183283	0.00217547125951	0.98706566220266	0.16031649478588
9	-0.03396923275256	-0.06364933303938	0.99999484811528	0.00320994437671
10	-0.05262755920094	-0.03470741320461	0.99303571562809	-0.11781369821461
11	-0.00205131897041	0.02200962753016	0.99616483978304	-0.06055536822521
12	0.09058151772889	0.03352978912487	0.99915833561092	0.04101975596252
13	-0.07449220203615	0.00651079829780	0.99329229608140	0.11563050871351
14	0.01833264366309	-0.02873162490884	0.99609656140349	-0.08827026883461
15	0.00356275715477	0.00083566593624	0.99999742481354	0.00226944184358

4.2. IIR lattice 필터를 위한 Schur algorithm

식 (4)의 polynomial 계수로부터 IIR lattice 필터를 설계하기 위한 generator 행렬을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ d_1 & n_1 \\ \vdots & \vdots \\ d_{N-1} & n_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

그림 1(b)의 필터 계수는 식 (20)을 이용하여 다음과 같은 반복적인 계산으로 얻을 수 있다 [10].

① 식 (20)의 generator matrix의 첫 번째 열로부터 reflection 계수 $r_0 = n_0/1$ 을 구한 후에 식(21)과 같이 hyperbolic rotation matrix를 계산한다.

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-r_0^2}} \begin{bmatrix} 1 & -r_0 \\ r_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

② $G\Gamma_0$ 를 계산하면

$$G_1 = G\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-r_0^2} & 0 \\ d_1 & n_1 \\ \vdots & \vdots \\ d_{N-1} & n_{N-1} \end{bmatrix}.$$

③ G_1 의 첫 번째 행의 한 열을 밑으로 내린다. 그리고 G_1 의 두 번째 열로부터 $r_1 = n_1/\sqrt{1-r_0^2}$ 을 구한 후에 Γ_1 을 구한다.

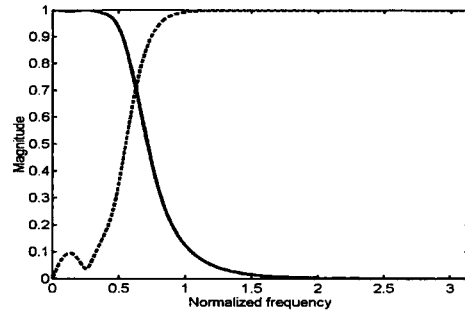
$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-r_0^2} & n_1 \\ \vdots & \vdots \\ d_{N-2} & n_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-r_1^2}} \begin{bmatrix} 1 & -r_1 \\ r_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

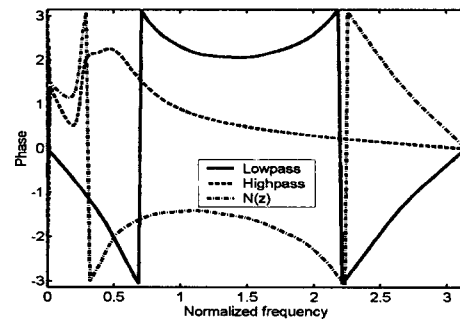
④ ③의 계산이 끝나면 ②와 ③의 계산을 마지막 열까지 반복하여 시행한다.

지금까지 본 논문에서 설명한 IIR lattice 필터를 설계하는 방법을 요약해보면 원하는 조건에 맞게 AR 모델인 $T_{N-1}(z)$ 를 구한 후에 CMF로 $N(z)$ 를 구한다. 그리고 Schur algorithm을 이용하여 lattice 계수를 구한다.

더욱 빠른 이해를 위해 16 tap 길이를 가지는 IIR lattice 필터의 설계 예를 들어보기로 한다. $T_{N-1}(z)$ 는 계산하기 위한 설계 사양으로 cutoff 주파수 0.2π 인 저역통과 필터로 그림 3의 실선과 같이 AR 모델의 autocorrelation 방법 [23]을 사용하여 계산을 하였다. 그리고 $N(z)$ 는 CMF로 계산하였고, 얻은 $N(z)$ 와 $T_{N-1}(z)$ 로부터 그림 3의 점선과 같이 $R_{N-1}(z)$ 를 구할 수 있다. 얻어지 $D(z)$ 와 $N(z)$ 의 계수로 Schur algorithm을 수행하여 표 II에 나타낸 것 과 같이 IIR lattice 필터의 계수를 구한다.



