

축방향으로 이동하는 티모센코보의 동특성에 관한 스펙트럴요소 해석

김주홍*, 오형미**, 이우식†

(2002년 11월 7일 접수, 2003년 8월 22일 심사완료)

Spectral Element Analysis for the Dynamic Characteristics of an Axially Moving Timoshenko Beam

JooHong Kim, Hyungmi Oh and Usik Lee

Key Words : Moving Beam(움직이는 보), Timoshenko Beam(티모센코 보), Vibration(진동), Spectral Element(스펙트럴요소), Stability(안정성), Divergence(다이버전스), Flutter(플러터)

ABSTRACT

The use of frequency-dependent spectral element matrix (or exact dynamic stiffness matrix) in structural dynamics is known to provide very accurate solutions, while reducing the number of degrees-of-freedom to resolve the computational and cost problems. Thus, in the present paper, the spectral element model is formulated for the axially moving Timoshenko beam under a uniform axial tension. The high accuracy of the present spectral element is then verified by comparing its solutions with the conventional finite element solutions and exact analytical solutions. The effects of the moving speed and axial tension on the vibration characteristics, the dispersion relation, and the stability of a moving Timoshenko beam are investigated, analytically and numerically.

1. 서론

축방향으로 이동하는 구조물은 자동차, 항공, 생산기기, 전자기기등과 같은 여러 산업분야에서 기술적으로 중요한 역할을 해왔다. 주요한 축방향으로 이동하는 기계구조로는 방직기, 마그네틱 테이프를 이용하는 녹음기, 락스, 케이블카에 사용되는 삭도 등등이 있다. 이 분야의 주요한 연구에 대한 검토가 Wicker와 Mote⁽¹⁾에 의해 이루어졌다.

축방향으로 이동하는 구조물의 이동속도는 이동속도가 낮은 경우에도 고유진동수의 변화나 복소모우드가 발생하는 등과 같은 구조물의 동특성에 많은 영향을 미친다. 또한, 축방향의 이동속도가 특정 속도를 넘어서면 구조물의 안정성이 상실되어 과도한 진동으로 인해 파괴될 수도 있다. 따라서, 축방향으로 이동하는 구조물의 설계나 최적

화에 앞서서 구조물의 동특성과 안정성을 정확하게 예측하는 것은 매우 중요하다.

보처럼 축방향으로 이동하는 일차원 구조물은 주로 오일러보(Euler beam) 이론⁽²⁻¹⁷⁾을 이용하여 해석되어 왔다. 특히, 티모센코보(Timoshenko beam) 이론을 축방향으로 이동하는 일차원 구조물에 적용한 경우는 매우 드물다. 따라서, 본 연구에서는 티모센코보 이론을 축방향으로 이동하는 일차원 구조물의 진동해석에 이용하였다. 축방향으로 이동하는 일차원 구조물에 대한 주요한 연구는 다음과 같다. Simpson⁽¹⁸⁾은 처음으로 티모센코보 이론을 이동하는 두꺼운 보에 적용하였으나, 수치결과를 보이지는 않았다. 이후에, Chonan⁽¹⁹⁾은 라플라스 변환법(Laplace transform method)을 이용하여 이동하는 티모센코보의 정상상태 응답을 연구하였다. Simpson과 Chonan등은 그들의 연구에서 축방향의 변형은 고려하지 않았다.

이동하는 보에 대한 진동해석을 위해서 사용된 해석기법에는 갤러킨법(Galerkin's method),^(2,3) 모우드가정법(assumed mode method),⁽⁴⁾ 유한요소법(finite element method: FEM),^(5,6) 그린함수법(Green's function method),⁽⁷⁾ 전달함수법(transfer function method),⁽⁸⁾

* 인하대학교 산업과학기술연구소

** 인하대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학부

E-mail: ulce@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

섭동법(perturbation method),⁽⁹⁾ Laplace 변환법,⁽¹⁹⁾ 점근법(asymptotic method)⁽¹⁰⁾ 등이 있다. 그러나, 앞서 수행된 연구들^(20,21)에 의해 알려진 바에 따르면 기존의 구조해석기법들에 비해 스펙트럴요소법은 구조물의 진동해석에 많은 장점을 가진다.

스펙트럴요소법(spectral element method)^(20,21)은 주파수영역에서 정의된 정확한 형상함수를 사용하여 스펙트럴요소(spectral element)를 유도하기 때문에 엄밀한 동특성 해석이 가능하다. 균등한 보를 해석하는 경우 보의 길이에 상관없이 동특성 해석 결과의 정확성을 증가시키기 위한 추가적인 요소분할이 필요하지 않다. 또한, 기존의 유한요소법에서 사용되는 요소결합기법 또한 동등한 방법으로 스펙트럴요소법에 적용할 수 있다. 시간영역이나 주파수영역에서 동적응답을 계산할 때 스펙트럴요소법은 고속 푸리에변환(fast Fourier transform)와 역고속 푸리에변환(inverse fast Fourier transform)을 이용하기 때문에 기존의 해석기법에 비해 적은 계산 시간이 요구된다. 최근에 LeNgoc과 McCallion⁽²²⁾은 이동하는 끈에 대한 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 유도하고 정확한 고유치를 계산하였다.

