韓國經營科學會誌
第28卷 第3號
2003年 9月

복수제품의 품질검사 및 서비스시스템의 설계*

김 성 철**

Design of Sampling Inspections and Service Capacities for Multi-Products*

S. C. Kim**

■ Abstract ■

In this paper, we study the joint design of sampling inspections and service capacities for multi-products. Products of different defect rates which are either deterministic or random variables are supplied in batches after sampling inspection and rework. When supplied, all defective products that have not been inspected in batches are uncovered through total inspection and returned to service. We identify the optimal inspection policies and service capacities for multi-products reflecting the relationships between inspection rework costs and service provision costs. We also develope a marginal allocation algorithm for the optimal allocation of the limited total service capacity to products as well as inspection quantities.

Keyword : Multi-Products, Sampling Inspection, Service Capacity, Joint Design

1. 서 론

본 논문은 복수의 제품을 로트(lot)로 공급하는 경우에 있어서 제품의 품질확보를 위한 품질검사 및 제품실패에 따른 서비스시스템을 동시에 설계하는 문제를 다룬다. 품질 수준이 다른 복수의 제품들은 무검사(no inspection), 표본검사(sampling inspection), 또는 전수검사(total inspection) 등 적절한 품질검사 후 공급된다. 공급된 제품은 전수검사에 의하여 품질이 확인된다.

논문접수일 : 2003년 5월 16일 논문게재확정일 : 2003년 7월 7일
* 본 연구는 2003학년도 덕성여자대학교 연구비지원으로 이루어졌음.
** 덕성여자대학교 경영학과 교수

품질검사를 전혀 시행하지 않는 무검사의 경우에는 로트에 포함된 모든 불량품(defects)은 공급된 후 전수검사에 의하여 거부되거나 반송되어 과도한 제품실패를 초래할 뿐만이 아니라 제품과 기업에 대한 신뢰성을 상실시켜 기업의 생존에까지 영향을 줄 수 있다. 반면에 전수검사 후 제품이 공급되는 경우에는 로트에 포함된 모든 불량품이 확인되어 재작업(rework)을 통해 양품으로 교체된 후 공급되나 한정된 생산능력이 과도하게 평가와 교정활동에 투입되는 단점을 갖게된다.

전기기구와 같이 초기고장이 잦은 제품의 경우에는 제품은 공급된 후 초기고장으로 제품실패가 판명되어 공급된 제품은 자동적으로 전수검사의 과정을 가질 수 있다. 일반적으로 제품은 공급된 후 품질을 확인하기 위한 일정한 절차를 가지며 품질정책에 의한 경우, 품질확인이 필수적인 경우, 또는 엄격한 검사(tightened inspection)가 요구되는 경우 등에 있어서는 전수검사에 의하여 품질이 확인된다. 그러므로 공급된 제품은 제품실패에 대한 서비스(service)나 품질보증(warranty)이 요구되며 제품이 일정기간 동안 적합한 품질기능을 수행하지 못할 경우 제품은 반송되는 등 제품실패에 대한 절차를 갖게된다.

품질검사와 관련된 비용은 제품의 양 불량을 가려내기 위한 활동과 관련되는 검사비용(appraisal cost), 검사결과 제품이 불량으로 판명되는 경우 불량분석, 재작업, 등급저하, 기계유휴 등에 기인하는 교정비용(repair cost), 그리고 공급된 제품이 실패하는 경우 클레임, 제품회수, 애프터 서비스, 제품책임 등에 따른 실패비용(failure cost)으로 구성된다. 무검사는 과도한 실패비용을, 전수검사는 과도한 검사비용과 교정비용을 수반한다.

제품실패에 대응하기 위한 서비스 능력의 확보는 시장에서의 제품의 품질과 관련된 불확실성을 대응하는 수단으로 경쟁하에서 제품의 차별화를 통한 소비자의 수요를 유도하는 중요한 요소가 될 뿐만이 아니라 소비자의 불만이나 제품실패에 대한 결과로 특히 주위를 요하는 구성품을 파악하여 제품의 가치를 높이는 데에도 중요한 역할을 수행하게 된다. 그러나 과도한 서비스 능력을 확보하는 경우에는 불필요한 추가 비용이 지출됨에 반하여 서비스 능력을 초과하는 제품실패는 시간외 근무나 외주 등에 의한 서비스 절차를 갖게되어 단위 제품실패에 있어서 더 높은 실패비용이 요구된다. 뿐만 아니라 서비스 능력은 고객의 신뢰성을 현저히 저하시키는 불량품의 수로 해석될 수 있어 이를 초과하는 제품실패는 고객의 신뢰성 상실, 나아가서는 고객상실을 수반하는 심각한 결과를 초래할 수 있다.