(a) 진폭(Magnitude)



(b) 위상(Phase)

그림 3. 저역통과 및 고역통과 IIR 필터.
Fig. 3 Lowpass and highpass IIR filters.

표 2. $D(z)$ 와 $N(z)$ 의 계수와 Schur algorithm으로 구한 lattice 필터 계수.

Table 2. The coefficients of $D(z)$ and $N(z)$, and lattice filter parameters computed Schur algorithm.

Number (i)	d_i	n_i	r_i
0	1.00000000000000	0.65188801842032	0.65188801842032
1	- 4.17215548455700	- 3.25252679377311	- 0.92645165362730
2	8.31669553177872	7.39890914259640	0.93763053985134
3	- 10.32555312612241	- 10.18264146953349	- 0.89452723006792
4	8.63301052570783	9.33941247131405	0.79602998879765
5	- 4.57173385949127	- 5.59046336780474	- 0.66998726513034
6	0.64143218917307	1.40865318797078	0.52648030684099
7	1.51586628967459	1.23164474631510	- 0.33100701531310
8	- 1.76370654182595	- 1.86063002596478	0.05956935813966
9	0.94640689139491	1.18231280753030	0.15384102066149
10	- 0.02931598301681	- 0.21005467457203	- 0.24511857771049
11	- 0.45449771599330	- 0.39643758533031	0.19358665368974
12	0.47743579038305	0.50753233972425	- 0.07833851810018
13	- 0.28142036884634	- 0.33368285597431	- 0.06746437331664
14	0.09957302374054	0.13176046662792	0.13754236514249
15	- 0.01673330849753	- 0.02567640233226	- 0.14357499052004

V. 제안된 방법과 기존에 사용되는 방법들과의 성능비교

지금까지 II절에서 IV절까지 본 논문에서 제안한 FIR/IIR lattice 필터의 설계에 대한 설명을 하였다. 특히 본 논문에서는 lattice 필터를 설계하는 경우에 spectral factorization을 할 때에 기존의 제안되었던 방법을 사용하지 않고 CMF를 사용하였다. 이와 같이 본 논문에서 제안한 방법이 다른 방법과 비교하여 성능면에서 어떠한 장점을 가지는지에 대한 시뮬레이션으로 FLOP (floating point operation)와 설계의 정확도면에서 비교를 하여 보았다.

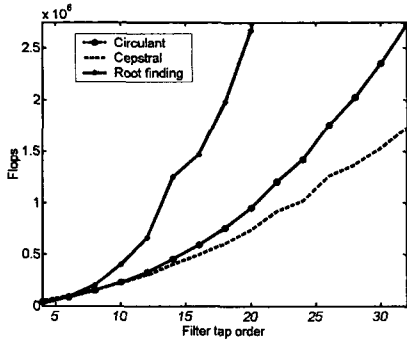
FIR lattice 필터를 설계하기 위하여 Spectral factorization을 사용하기 위한 covariance polynomial 길이는 7에서 63까지로 cutoff 주파수 0.4π , passband deviation 0.0001, 그리고 stopband deviation 0.05로서 equiripple linear phase FIR 필터를 만드는 방법으로 만들었다. 이렇게 만들어진 polynomial로부터 spectral factorization을 이용하여 minimum phase polynomial을 찾으면 길이는 4에서 32가 된다. 이렇게 찾는 내용에 대하여 본 논문에서는 제안된 방법과 기존의 polynomial root finding과 cepstral deconvolution 방

법들과 비교를 하여보았다.