본 연구의 목적은 첫째, 일정한 장력을 받으며 일정한 속도로 축방향으로 이동하는 티모셴코보의 스펙트럴요소를 유도하고 둘째, 유도된 스펙트럴요소의 정확도를 검증하기 위해 유한요소법을 이용하여 얻은 결과와 본 연구에서 유도된 스펙트럴요소를 이용하여 계산한 결과를 비교하였다. 마지막으로 보의 이동속도와 장력이 이동하는 보의 안정성에 미치는 영향을 고찰하였다.

2. 운동방정식

티모셴코보 이론⁽²³⁾에 근거해서, 보의 굽힘변위와 회전각을 각각 $w(x, t)$ 과 $\psi(x, t)$ 으로 나타내면 보의 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[c^2 + (\dot{w} + c\psi')^2 \right] + \rho I (\dot{\psi} + c\psi')^2 \right\} dx \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EI \psi'^2 + \kappa GA (w' - \psi)^2 + Pw'^2 \right\} dx$$

여기서, $L, \rho A, \rho I, \kappa, c, P$ 는 각각 보의 길이, 보의 단면적이 당 밀도, 보의 단위길이 당 질량관성모멘트, 보의 단면형상에 따른 계수, 보의 축방향 이동 속도, 축방향의 장력이다. 식 (1)에서 (\cdot) 는 시간 t 에 대한 미분을 (\cdot) 은 공간좌표 x 에 대한 미분을 나타낸다. 분포하중 $p(x, t)$ 와 경계에서의 전단력과 굽힘모멘트에 의한 가상일은 다음과 같이 나타낼

수 있다.

$$\delta W = \int_0^L p(x, t) \delta w dx + M_1 \delta \psi_1 + M_2 \delta \psi_2 + Q_1 \delta w_1 + Q_2 \delta w_2 \quad (2)$$

여기서, M_1, Q_1 는 각각 $x = 0$ 에서 굽힘모멘트와 전단력을 나타내며 M_2, Q_2 는 각각 $x=L$ 에서 굽힘모멘트와 전단력을 나타낸다.

식 (1)과 (2)에 해밀톤의 원리(Hamilton's principle)를 적용하면

$$\int_0^T (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (3)$$

다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^T \int_0^L \left\{ \partial [\kappa GA (w' - \psi)] / \partial x - \rho A (c^2 w'' + 2c\psi' + \ddot{w}) + Pw'' + p(x, t) \right\} \delta w dx dt$$

$$+ \int_0^T \int_0^L \left\{ \partial (EI \psi') / \partial x - \rho I (c^2 \psi'' + 2c\dot{\psi}' + \ddot{\psi}) + \kappa GA (w' - \psi) \right\} \delta \psi dx dt \quad (4)$$

$$+ \int_0^T \left[-Q(x) \delta w_0^L + Q_1 \delta w_1 + Q_2 \delta w_2 \right] dt$$

$$+ \int_0^T \left[M(x) \delta \psi_0^L + M_1 \delta \psi_1 + M_2 \delta \psi_2 \right] dt = 0$$

여기서, $Q(x)$ 와 $M(x)$ 는 다음과 같이 정의되는 전단력과 굽힘모멘트이다.

$$Q(x) = \kappa GA (w' - \psi) - \rho A c (\dot{w} + c\psi') + Pw' \quad (5)$$

$$M(x) = -EI \psi' + \rho I c (\dot{\psi} + c\psi')$$

식 (4)로부터 이동하는 티모셴코보의 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\kappa GA (w'' - \psi'') - \rho A (c^2 w'' + 2c\dot{w}' + \ddot{w}) + Pw'' + p(x, t) = 0 \quad (6)$$

$$EI \psi'' - \rho I (c^2 \psi'' + 2c\dot{\psi}' + \ddot{\psi}) + \kappa GA (w' - \psi) = 0$$

식 (6)에 따른 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{at } x = 0, \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_1 \text{ or } Q(0) = -Q_1 \\ \psi(0) = \psi_1 \text{ or } M(0) = M_1 \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\text{at } x = L, \left\{ \begin{array}{l} w(L) = w_2 \text{ or } Q(L) = Q_2 \\ \psi(L) = \psi_2 \text{ or } M(L) = -M_2 \end{array} \right.$$

만약 전단변형과 회전관성의 효과를 무시하면, 식 (6)과 (7)은 각각 이전 연구들^(7-8, 12-17)에서 사용된 오일러보 모델로 나타낼 수 있다. 또한, 식 (6)의 첫번째 식에서 축방향의 장력 P 를 무시하면 식 (6)과 (7)은 Simpson⁽¹⁸⁾에 의해 유도된 결과와 동일한 방정식으로 나타내어진다.

3. 스펙트럴요소 유도

이동하는 티모셴코보의 진동응답을 다음과 같이 스펙트럴형태로 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N W_n(x)e^{i\omega_n t}, \psi(x,t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(x)e^{i\omega_n t} \quad (8)$$

여기서, $W_n(x)$ 과 $\Psi_n(x)$ 은 주파수 $\omega_n = 2\pi n/T$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 에 각각 대응하는 푸리에(Fourier) 계수이다. N 은 해석에 사용되는 푸리에 계수의 갯수이며, T 는 시간창의 길이이다. N 과 T 사이에는 다음과 같은 관계가 존재한다.

$$N = 2 f_{\text{NyQ}} T \quad (9)$$

여기서 f_{NyQ} 는 Nyquist 주파수⁽²¹⁾이며 단위는 Hz이다. 식 (8)에 사용된 아랫첨자 n 과 합산기호는 이하의 식에서 간략한 표현을 위해 생략한다.