그러므로 복수의 제품에 대하여 최적 서비스 능력을 확보하고 검사비용과 교정비용, 그리고 실패비용의 상호작용을 고려하여 적절한 품질검사의 절차를 확립하는 것은 중요한 의사결정문제가 된다. 본 논문에서는 품질검사 후 제품이 공급되고 공급된 제품은 전수검사에 의하여 품질이 확인되는 경우 검사비용, 교정비용, 서비스 능력 확보와 관련되는 비용, 그리고 실패비용을 고려하여 최적 품질검사와 서비스시스템을 동시에 설계하는 문제를 다룬다.

본 논문과 관련하여 품질검사에 관한 다양한 내용들은 기존의 문헌에서 쉽게 찾을 수 있다. 표본검사는 주어진 로트에서 표본을 추출하여 그 결과에 의하여 로트를 합격시키거나 불합격시키는 방법(single sampling plan)으로 무검사나 전수검사는 이의 특수한 경우로 언급될 수 있다(Derman and Ross, 1997 ; Grant and Leavenworth, 1980). 다중발췌 검사(multiple sampling plan)는 단계적으로 표본을 추출하여 각 단계마다 합격, 불합격, 또는 다음 단계로 검사를 계속할 것인가가 결정되며 각 단계에서의 표본의 개수가 하나인 특별한 경우는 순차발췌 검사법(sequential sampling plan) 또는 SUSUM 법(Thompson and Koronacki)이라 한다. 서비스 능력의 설계와 관련하여서는 Tapiero and Lee(1989)는 로트의 합격과 불합격이 이항분포로 결정되는 단일제품의 품질검사와 서비스 능력을 동시에 설계하는 문제를 다루었다.

제 2장에서는 복수제품에 대한 최적 서비스시스템과 품질검사를 동시에 설계하는 최적화문제를 모형화한다. 제품의 불량률은 확률적이며 총 서비스 능력의 제약을 갖는다. 제 3장에서는 불량률이 확정적(deterministic)인 좀 더 간단한 최적화문제를 모형화하고 단수제품과 복수제품에 대한 서비스시스템과 품질검사를 설계한다. 이는 원 최적화문제에 대한 기본 틀을 제공한다. 제 4장에서는 확률적 불량률을 갖는 원 최적화문제에서 단일 제품에 대한 서비스 시스템과 품질검사를 설계하고 이를 기초하여 총 서비스 능력의 제약을 고려한 최적 서비스 시스템과 품질검사를 설계한다. 제 5장에서는 위의 결과에 대한 수치적 예와 시사점을 제시한다. 제 6장에서는 결어로 마감한다.

2. 모형화

제품 i, $i=1,\cdots,m$는 크기 N_i인 로트로 공급되며 제품의 품질수준은 불량률(defect rate) θ_i로 표시된다. 제품의 불량률 $\theta_i \in [\theta_{L_i}, \theta_{U_i}]$ $0 \le \theta_{L_i} \le \theta_{U_i} \le 1$는 일양분포(uniform distribution)를 갖는다고 가정한다. 만약 불량률 θ_i가 확정적인 경우에는 $\theta_{L_i} = \theta_{U_i}$가 된다. 이는 제품 i는 확률 θ_i로 품질에 적합지 않은 제품으로, 확률 $1-\theta_i$로 품질에 적합한 제품으로 판명됨을 의미한다. $f(\theta_i)$를 확률변수 θ_i의 확률밀도함수(probability density function)로 $\mu_i = E(\theta_i)$를 이의 기대치(expected value)로 정의한다. 제품 i에 대한 품질은 n_i, $0 \le n_i \le N_i$, 개의 제품을 표본 검사하여 확인되며 각 제품 당 검사비용은 C_{a_i}가 소요된다. 주어진 품질검사에서 불량으로 확인된 제품은 적절한 재작업 후 적합한 품질의 양품으로 교정되며 교정비용 C_{r_i}가 소요된다. 제품 i의 제품실패에 대응하여 제공되는 서비스 능력은 s_i이며 단위 서비스 능력의 확보는 비용 C_{s_i}가 소요된다. 서비스 능력 s_i를 초과하지 않는 경우에 있어서 제품실패는 단위 당 실패비용 C_{f_i}가 소요되며 s_i를 초과하는 제품실패는 시간외 근무, 외주, 또는 반송된 제품을 교정하지 못한 경우에 소비자에게 보상되는 비용 등의 비용증가로 더 높은 실패비용 C_{e_i}를 수반한다. 적절하게 적용되기 위하여 $C_{a_i} < C_{r_i} < C_{f_i} < C_{f_i} + C_{s_i} < C_{e_i}$를 가정한다.