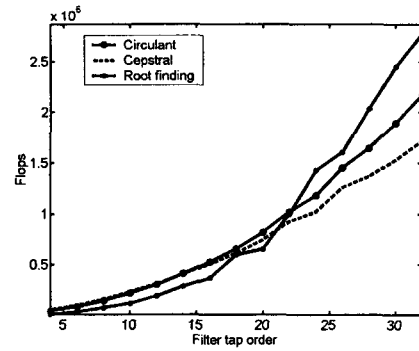
spectral factorization을 하기 위하여 필요한 계산량인 FLOPS를 보였다. 참고로 cepstral deconvolution과 본 논문에서 phase를 계산하기 위해 진폭을 $12N$ 만큼 샘플링 하였다. 그림 4(a)에서는 설계의 정확도는 실제 covariance polynomial과 계산하여 얻어진 covariance polynomial과의 norm으로 아래와 같은 수식으로 비교를 하였다.

$$E = \sqrt{\sum_{i=0}^{2N-1} (a_i - b_i)^2}, \tag{22}$$

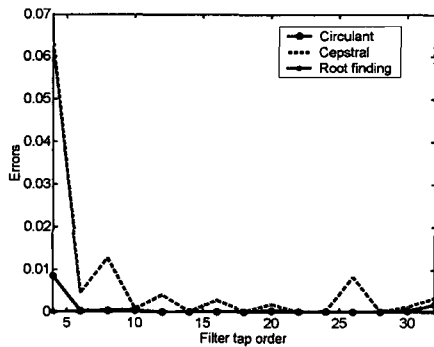
여기서 a_i 는 실제 covariance polynomial의 계수이고 b_i 는 spectral factorization으로 얻어진 minimum phase polynomial의 곱으로 계산되어진 polynomial의 계수이다.



(a) 계산량(FLOPS)

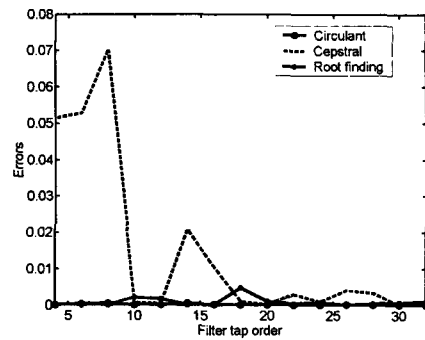


(a) 계산량(FLOP)



(b) 계산의 정확도(Accuracy of computation)

그림 4. 저역통과 및 고역통과 IIR 필터.
Fig. 4 Lowpass and highpass IIR filters.



(b) 계산의 정확도(Accuracy of computation)

그림 5. 저역통과 및 고역통과 IIR 필터.
Fig. 5 Lowpass and highpass IIR filters.

그림 4에서 보는 바와 같이 계산량에서는 polynomial root finding 방법이 계산량이 가장 적었고 제안된 방법은 두 번째였으며 계산의 정확도에서도 polynomial root finding 방법과 비교할 수 없을 정도로 비슷하다.

IIR lattice 필터를 설계하기 위하여 우선 식 (4)에서 $D(z)$ 의 길이가 4에서 32인 필터를 설계한 후에 c 와 $D(z)$ 로 covariance polynomial을 만들었다. 그리고 spectral factorization 방법으로 식 (4)의 $N(z)$ 를 찾았다. 이렇게 $N(z)$ 를 찾을 때까지의 FLOPs와 계산의 정확도는 그림 5에 보였다. 여기서는 참고로 cepstral deconvolution과 본 논문에서 phase를 계산하기 위해 진폭을 24N만큼 샘플링 하였다.

그림 5(a)에서 보듯이 길이가 22 까지는 본 논문에서 제안한 방법이 cepstral deconvolution 방법과 거의 비슷하지만 약간 더 좋으며 길이가 22이상의 경우에는 polynomial root finding이 가장 좋고 제안된 방법이 두 번째이다. 그리고 계산의 정확도는 그림 4(b)의 결과와 비슷한 결과가 나왔다. 이러한 결과로 계산량과 계산의 정확도로 보아 본 논문에서 제안된 방법이 다른 방법에 비교하여 계산량과 계산의 정확도 두 측면에서 모두 절절한 장점이 있음을 알 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 FIR/IIR lattice 필터를 설계하기 위하여 필요한 단계인 spectral factorization을 CMF 방법을 사용하는 방법을 제안하였다. 그리고 이렇게 식 (3)과 (4)와 같이 얻어진 polynomial 계수로 Schur algorithm을 이용하여 FIR/IIR lattice 필터의 계수를 찾았다. 본 논문에서 제안된 spectral factorization 방법과 기존의 polynomial root finding과 cepstral deconvolution 방법들과 비교를 하여 제안된 방법이 유용함을 보였다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 해외 Post-Doc 연구지원에 의해 수행된 연구로서, 관계부처에 감사 드립니다.