식 (8)을 식 (6)에 대입하고 분포하중 $p(x,t) = 0$ 으로 두면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (1+a_4 - a_1c^2)W'' - a_12ic\omega W' + a_1\omega^2 W - \Psi' &= 0 \\ (1-a_2c^2)\Psi'' - a_22ic\omega \Psi' + (a_2\omega^2 - a_3)\Psi + a_3W' &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $i = \sqrt{-1}$ 이고 a_m ($m=1, 2, 3, 4$)은 다음과 같이 정의된다.

$$a_1 = \frac{\rho A}{\kappa GA}, a_2 = \frac{\rho l}{EI}, a_3 = \frac{\kappa GA}{EI}, a_4 = \frac{P}{\kappa GA} \quad (11)$$

식 (10)의 일반해는 다음과 같이 가정한다.

$$W(x) = \bar{W} e^{ikx}, \Psi(x) = \bar{\Psi} e^{ikx} \quad (12)$$

여기서, k 는 파수(wavenumber)이다. 식 (12)를 식 (10)에 대입하고 e^{ikx} 를 식에서 소거한 다음 행렬형태로 나타내면 다음과 같은 고유치문제를 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{W} \\ \bar{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} k_{11} &= (1+a_4 - a_1c^2)k^2 - 2a_1c\omega k - a_1\omega^2 \\ k_{12} &= ik \\ k_{21} &= -ia_3k \\ k_{22} &= (1-a_2c^2)k^2 - 2a_2c\omega k - (a_2\omega^2 - a_3) \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)이 해를 가지기 위한 조건으로부터 같은 분산관계(dispersion relation)에 대한 특성방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$k^4 + \alpha k^3 + \beta k^2 + \gamma k + \eta = 0 \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha &= -2c\omega(a_1 + a_2 + a_2a_4 - 2a_1a_2c^2)/\Delta \\ \beta &= [a_3(a_4 - a_1c^2) - (a_1 + a_2 + a_2a_4 - 6a_1a_2c^2)\omega^2]/\Delta \\ \gamma &= 2c\omega a_1(2a_2\omega^2 - a_3)/\Delta \\ \eta &= \omega^2 a_1(a_2\omega^2 - a_3)/\Delta \\ \Delta &= (1-a_2c^2)(1+a_4 - a_1c^2) \end{aligned} \quad (16)$$

식 (15)의 네 근($k_r, r=1, 2, 3, 4$)을 이용하여, 다음과 같이 식 (10)의 일반해를 나타낼 수 있다.

$$W(x) = \sum_{r=1}^4 A_r e^{ik_r x}, \Psi(x) = \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r A_r e^{ik_r x} \quad (17)$$

여기서

$$\varepsilon_r = \frac{a_3 i k_r}{(1-a_2c^2)k_r^2 - 2a_2c\omega k_r - (a_2\omega^2 - a_3)} \quad (18)$$

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 유한한 길이 l 을 가지는 보에 대한 스펙트럴요소의 노드 자유도는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} W_1 &= W(0), \Psi_1 = \Psi(0) \\ W_2 &= W(l), \Psi_2 = \Psi(l) \end{aligned} \quad (19)$$

식 (17)을 식 (19)에 대입하면 다음과 같이 노드자유도벡터 $\{y\}$ 와 상수벡터 $\{A\}$ 사이의 관계를 얻을 수 있다.

$$\{d\} = [X(\omega)]\{A\} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{d\} &= \{W_1 \ \Psi_1 \ W_2 \ \Psi_2\}^T \\ \{A\} &= \{A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4\}^T \\ [X(\omega)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1\varepsilon_1 & e_2\varepsilon_2 & e_3\varepsilon_3 & e_4\varepsilon_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

$$e_r = e^{ik_r l} \quad (r=1, 2, 3, 4) \quad (22)$$

식 (8)을 식 (5)에 대입하면, 힘과 변위의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= \kappa GA [(1+a_4 - a_1c^2)W' - a_1ic\omega W - \Psi] \\ M &= -EI [(1-a_2c^2)\Psi' - a_2ic\omega \Psi] \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에서 Q 와 M 은 각각 전단력과 굽힘모멘트의 스펙트럴요소를 나타낸다. Fig. 1에 나타낸 스펙트럴요소의 노드에서 전단력과 굽힘모멘트는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Q(0), & M_1 &= M(0) \\ Q_2 &= Q(l), & M_2 &= -M(l) \end{aligned} \quad (24)$$

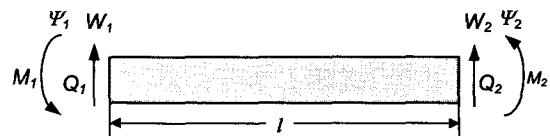


Fig. 1 Sign convention for the finite Timoshenko beam element

식 (17)을 식 (24)에 대입하면 다음과 같이 노드에서 외력벡터 $\{f\}$ 와 상수벡터 $\{A\}$ 사이의 관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{f\} = [Y(\omega)]\{A\} \quad (25)$$