그러므로 품질비용을 최소화하는 최적의 서비스 능력과 품질검사를 설계한다는 것은 모든 m 종류의 제품에 대하여 최적 표본 수 n_i^*와 최적 서비스 능력 s_i^*를 결정함을 의미한다. 단위 제품 i에 대한 품질비용을 $E(\Theta_i(s_i, n_i))$라고 하면 m 종류의 모든 제품에 대한 총 품질비용을 최소화하는 문제는 다음과 같이 정식화될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& Min \sum_{i=1}^{m} E(\Theta_i(s_i, n_i)) \\
& = \sum_{i=1}^{m} [C_{a_i} n_i + C_{r_i} n_i \mu_i + C_{r_i} n_i \mu_i + C_{s_i} s_i \\
& \quad + \int_{\theta_{L_i}}^{s_i/(N_i - n_i)} C_{f_i}(N_i - n_i)\theta_i f(\theta_i)\,d\theta_i \\
& \quad + \int_{s_i/(N_i - n_i)}^{\theta_{U_i}} [C_{f_i} s_i + C_{e_i}[(N_i - n_i)\theta_i \\
& \qquad - s_i]] f(\theta_i)\,d\theta_i] \\
& s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} s_i \le S, \\
& \qquad 0 \le n_i \le N_i, \quad i = 1, \cdots, m.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

검사비용 C_{a_i}는 n_i개의 제품에 교정비용 C_{r_i}은 $n_i\mu_i$개의 제품에 소요되며 서비스 능력 확보비용 C_{s_i}는 s_i개의 서비스 능력의 설계와 관련되어 총 비용은 $C_{s_i}s_i$가 된다. 실패비용은 불량률 θ_i가 $s_i/(N_i-n_i)$보다 적은 경우에는 비용 C_{f_i}가 $(N_i-n_i)\theta_i$개의 제품에 소요되며 $s_i/(N_i-n_i)$보다 큰 경우에는 비용 C_{e_i}가 $(N_i-n_i)\theta_i - s_i$개의 제품에 소요된다. 모든 제품의 서비스 능력의 합은

주어진 총 서비스 능력의 제약 S를 초과하지 못하며 각 제품의 표본검사의 수 n_i는 로트크기 N_i보다 클 수 없음을 의미한다.

3. 불량률이 확정적인 경우

주어진 문제에 대한 이해를 돕기 위하여 본 절에서는 제품 i, $i=1,\cdots,m$에 대하여 불량률 θ_i가 확정적인 간단한 경우를 먼저 다루하기로 한다. 불량률 θ_i가 확정적인 경우에는 주어진 문제의 식 (2.1)은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} Min \ & \sum_{i=1}^{m} \Theta_i(s_i, n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} [\, C_{a_i} n_i + C_{r_i} n_i \theta_i + C_{s_i} s_i \\ &\quad + C_{f_i} \min[s_i, (N_i - n_i)\theta_i] + C_{e_i} \\ &\quad \times [(N_i - n_i)\theta_i - s_i]^+] \\ s.t. \ & \sum_{i=1}^{m} s_i \le S, \\ & 0 \le n_i \le N_i, \quad i = 1, \cdots, m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기에서 $[x]^+$는 $\max(0, x)$를 의미한다.

3.1 하나의 제품인 경우

주어진 최적화 문제에 대한 이해를 돕기 위하여 먼저 총 서비스 능력 S에 대한 제약이 없다고 가정하고 독립적인 하나의 제품에 대한 최적화문제를 다루기로 한다. 편의를 위하여 제품을 구별하는 첨자 i를 제거하면 주어진 최적화 문제는 다음과 같이 정식화될 수 있다.

$$\begin{aligned} Min \ & \Theta(s, n) \\ &= C_a n + C_r n\theta + C_s s \\ &\quad + C_f \min[s, (N-n)\theta] \\ &\quad + C_e [(N-n)\theta - s]^+ \\ s.t. \ & 0 \le n \le N. \end{aligned} \tag{3.2}$$

주어진 문제는 식 (3.2)의 비용함수 $\Theta(s, n)$의 n에 대한 도함수를 이용 쉽게 유도할 수 있다. 만약 불량률 $\theta \le C_a/(C_e - C_r)$인 경우에는 비용함수 식 (3.2)는 표본 수 n에 대하여 증가함수로 최적 표본 수 n^*는 0이 된다. $C_a/(C_e - C_r) < \theta \le C_a/(C_f + C_s - C_r)$인 경우에는 총 제품실패가 서비스 능력과 동일한 s가 되어 실패비용 C_e가 발생하지 않는 경우에 최적임을 알 수 있다. 마지막으로 $\theta > C_a/(C_f + C_s - C_r)$인 경우에는 식 (3.2)는 표본 수 n에 대하여 감소함수로서 최적 표본 수 n^*는 N이 됨을 쉽게 유도될 수 있다. 결과적으로 최적 서비스 능력 s^*와 표본 수 n^*는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{만약 } \theta \le C_a/(C_f + C_s - C_r), \\ &\quad n^* = 0, \ s^* = N\theta \\ &\text{만약 } \theta > C_a/(C_f + C_s - C_r), \\ &\quad n^* = N, \ s^* = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

그러므로 제품 단위당 검사비용과 교정비용의 합이 단위당 실패비용 및 이의 서비스 능력 확보에 요구되는 비용의 합보다 큰 경우에는 무 검사를 실시하고 최적 서비스 능력 s^*는 제품실패의 수 $N\theta$와 동일하게 설계하여 실패비용 C_f를 소요하고 그렇지 않은 경우에는 로트에 포함된 제품 모두를 전수검사를 시행하여 모든 불량을 교정하는 것이 비용함수를 최소화시킬 수 있음을 알 수 있다.