참고문헌

- [1] M. Vetterli, "A theory of multirate filter banks," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 3, pp. 356-372, 1987.
- [2] P. P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [3] A. M. Bruckstein and T. Kailath, "Inverse scattering for discrete transmission-line models," SIAM Review, vol. 29, no. 3, pp. 359-389, 1987.
- [4] J. D. Markel and A. H. Gray, Jr., Linear Prediction of Speech, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [5] E. M. Dowling and D. L. MacFarlane, "Lightwave lattice filters for optically multiplexed communication systems," J. Lightwave Technol., vol. 12, no. 3, pp. 471-486, 1994.
- [6] J. Bae, J. Chun, and S. Lee, "Analysis of the fiber Bragg gratings using the lattice filter model," Japanese J. Appl. Phys. part 1, vol. 39, no. 4A, pp. 1752-1756, 2000.
- [7] H. Schwetlick, "Inverse methods in the reconstruction of acoustical impedance profiles," J. Acoust. Soc. Am., vol. 73, no. 4, pp. 754-760, 1983.
- [8] S.T. Alexander, Adaptive Signal Processing Theory and Applications, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [9] T. Kailath, "Signal processing applications of some moment problems," in Proc. Symp. Appl. Math., vol. 37, pp. 71-109, 1987.
- [10] P. P. Vaidyanathan, "Passive cascaded-lattice structures for low-sensitivity FIR filter design with applications to filter banks," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-33, no. 11, pp. 1045-1064, 1986.
- [11] J. Chun and T. Kailath, "A constructive Proof of the Gohberg-Semencul Formula, Linear Algebra and Its Applications," vol. 121, pp. 475-489, 1989.
- [12] X. Chen and T. W. Parks, "Design of Optimal Minimum Phase FIR Filters By Direct Factorization," Signal Process., vol. 10, pp. 369-383, 1986.
- [13] F. L. Bauer, "Ein direktes Iterations Verfahren zur Hurwitz-zerlegung eines Polynoms, Arch. Elek. Ubertr.," vol. 9, no. MR 17, pp. 285-290, 1955.
- [14] G. Wilson, "Factorization of the Covariance Generating Function of a Pure Moving Average Process," SIAM J. Numer. Anal., vol. 6, no. 1, pp. 1-7, 1969.
- [15] G. A. Mian and A. P. Nainer, "A Fast Procedure to Design Equiripple Minimum-Phase FIR Filters," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-29, no. 5, pp. 327-331, 1982.
- [16] R. Boite and H. Leich, "Comments on A Fast Procedure to Design Equiripple Minimum-Phase FIR Filters," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-31, no. 5, pp. 503-504, 1984.
- [17] B. D. O. Anderson, K. L. Hitz, and N. D. Diem, "Recursive Algorithm for Spectral

- Factorization," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-21, no. 6, pp. 742-750, 1974.
- [18] P. J. Davis, Circulant Matrices, Wiley, New York, 1979.
- [19] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [20] V. Cizek, "Discrete Hilbert transform," IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-18, no. 4, pp. 340-343, 1970.
- [21] O. Herrmann and W. Schuessler, "Design of nonrecursive digital filters with minimum phase," Electron. Lett., vol.6, no.11, pp.329-330, 1970.
- [22] J. H. McClellan and T. W. Parks and L. R. Rabiner, "A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters," IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-21, no. 6, pp. 506-526, 1973.
- [23] L. Jackson, Digital Filtering and Signal Processing, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.

저자소개



김상태(Sang-Tae Kim)
전자공학과 공학박사
한국산업기술대학교 겸임교수
한국산업기술평가원 실장

※관심분야: 마이크로파 및 전파방송



박종원(Jong-Won Park)
전자공학과 공학석사
한국해양연구원 선임연구원

※관심분야: 초음파 통신, 신호처리, 선박 통신망, 해양 시스템,