여기서

$$\{f\} = \{Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2\}^T$$

$$[Y(\omega)] = EI \begin{bmatrix} -g_1 & -g_2 & -g_3 & -g_4 \\ -h_1 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ e_1 g_1 & e_2 g_2 & e_3 g_3 & e_4 g_4 \\ e_1 h_1 & e_2 h_2 & e_3 h_3 & e_4 h_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$g_r = i a_3 [(1 + a_4 - a_1 c^2) k_r - a_1 c \omega + i \varepsilon_r]$$

$$h_r = i [(1 - a_2 c^2) k_r - a_2 c \omega] \varepsilon_r \quad (27)$$

식 (20)와 (25)에서 상수벡터 $\{A\}$ 를 소거하면 다음과 같이 노드에서의 힘과 변위의 관계를 유도할 수 있다.

$$\{f\} = [s(\omega)]\{d\} \quad (28)$$

여기서, $[s(\omega)]$ 는 스펙트럴요소행렬(spectral element matrix)이며, 주파수의 함수이며 다음과 같다.

$$[s(\omega)] = [Y(\omega)][X(\omega)]^{-1} \quad (29)$$

스펙트럴요소행렬은 유한요소법에서 사용되는 요소결합기법을 거의 유사하게 사용할 수 있으며, 결합된 전역행렬에 경계조건을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[S(\omega)]\{d_g\} = \{f_g\} \quad (30)$$

여기서 $[S(\omega)]$ 는 전역 스펙트럴요소행렬이며, $\{d_g\}$ 는 전역 노드자유도 벡터, $\{f_g\}$ 는 전역 노드외력벡터이다.

시간영역에서 동적응답을 얻기 위해서, 먼저 시간영역에서 정의된 외력을 고속푸리에변환 알고리즘을 이용하여 주파수영역의 외력 $\{f_g\}$ 으로 변환한다. 이어서, 식 (30)를 풀어서 각 주파수에서 $\{d_g\}$ 에 대한 값을 얻을 수 있다. 마지막으로 계산된 $\{d_g\}$ 와 식 (20)를 이용하여 상수벡터 $\{A\}$ 를 계산한 다음 식 (17)을 이용하여 주파수영역에서 변위를 계산할 수 있다. 계산된 주파수영역의 변위값은 역 고속푸리에변환 알고리즘을 이용하여 시간영역의 변위값으로 변환할 수 있다. 고유진동수 ω_{NAT} 는 다음과 같이 전역 스펙트럴요소행렬의 행렬식이 0이 되도록 하는 조건으로부터 계산할 수 있다.

$$\det[S(\omega_{NAT})] = 0 \quad (31)$$

4. 안정성

축방향으로 이동하는 보의 특정한 위험속도 이상에서 불안정해질 수 있다. 이동하는 보의 안정성을 해석하기 위해 보의 진동응답을 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁵⁾

$$w(x,t) = \bar{w} e^{\lambda t}, \quad \psi(x,t) = \bar{\psi} e^{\lambda t} \quad (32)$$

식 (32)을 자유진동에 대한 운동방정식에 적용하면 고유치문제를 유도할 수 있다. 이때, 고유치 λ 는 다음과 같이 복소수형태로 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \sigma + i\Omega \quad (33)$$

불안정현상의 종류는 고유치 λ 의 실수부와 허수부의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

Stable	if $\sigma \leq 0$	(34)
Flutter	if $\sigma > 0$ and $\Omega \neq 0$	
Divergence	if $\sigma > 0$ and $\Omega = 0$	

본 연구에 대한 안정성 해석을 위한 고유치 문제는 식 (30)의 $i\omega$ 를 λ 로 바꾸면 다음과 같이 쉽게 얻을 수 있다

$$[S(\lambda)]\{d_g\} = \{0\} \quad (35)$$

특정 이동속도 c 와 축방향 장력 P 일 때 불안정상태의 종류는 아래의 고유치 문제를 풀어서 판단할 수 있다.

$$\det[S(\lambda)] = 0 \quad (36)$$

정적 불안정현상인 다이버전스(divergence)가 발생하는 위험속도(c_D)는 두 가지 방법으로 계산할 수 있다. 첫번째 방법은 보가 정적인 방법에 의해 발산되는 속도를 찾는 것이고,^(7,26) 두번째는 보의 이동속도가 보 내부에 전파되는 파동속도가 같아지면 역시 발산이 발생한다.⁽²⁶⁾ 이어지는 부분에서 앞서 언급된 두 가지 방법을 이용하여 단순지지된 티모셴코보의 발산이 발생하는 위험속도를 결정할 것이다.

첫번째 방법을 이용하기 위해서 식 (13)에서 $\omega = 0$ 으로 두면 식 (13)은 정적인 경우의 고유치문제로 표현되며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (1 + a_4 - a_1 c^2) k^2 & ik \\ -i a_3 k & (1 - a_2 c^2) k^2 + a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{W} \\ \bar{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

식 (37)에서 해가 존재하기 위해서는 다음과 같은 특성방정식을 만족해야 한다.

$$k^2 [(1 + a_4 - a_1 c^2)(1 - a_2 c^2) k^2 - a_3 (a_1 c^2 - a_4)] = 0 \quad (38)$$

식 (38)의 해는 다음과 같다.