3.2 복수의 제품인 경우

이제 m 종류의 모든 제품을 동시에 고려하는 경우를 보기로 한다. 만약 총 서비스 능력의 합 S에 대한 제약이 없다면 최적 품질검사 표본 수의 벡터 n^*와 최적 서비스 능력 벡터 s^*는 다음의 형태를 갖는다.

$$\begin{aligned} n^* &= (0, \cdots, 0, N_{j+1}, \cdots, N_m), \\ s^* &= (N_1\theta_1, \cdots, N_j\theta_j, 0, \cdots, 0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

여기에서 집합 $J=[i \mid \theta_i \le C_{a_i}/(C_{f_i}+C_{s_i}-C_{r_i})]$로 정의하며 만약 $i \in J$이면 $n_i^*=0$, $s_i^*=N_i\theta_i$ 그렇지 않은 경우에는 $n_i^*=N_i$, $s_i^*=0$으로 집합 J에 포함되는 제품의 수는 $j(\le m)$개임을 의미한다. 만약 제품 1부터 제품 j까지의 최적 서비스 능력의 합 즉 $\sum_{i=1}^{j} s_i^*$가 서비스 능력의 합 S보다 적거나 같으면 식 (3.4)가 최적해가 된다. 그러나 그렇지 않은 경우에는 총 서비스 능력의 제약 S가 직접 고려되고 최적해가 새로이 도출되어야 한다.

주어진 문제는 비용함수가 선형이므로 Fox(1966)의 한계배분 알고리즘을 적용하여 주어진 최적화 문제를 매우 쉽게 해결될 수 있다. 이제 $\theta_i \le C_{a_i}/(C_{e_i}-C_{r_i})$인 제품 i에 있어서는 비용함수 식 (3.2)를 이용하여 서비스 능력 $s_i\ (<s_i^*=N_i\theta_i)$에 대한 최적 표본 수를 n_{is}^*라고 정의하면 모든 $s_i<s_i^*$에 대하여 최적 표본 수 $n_{is}^*=0$임을 유도할 수 있다. 결과적으로 비용함수 $\Theta_i(s_i, n_{is}^*)$의 서비스 능력 s_i에 대한 한계비용을 $\triangle_i(s_i, n_{is}^*)$라고 정의하면 한계비용 $\triangle_i(s_i, n_{is}^*)=\triangle_i(s_i,0)=\Theta_i(s_i+1,0)-\Theta_i(s_i,0)$로 다음이 성립한다.

$$\Theta_i(s_i,0)=C_{f_i}s_i+C_{e_i}(N_i\theta_i-s_i)^+ + C_{s_i}s_i. \tag{3.5}$$

$$\triangle_i(s_i,0)=(C_{f_i}+C_{s_i})-C_{e_i}<0. \tag{3.6}$$

그러므로 서비스 능력이 $s_i(<s_i^*)$인 경우 서비스 능력을 한 단위 증가시키면 총 품질비용은 $C_{e_i}-(C_{f_i}+C_{s_i})$만큼 선형으로 일정하게 감소함을 의미한다.

$C_{a_i}/(C_{e_i}-C_{r_i})<\theta_i\le C_{a_i}/(C_{f_i}+C_{s_i}-C_{r_i})$인 경우에는 최적 서비스 능력 $s_i^*=N_i\theta_i$이며 주어진 서비스 능력 $s_i(s_i^*)$에서 최적 표본 수 n_{is}^*는 N_i-s_i/θ_i이다. 그러므로 서비스 능력 s_i에서 비용함수 $\Theta_i(s_i, n_{is}^*)$와 한계비용 $\triangle_i(s_i, n_{is}^*)=\Theta_i(s_i+1, n_{is+1}^*)-\Theta_i(s_i, n_{is}^*)$는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned}\Theta_i(s_i, n_{is}^*) &= C_{a_i}(N_i-s_i/\theta_i)+C_{r_i}(N_i-s_i/\theta_i)\theta_i \\ &\quad + C_{s_i}s_i+C_{f_i}s_i \\ &\quad + C_{e_i}[[N_i-(N_i-s_i/\theta_i)]\theta_i-s_i],\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\triangle_i(s_i, n_{is}^*)=C_{f_i}+C_{s_i}-(C_{a_i}/\theta_i+C_{r_i})<0. \tag{3.8}$$

즉 서비스 능력이 s_i일때 서비스 능력을 한 단위 증가시키면 총 품질비용은 $C_{a_i}/\theta_i+C_{r_i}-(C_{f_i}+C_{s_i})$만큼 선형으로 감소함을 의미한다.

그러므로 주어진 최적화문제를 해결하기 위하여 한계배분 알고리즘을 변형하여 다음과 같이 이 효율적으로 적용할 수 있다. 즉 가장 작은 $\triangle_i(s_i, n_{is}^*)$를 갖는 제품에서부터 순차적으로 최적 서비스 능력 s_i^*를 한번에 할당하고 서비스 능력이 고갈되는 마지막 작업장에는 남은 잔여 서비스 능력을 모두 할당함으로써 최적 할당을 할 수 있음을 알 수 있다.

결과적으로 최적 배분 알고리즘은 다음과 같이 정리될 수 있다.

단계 1 : 초기화 : $k=1$.
초기 서비스 능력 벡터 $s=(0,\cdots,0)$을 설정한다.

단계 2 : $j\in J$에 대하여 $\triangle_i(s_i, n_{is}^*)$를 산정하고 $q=\arg\min[\triangle_i(s_i, n_{is}^*)]$를 구한다. 제품 q에 대하여 최적 서비스 능력 s_q^*, 즉 $N_q\theta_q$까지 서비스 능력을 할당한다. 만약 배분될 서비스 능력이 부족한 경우에는 남은 잔여분을 모두 할당한다.

단계 3 : 만약 단계 2에서 지금까지 할당된 서비스 능력의 합이 S이거나 집합 J에 속하는

모든 제품에 할당되면 알고리즘을 종료한 다. 그렇지 않으면 제품 q를 집합 J에서 제거하고 $k=k+1$로 하고 단계 2로 간다.

4. 불량률이 확률적인 경우

이제 원문제인 불량률이 확률적인 경우의 식 (2.1)에 있어서의 최적화문제를 보기로 한다.

4.1 하나의 제품인 경우

이를 위하여 먼저 3장에서와 마찬가지로 총 서비스 능력 S에 대한 제약이 없다는 가정 하에 독립된 제품의 최적화문제를 먼저 다룬다. 제품을 구별하는 첨자 i를 생략하면 하나의 제품에 대한 최적화문제는 아래와 같이 정식화될 수 있다.

$$\begin{aligned} &Min\ E(\Theta(s,n)) \\ &\quad = C_a n + C_r n\mu + C_s s \\ &\qquad + \int_{\theta_L}^{s/(N-n)} C_f(N-n)\theta f(\theta)d\theta \\ &\qquad + \int_{s/(N-n)}^{\theta_U} [C_f s + C_e[(N-n)\theta - s]] \\ &\qquad\qquad \times f(\theta)d\theta \\ &s.t.\ \ 0 \le n \le N,\ \ i=1,\cdots,m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

먼저 $\mu < C_a/(C_e-C_r)$인 경우

$$\begin{aligned} &(\partial/\partial n)\ E(\Theta(s,n)) \\ &\quad = C_a - (C_e - C_r)\mu \\ &\qquad + (C_e - C_f)\int_{\theta_L}^{s/(N-n)} \theta f(\theta)d\theta > 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

이므로 비용함수 $E(\Theta(s,n))$는 서비스 능력 s $(<N\theta)$와 상관없이 표본 수 n에 대하여 증가함수이며 최적 품질검사 표본 수 $n^*=0$이 된다. 또한

$$\begin{aligned} &(\partial/\partial s)\ E(\Theta(s,0)) \\ &\quad = -(C_e - C_f)\int_{s/N}^{\theta_U} f(\theta)d\theta + C_s = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

에서 최적 표본 수 $n^*=0$에서 최적 서비스 능력 $s^*=N[\theta_U - C_s(\theta_U-\theta_L)/(C_e-C_f)]$ 임을 쉽게 유도할 수 있다. 또한 $s=N\theta_L$인 경우와 $s=N\theta_U$인 경우에는

$$\begin{aligned} &(\partial/\partial s)\ E(\Theta(s,0))\,|_{s=N\theta_L} \\ &\quad = -(C_e - C_f) + C_s < 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$(\partial/\partial s)\ E(\Theta(s,0))\,|_{s=N\theta_U} = C_s > 0 \tag{4.5}$$

이 되어 최적 서비스 능력 s^*는 $N\theta_L$과 $N\theta_U$ 사이에 존재함을 알 수 있다.

다음으로 $\mu > C_a/(C_f-C_r)$인 경우에는

$$\begin{aligned} &(\partial/\partial n)\ E(\Theta(s,n)) \\ &\quad = C_a - (C_f - C_r)\mu \\ &\qquad - (C_e - C_f)\int_{s/(N-n)}^{\theta_U} \theta f(\theta)d\theta < 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

이 되어 비용함수 $E(\Theta(s,n))$는 표본 수 n에 대하여 감소함수이며 최적 품질검사 표본 수 $n^*=N$이 되고 최적 서비스 능력 $s^*=0$이 된다.