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$k_3 = -k_4 = \bar{k} = \sqrt{\frac{a_3(a_1c^2 - a_4)}{(1 - a_2c^2)(1 + a_4 - a_1c^2)}} \quad (39)$$

따라서, 식 (39)의 결과로부터 이동하는 보의 일반 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x) = A_1 + A_2x + A_3e^{i\bar{k}x} + A_4e^{-i\bar{k}x}$$

$$\psi(x) = B_1 + B_2x + B_3e^{i\bar{k}x} + B_4e^{-i\bar{k}x} \quad (40)$$

여기서

$$B_1 = A_2, \quad B_3 = \frac{ia_3\bar{k}}{(1 - a_2c^2)\bar{k}^2 + a_3} A_3$$

$$B_2 = 0, \quad B_4 = -\frac{ia_3\bar{k}}{(1 - a_2c^2)\bar{k}^2 + a_3} A_4 \quad (41)$$

계수 A_i ($i=1, 2, 3, 4$) 는 경계조건으로 결정되어지며, 단순지지 경계조건을 식 (40)에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\bar{k}_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (42)$$

여기서, L 은 보의 길이이며 n 은 모우드번호를 나타낸다. 식 (39)과 (42)로부터 같게 두면 위험속도 c_{Dn} 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_{Dn} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{q_1 - \sqrt{q_1^2 + q_2}}{2a_1a_2}} & \text{(bending wave)} \\ \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2}}{2a_1a_2}} & \text{(shear wave)} \end{cases} \quad (43)$$

여기서

$$q_1 = a_1a_3L^2 + \pi^2n^2(a_1 + a_2 + a_2a_4)$$

$$q_2 = -4\pi^2n^2a_1a_2[a_3a_4L^2 + \pi^2n^2(1 + a_4)] \quad (44)$$

두 번째 방법으로써, 위험속도 c_D 는 보의 이동속도와 정지된 보에 대한 굽힘파동(bending wave)의 위상속도(phase speed)가 같을 때 불안정상태가 발생할 수 있다는 사실로부터 계산할 수 있다 ($c_D = c_p$). 위상속도는 다음과 같다.⁽²⁰⁾

$$c_p = \omega/k \quad (45)$$

정지된 보에 대한 분산관계는 식 (15)에서 보의 이동속도 $c=0$ 일때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k^4 + \bar{\beta}k^2 + \bar{\eta} = 0 \quad (46)$$

여기서

$$\bar{\beta} = a_3a_4 - \omega^2(a_1 + a_2 + a_2a_4)/\bar{\Delta}$$

$$\bar{\eta} = a_1\omega^2(a_2\omega^2 - a_3)/\bar{\Delta} \quad (47)$$

$$\bar{\Delta} = 1 + a_4$$

식 (46)에 대한 해는 다음과 같다.

$$k_1 = -k_2 = \bar{k}_1 = \sqrt{\frac{-\bar{\beta} + \sqrt{\bar{\beta}^2 - 4\bar{\eta}}}{2}}$$

$$k_3 = -k_4 = \bar{k}_2 = \sqrt{\frac{-\bar{\beta} - \sqrt{\bar{\beta}^2 - 4\bar{\eta}}}{2}} \quad (48)$$

식 (48)을 이용하여 정지된 보의 일반해를 구할 수 있다. 그러나, 정지된 보의 일반해는 차단주파수(cut-off frequency)⁽²⁰⁾ $\omega_c = \sqrt{a_3/a_2}$ 를 기준으로 각각 다른 형태를 가진다. 차단주파수 ω_c 미만의 주파수에서는 전단파동(shear wave)은 감쇠되어 사라지고 굽힘파동만이 전파된다. 따라서, 차단주파수를 중심으로 다음과 같이 세가지 형태로 일반해를 나타낼 수 있다.

(a) when $\omega < \omega_c$

$$W(x) = A_1 \sin(\bar{k}_1x) + A_2 \cos(\bar{k}_1x) + A_3 \sinh(\bar{k}_2x) + A_4 \cosh(\bar{k}_2x)$$

$$\Psi(x) = b_1A_2 \sin(\bar{k}_1x) - b_1A_1 \cos(\bar{k}_1x) + b_2A_3 \sinh(\bar{k}_2x) + bA_4 \cosh(\bar{k}_2x) \quad (49)$$

(b) when $\omega = \omega_c$

$$W(x) = A_1 \sin(\bar{k}_1x) + A_2 \cos(\bar{k}_1x) + A_3 + A_4x$$

$$\Psi(x) = b_1A_2 \sin(\bar{k}_1x) - b_1A_1 \cos(\bar{k}_1x) - b_3A_4 \quad (50)$$

(c) when $\omega > \omega_c$

$$W(x) = A_1 \sin(\bar{k}_1x) + A_2 \cos(\bar{k}_1x) + A_3 \sin(\bar{k}_2x) + A_4 \cos(\bar{k}_2x)$$

$$\Psi(x) = b_1A_2 \sin(\bar{k}_1x) - b_1A_1 \cos(\bar{k}_1x) + b_2A_4 \sin(\bar{k}_2x) - b_2A_3 \cos(\bar{k}_2x) \quad (51)$$