다음으로 $C_a/(C_e-C_r) \le \mu \le C_a/(C_f-C_r)$인 경우에는 비용함수 $E(\Theta(s,n))$의 도함수의 값은 n과 s에 따라 변한다. 먼저 μ가 $C_a/(C_e-C_r)$의 값의 근방에서는 식 (4.2)로부터 비용함수 $E(\Theta(s,n))$는 표본 수 n에 대하여 증가함수이며 μ가 $C_a/(C_f-C_r)$의 값 근방에서는 식 (4.6)으로부터 비용함수 $E(\Theta(s,n))$는 표본 수 n에 대하여 감소함수임을 알 수 있다. 그러므로 최적 표본 수 $n^*=0$이거나 N이 된다. 최적 표본 수 $n^*=N$인 경우에는 최적 서비스 능력 $s^*=0$이 되고 최적 표본 수 $n^*=0$인 경우에는 최적 서비스 능력 s^*는 앞에서와 마찬가지로 $N[\theta_U - C_s \times (\theta_U-\theta_L)/(C_e-C_f)]$이다.

그러므로 주어진 최적화문제의 최적 해는 다음과 같이 요약될 수 있다.

$\mu < C_a/(C_e - C_r)$:

$n^* = 0,$

$s^* = N[\theta_U - C_s(\theta_U - \theta_L)/(C_e - C_f)].$

$C_a/(C_e - C_r) \le \mu \le C_a/(C_f - C_r)$:

$n^* = 0,$

$s^* = N[\theta_U - C_s(\theta_U - \theta_L)/(C_e - C_f)]$와

$n^* = N,$

$s^* = 0$에서의 비용함수 $E(\Theta(s, n))$를 비교 결정한다.

$\mu > C_a/(C_f - C_r)$:

$n^* = N, \quad s^* = 0.$

또한 서비스 능력 $s(< s^*)$가 주어져 있는 경우에 이에 대한 최적 표본 수 n_s^*는 식 (4.2)로부터 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$n_s^{*2} - 2Nn_s^* + N^2 - s^2P = 0. \tag{4.7}$$

여기에서

$$P = \frac{C_e - C_f}{(C_e\theta_U^2 - C_f\theta_L^2) - 2C_a(\theta_U - \theta_L) - C_r(\theta_U^2 - \theta_L^2)}. \tag{4.8}$$

그러므로 서비스 능력 s에 대한 최적 표본 수 n_s^*는 다음과 같다.

$$n_s^* = N - s\sqrt{P}. \tag{4.9}$$

여기에서 만약 $n_s^* < 0$이면 $n_s^* = 0$임을 의미한다.

4.2 복수의 제품인 경우

만약 서비스 능력의 합 S에 대한 제약이 없다면 앞의 결과로부터 최적 품질검사 표본 수의 벡터 n^*와 최적 서비스 능력 벡터 s^*는 다음의 형태를 갖는다.

$$n^* = (0, \cdots, 0, N, \cdots, N), \tag{4.10}$$

$$s^* = (s_1^*, \cdots, s_j^*, 0, \cdots, 0). \tag{4.11}$$

만약 제품 j까지의 최적 서비스 능력의 합 $\sum_{i=1}^{j} s_i^*$가 총 서비스 능력의 합 S보다 적거나 같으면 식 (4.10)과 식 (4.11)이 최적해가 된다. 그러나 그렇지 않은 경우에는 총 서비스 능력의 제약 S가 직접 고려되고 최적해가 새로이 도출함은 전 절과 같다. 그러므로 본 절에서는 주어진 원 문제에 대한 최적해를 도출할 수 있는 알고리즘(algorithm)을 제시한다.

이제 3장에서와 같이 비용함수 $E(\Theta_i(s_i, n_{is}^*))$: $R \to R$, 가 오목성(convexity)을 만족시키면 주어진 최적화 문제는 Fox(1966)의 한계배분 알고리즘을 적용하여 매우 쉽게 해결될 수 있으며 요구되는 오목성은 다음의 부등식에 의하여 증명될 수 있다.

$$\begin{aligned} &E(\Theta_i(s_i + 1, n_{is+1}^*)) - E(\Theta_i(s_i, n_{is}^*)) \\ &\quad \le E(\Theta_i(s_i + 2, n_{is+2}^*)) \\ &\quad - E(\Theta_i(s_i + 1, n_{is+1}^*)). \end{aligned} \tag{4.12}$$

이제 $E(\triangle_i(s_i, n_{is}^*)) = E(\Theta_i(s_i + 1, n_{is+1}^*)) - E(\Theta_i(s_i, n_{is}^*))$라고 정의하면 위의 오목성은 $\mu_i < C_{a_i}/(C_{e_i} - C_{r_i})$인 경우에는 서비스 능력 $s_i(< s_i^*)$에 대하여 최적 표본 수 $n_{is}^* = 0$이므로 $E(\triangle_i(s_i, 0)) \le E(\triangle_i(s_i + 1, 0))$이 성립함을 보이고 $C_{a_i}/(C_{e_i} - C_{r_i}) \le \mu_i \le C_{a_i}/(C_{f_i} - C_{r_i})$인 경우에는 $E(\triangle_i(s_i, n_{is}^*)) \le E(\triangle_i(s_i + 1, n_{is+1}^*))$가 성립함을 보임으로써 증명된다.

먼저 $\mu_i < C_{a_i}/(C_{e_i} - C_{r_i})$인 경우에 $E(\triangle_i(s_i, 0)) \le E(\triangle_i(s_i + 1, 0))$임을 증명한다.

$$\begin{aligned} &E(\theta_i(s_i, 0)) \\ &= C_{s_i}s_i + \int_{\theta_{L_i}}^{s_i/N_i} C_{f_i}N_i\theta_i f(\theta_i)\,d\theta_i \\ &\quad + \int_{s_i/N_i}^{\theta_{U_i}} [C_{f_i}s_i + C_{e_i}[N_i\theta_i - s_i]]\,f(\theta_i)\,d\theta_i. \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$E(\triangle_i(s_i,0)) = C_{s_i} - (C_{e_i} - C_{f_i}) \times \frac{\theta_{U_i} - (2s_i+1)/2N_i}{\theta_{U_i} - \theta_{L_i}}. \quad (4.14)$$

그러므로 $E(\triangle_i(s_i,0)) \le E(\triangle_i(s_i+1,0))$ 임을 쉽게 증명할 수 있다.

이제 $C_{a_i}/(C_{e_i} - C_{r_i}) \le \mu_i \le C_{a_i}/(C_{f_i} - C_{r_i})$인 경우에는 $E(\triangle_i(s_i, n^*_{is})) \le E(\triangle_i(s_i+1, n^*_{is+1}))$가 성립됨이 증명하여야 한다. 그러나 이 경우에는 적은 서비스 능력 $s_i\,(<<s^*_i)$에 있어서는 최적 표본 수 $n^*_{is} > 0$이나 서비스 능력 s_i가 증가하면 최적 표본 수 n^*_{is}는 감소하며 결국은 0에 도달하게 된다. 그러므로 서비스 능력 s_i와 s_i+1에 대한 최적 표본 수 n^*_{is}와 n^*_{is+1}에 대하여 $n^*_{is} > 0$, $n^*_{is+1} > 0$인 경우, $n^*_{is} > 0$, $n^*_{is+1} = 0$인 경우, 그리고 $n^*_{is} = 0$, $n^*_{is+1} = 0$의 경우를 구분하여야 한다.

먼저 서비스 능력 s와 $s+1$에 대한 최적 표본 수 n^*_{is}와 n^*_{is+1}가 모두 양수인 경우, 즉 $n^*_{is} > 0$, $n^*_{is+1} > 0$인 경우를 보기로 한다. 이 경우에는 식 (4.9)로부터 $n^*_{is} = N_i - s_i\sqrt{P_i}$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} E(\Theta_i(s_i, n^*_{is})) &= C_{a_i}(N_i - s_i\sqrt{P_i}) + C_{r_i}(N_i - s_i\sqrt{P_i})\mu_i \\ &\quad + C_{s_i}s_i + C_{f_i}s_i\sqrt{P_i}\int_{\theta_L}^{1/\sqrt{P_i}} \theta_i f(\theta_i)\,d\theta_i \\ &\quad + \int_{1/\sqrt{P_i}}^{\theta_{U_i}} [C_{f_i}s_i + C_{e_i}[s_i\theta_i\sqrt{P_i} - s_i]] \\ &\quad \times f(\theta_i)\,d\theta_i, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} E(\triangle_i(s_i, n^*_{is})) &= -C_{a_i}\sqrt{P_i} - C_{r_i}\sqrt{P_i}\mu_i + C_{s_i} \\ &\quad - \frac{C_{e_i} - C_{f_i}}{\theta_{U_i} - \theta_{L_i}}[\theta_{U_i} - \frac{1}{2\sqrt{P_i}}] \\ &\quad + \frac{\sqrt{P_i}}{2(\theta_{U_i} - \theta_{L_i})}(C_{e_i}\theta^2_{U_i} - C_{f_i}\theta^2_{L_i}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