여기서

$$b_1 = \frac{a_3\bar{k}_1}{(a_2\omega^2 - a_3) - \bar{k}_1^2}, \quad b_2 = \frac{a_3\bar{k}_2}{(a_2\omega^2 - a_3) - \bar{k}_2^2}$$

$$b_3 = \frac{a_3}{a_2\omega^2 - a_3} \quad (52)$$

단순지지의 조건을 식 (49)–(51)에 적용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

(a) when $\omega \leq \omega_c$

$$\bar{k}_{1n} = \frac{n\pi}{L} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (53)$$

(b) when $\omega > \omega_c$

$$\bar{k}_{1n} = \frac{n\pi}{L} \quad \text{or} \quad \bar{k}_{2n} = \frac{n\pi}{L} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (54)$$

식 (53) 또는 식 (54)의 파수를 식 (46)에 대입한 후 주파수 ω 에 대해 풀고 식 (45)의 관계를 적용하면 식 (43)와 동일한 결과를 얻을 수 있다.

식 (43)으로부터 정지된 보에 대한 굽힘파동이나 전단파동의 위상속도가 이동하는 보의 이동속도와 같아질 경우 불안정이 나타날 수 있다는 사실을 알 수 있다. 그러나, 이동하는 보의 위험속도는 대개의 경우에 가장 낮은 위험속도 c_{DI} 만으로도 나타내며, 이 위험속도는 정지된 보의 첫번째 굽힘파동의 위상속도와 같다.

5. 수치 예제

본 연구에서 수치 시뮬레이션을 위해서 사용한 보의 단순 지지된 균등한 보이며 다음과 같은 물성치를 적용하였다. 길이 $L = 1\text{ m}$, 단위길이 당 밀도 $\rho A = 0.84\text{ kg/m}$, 단위길이 당 질량 관성모멘트 $\rho I = 7 \times 10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 굽힘강성 $EI = 180\text{ N}\cdot\text{m}^2$, 전단강성 $\kappa GA = 6.75 \times 10^6\text{ N}$.

Table 1은 스펙트럴요소의 정확도를 확인하고 이동속도 c 와 축방향 장력 P 가 고유진동수에 미치는 영향을 보여준다. 스펙트럴요소를 이용하여 계산된 고유진동수와 이론해석치,⁽²³⁾ 유한요소법에 의해 계산된 고유진동수를 서로 비교하였다. 사용된 유한요소모델⁽²⁴⁾은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} = \{f\} \quad (55)$$

여기서 $\{d\}$ 는 식 (21)에 의해 정의된 절점변위에 대한 벡터이며, $\{f\}$ 는 절점외력벡터, $[M]$ 은 질량행렬, $[C]$ 는 자이로스코프 행렬, $[K]$ 은 강성행렬이다.

Table 1에서 스펙트럴요소법에 의한 결과는 사용된 요소의 개수가 단지 한 개임에도 불구하고 이론해석치⁽²³⁾와 정확히 일치함을 알 수 있다. 그러나, 유한요소법은 요소의 개수를 충분히 증가시켰을 때에야 비로소 결과가 비교적 신뢰할 수 있는 정확도를 보인다. 즉, 스펙트럴요소모델은 유한요소모델에서 사용되는 요소의 개수보다 더 적은 개수의 요소를 사용하고도 더 정확한 결과를 얻을 수 있다. 또한, 고주파수영역에서는 이러한 경향이

Table 1 Comparison of the natural frequencies obtained by the present spectral element model (SEM), the conventional finite element model (FEM) and the analytical method ⁽²³⁾

c (m/s)	P (kN/m)	Method	N_E (N_{DOF})	Natural Frequency (Hz)					
				ω_1	ω_2	ω_3	ω_5	ω_{10}	ω_{15}
0	0	Analytical ⁽²³⁾	-	22.99	91.91	206.63	572.39	2260.92	4985.98
		SEM	1 (2)	22.99	91.91	206.63	572.39	2260.92	4985.98
		FEM	10 (20)	22.99	91.92	206.75	574.99	2541.59	6352.15
			20 (40)	22.99	91.91	206.64	572.63	2275.13	5126.34
			50 (100)	22.99	91.91	206.63	572.41	2262.09	4998.30
100 (200)	22.99		91.91	206.63	572.39	2261.17	4988.63		
0	1	SEM	1 (2)	28.74	98.17	213.00	578.84	2267.45	4992.58
		FEM	10 (20)	28.74	98.18	213.13	581.42	2547.47	6357.62
			20 (40)	28.74	98.17	213.02	579.08	2281.61	5132.80
			50 (100)	28.74	98.17	213.01	578.86	2268.61	5004.88
			100 (200)	28.74	98.17	213.00	578.84	2267.69	4995.23
c_{DI}	1	SEM	1 (2)	0.00	82.93	200.02	567.33	2256.42	4980.86
		FEM	10 (20)	0.33	82.97	200.24	570.52	2540.94	6359.58
			20 (40)	0.32	82.94	200.05	567.63	2271.43	5124.57
			50 (100)	0.32	82.94	200.03	567.36	2257.66	4993.52
			100(200)	0.32	82.94	200.03	567.34	2256.69	4983.60

Note: N_E = the number of finite elements, N_{DOF} = the number of degrees-of-freedom

더욱 명백히 나타난다.

Table 1로부터 알 수 있듯이, 이동속도가 고정되어 있을 경우, 고유진동수는 장력이 증가함에 따라 증가한다. 그 반면, 장력이 고정되어 있을 경우 이동속도가 증가함에 따라 고유진동수가 감소함을 알 수 있다. 이동속도가 특정한 값에 이르렀을 때 첫번째 고유진동수가 사라져버린다. 즉, 불안정상태가 발생한 것이다.

Fig. 2는 보에 작용하는 장력이 $P = 1 \text{ kN/m}$ 로 고정되어 있을 때 이동속도의 변화에 따른 고유치의 변화를 보이고 있다. 이동속도가 첫번째 위험속도 $c_{D1} = 57.5 \text{ m/s}$ 보다 작을 때, 모든 고유치가 순수한 허수이기 때문에 보는 안정된 상태이다. 그러나, 보의 이동속도가 c_{D1} 과 $c_S = 98.2 \text{ m/s}$ 사이에 있을 때, 양수이면서 실수인 고유치가 존재하므로 발산이 발생할 수 있다. Fig. 2는 이동속도 c_S 와 $c_{F1} = 101.2 \text{ m/s}$ 사이에 두 번째 안정된 영역이 존재할

수 있음을 보여준다. 이동속도가 이 영역에 있을 때는 모든 고유치가 순수한 허수이다. 이동속도가 c_{F1} 보다 커지면, 보의 고유치가 양수인 실수부를 가질 수 있게 되므로 플러터가 발생할 수 있다. 여기서, c_{D2} , c_{F2} 는 각각 142.0 m/s 와 154.6 m/s 이다.

Fig. 3는 장력 P 의 변화에 따른 세 개의 위험속도 c_{D1} (첫번째 다이버전스 속도), c_S , c_{F1} (첫번째 플러터 속도)의 변화를 나타낸다. c_{D1} 아래의 부분과 c_S 와 c_{F1} 사이의 좁은 영역은 각각 첫번째 안정영역과 두 번째 안정영역이다. c_{D1} 과 c_S 사이는 첫번째 불안정영역이며 이 영역에서는 발산이 발생할 수 있다. 그 반면에, c_{F1} 이상의 영역은 발산뿐만 아니라 플러터도 일어날 수 있는 불안정영역이다.

이동하는 티모센코보는 복소 모우드를 가질 수 있다. Fig. 4는 여러 이동속도에서 고유모우드의 실수부를 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 정지된 보의 여러 대칭, 비대칭 모우드들이 보가 이동하는 경우에 이동속도의 영향으로 원래의 대칭, 비대칭 형태를 유지하지 못한다. Fig. 4(a)에서 알 수 있듯이 이동속도가 첫번째 위험속도 c_{D1} 에 도달하면 첫번째 굽힘모우드는 나타나지 않는다.

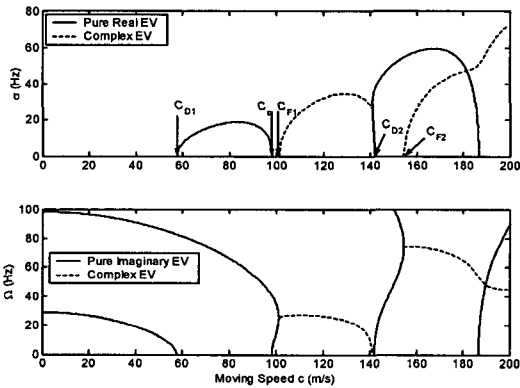


Fig. 2 The eigenvalues $\lambda = \sigma + i\Omega$ vs. the moving speed of beam c

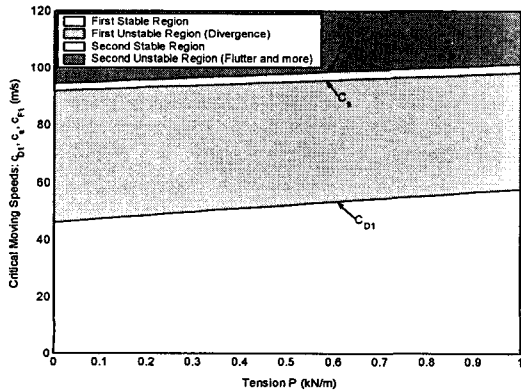


Fig. 3 The critical moving speeds vs. the tension

6. 결론

본 논문에서는 일정한 장력을 받는 이동하는 티모센코보의 운동방정식을 유도하였고 정확한 형상함수를 이용하여 스펙트럴요소모델을 유도하였다. 개발된 스펙트럴요소를 이용한 몇몇 수치예제의 결과를 해석적 방법과 유한요소법에 의해 계산된 결과들과 비교하여 개발된 스펙트럴요소를 정

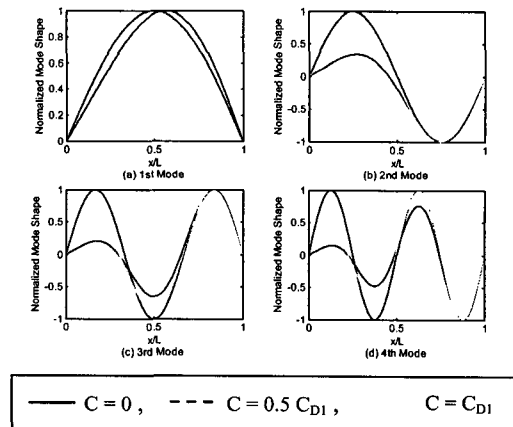


Fig. 4 Moving speed dependence of the natural modes of a moving Timoshenko beam under the axial tension $P = 1 \text{ kN}$

확도와 신뢰성을 확인하였다. 발산이 생길 수 있는 위험속도를 해석적으로 유도하였으며, 수치 해석을 통해 다음을 고찰하였다.

(1) 축방향의 장력이 증가하면 고유진동수는 증가하며 이동속도가 증가함에 따라 고유진동수는 감소한다. 보의 이동속도가 식 (43)으로 예측된 가장 낮은 위험속도에 다다르면, 첫 번째 고유진동수는 사라지고 보는 불안정성해될 수 있다.

(2) 첫 번째 위험속도이상의 속도영역에서도 매우 좁은 안정된 속도영역이 존재할 수 있다. 또한, 장력을 증가시키기에 따라 불안정성이 나타나는 이동속도는 증가하는 경향이 있다.

참고문헌

- (1) Wickert, J. A. and Mote, C. D., Jr., 1988, "Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 20, pp. 3-13.
- (2) Wang, K. W. and Mote, C. D., Jr., 1986, "Vibration Coupling Analysis of Band/Wheel Mechanical Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, No. 1, pp. 1-9.
- (3) Pellicano, F. and Vestroni, F., 2001, "Non-linear Dynamics and Bifurcations of an Axially Moving Beam," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, pp. 21-30.
- (4) Lee, H. P., 1993, "Dynamics of a Beam Moving over Multiple Supports," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 2, pp. 199-209.
- (5) Stylianou, M. and Tabarrok, B., 1994, "Finite Element Analysis of an Axially Moving Beam, Part I: Time Integration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 178, No. 4, pp. 433-453.
- (6) Sreeram, T. R. and Sivaneri, N. T., 1998, "FE-Analysis of a Moving Beam Using Lagrangian Multiplier Method," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, Nos. 28-29, pp. 3675-3694.
- (7) Wickert, J. A. and Mote, C. D., Jr., 1990, "Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 738-744.
- (8) Riedel, C. H. and Tan, C. A., 1998, "Dynamic Characteristics and Mode Localization of Elastically Constrained Axially Moving Strings and Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 3, pp. 455-473.
- (9) Öz, H. R., 2001, "On the Vibrations of an Axially Traveling Beam on Fixed Supports with Variable Velocity," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239, No. 3, pp. 556-564.
- (10) Özkaya, E. and Pakdemirli, M., 2000, "Vibrations of an Axially Accelerating Beam with Small Flexural Stiffness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 3, pp. 521-535.
- (11) Tabarrok, B., Leech, C. M. and Kim, Y. I., 1974, "On the Dynamics of an Axially Moving Beam," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 297, No. 8, pp. 201-220.
- (12) Wang, Y. K. and Mote, Jr., C. D., 1996, "Active and Passive Vibration Control of an Axially Moving Beam by Smart Hybrid Bearings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 4, pp. 575-584.
- (13) Lee, S. Y. and Mote, Jr., C. D., 1997, "A Generalized Treatment of the Energetics of Translating Continua, Part II: Beams and Fluid Conveying Pipes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 204, No. 5, pp. 735-753.
- (14) Lee, S. Y. and Mote, Jr., C. D., 1999, "Wave Characteristics and Vibration Control of Translating Beams by Optimal Boundary Damping," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, pp. 18-25.
- (15) Chakraborty, G. and Mallik, A. K., 2000, "Wave Propagation in and Vibration of a Traveling Beam with and without Non-linear Effects, Part I: Free Vibration, Part II: Forced Vibration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 2, pp. 277-305.
- (16) Li, Y. and Rahn, C. D., 2000, "Adaptive Vibration Isolation for Axially Moving Beams," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 5, No. 4, pp. 419-428.
- (17) Kwon, Y. I. and Ih, J. G., 2000, "Vibration Power Flow in the Moving Belt Passing through a Tensioner," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 2, pp. 329-353.
- (18) Simpson, A., 1973, "Transverse Modes and Frequencies of Beams Translating between Fixed end Supports," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 15, pp. 159-164.
- (19) Chonan, S., 1986, "Steady State Response of an Axially Moving Strip Subjected to a Stationary Lateral Load," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 107, No. 1, pp. 155-165.
- (20) Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. New York: Springer-Verlag.
- (21) Lee, U., Kim, J. and Leung, A. Y. T., 2000, "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 6, pp. 451-465.
- (22) Le-Ngoc, L. and McCallion, H., 1999, "Dynamic Stiffness of an Axially Moving String," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 220, No. 4, pp. 749-756.
- (23) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- (24) Petyt, M., 1990, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, New York: Cambridge University Press.
- (25) Bisplinghoff, R. L. and Ashley, H., 1962, *Principles of Aeroelasticity*, New York: Dover Publications.
- (26) Lin, C. C., 1997, "Stability and Vibration Characteristics of Axially Moving Plates," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 34, No. 24, pp. 3179-3190.