서비스 능력 s_i에 대한 최적 표본 수 $n^*_{is} > 0$ 서비스 능력 s_i+1에 대한 최적 표본 수 $n^*_{s_i+1} = 0$인 경우에는 식 (4.15)과 식 (4.13)로부터 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} E(\triangle_i(s_i, n^*_{is})) &= E(\Theta_i(s_i+1, 0)) - E(\Theta_i(s_i, n^*_{is})) \\ &= -C_{a_i}(N_i - s_i\sqrt{P_i}) \\ &\quad - C_{r_i}(N_i - s_i\sqrt{P_i})\mu_i + C_{s_i} \\ &\quad - \frac{C_{e_i} - C_{f_i}}{2(\theta_{U_i} - \theta_{L_i})} \\ &\quad \times [2\theta_{U_i} + \frac{s_i}{\sqrt{P_i}} - \frac{(s_i+1)^2}{N_i}] \\ &\quad + \frac{N_i - s_i\sqrt{P_i}}{2(\theta_{U_i} - \theta_{L_i})}(C_{e_i}\theta^2_{U_i} - C_{f_i}\theta^2_{L_i}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

서비스 능력 s_i에 대한 최적 표본 수 n^*_{is}가 이미 0에 도달한 경우 즉 $n^*_{is} = 0$이면 서비스 능력 s_i+1에서도 최적 표본 수 $n^*_{is+1} = 0$이 되며 한계비용 $E(\triangle_i(s_i,0))$에는 식 (4.14)가 적용된다.

$E(\triangle_i(s_i, n^*_{is})) \le E(\triangle_i(s_i+1, n^*_{is+1}))$ 가 성립되며 한계비용 $E(\triangle_i(s_i, n^*_{is}))$는 더 이상 일정한 상수가 아니며 비용함수 $E(\Theta_i(s_i, n^*_{is}))$는 선형의 조각난(piecewise linear) 오목성이 만족되어 Fox(1966)의 한계배분 알고리즘이 효율적으로 적용될 수 있다.

단계 1 : 초기화 : $k = 0$.

초기 서비스 능력 벡터 $s^0 = (0, \cdots, 0)$을 설정한다.

단계 2 : $i = 1, \cdots, j$ 에 대하여 $E(\triangle_i(s_i, n^*_{is}))$와 $q = \arg\min[E(\triangle_i(s_i, n^*_{is}))]$를 구한

다. $s_q^{k+1} = s_q^k + 1$, $s_i^{k+1} = s_i^k (i \neq k)$로 놓는다.

단계 3 : 만약 $\sum_{i=1}^{m} s_i = S$ 또는 집합 J에 속한 모든 제품에 대한 최적 서비스 능력의 할당이 완료되었으면 알고리즘을 종료한다. 그렇지 않으면 $k = k+1$로 하고 단계 2로 간다.

5. 수치 예

본 절에서는 지금까지 주어진 결과의 수치 예를 제시하고자 한다. 서로 다른 세 종류의 제품을 공급하는 경우에 있어서 총 품질비용을 최소화하는 품질검사와 서비스 시스템을 동시에 설계하는 최적화문제를 보기로 한다. 먼저 불량률 θ_i, $i = 1, 2, 3$가 확정적인 경우에 관련되는 자료는 <표 1>과 같다.

먼저 각각의 독립적인 제품에 있어서 품질비용을 최소화시키는 서비스 능력과 품질검사를 보기로 한다. 세 종류의 제품에 대한 결과는 아래와 같다.

그러므로 만약 제품의 불량률 $\theta_1 = 0.12$, $\theta_2 = 0.09$, 그리고 $\theta_3 = 0.11$이고 총 서비스 능력 S에 대한 제약이 없다면 최적 서비스 능력 벡터 $s^* = (12, 18, 0)$이고 최적 표본 수 벡터 $n^* = (0, 0, 200)$이 됨을 알 수 있다. 이제 만약 총 서비스 능

〈표 1〉 로트크기 및 품질비용

	N	C_a	C_r	C_f	C_e	C_s	$C_a/(C_e-C_r)$	$C_a/(C_f+C_s-C_r)$	$C_a/(C_f-C_r)$
제품 1	100	1	8	12	16	1	0.125	0.2	0.25
제품 2	200	1	10	18	25	3	0.0667	0.0909	0.125
제품 3	200	1	15	20	35	5	0.05	0.1	0.2

〈표 2〉 제품 1의 최적 서비스 능력 및 품질검사

불량률(θ_1)	0.12	0.13	0.19	0.21	0.24	0.26
표본 수	0	0	0	100	100	100
서비스 능력	12	13	19	0	0	0
총 품질비용	156	169	247	268	292	308

〈표 3〉 제품 2의 최적 서비스 능력 및 품질검사

불량률(θ_2)	0.06	0.07	0.09	0.1	0.12	0.13
표본 수	0	0	0	200	200	200
서비스 능력	12	14	18	0	0	0
총 품질비용	252	294	378	400	440	460

〈표 4〉 제품 3의 최적 서비스 능력 및 품질검사

불량률(θ_3)	0.04	0.06	0.09	0.11	0.19	0.21
표본 수	0	0	0	200	200	200
서비스 능력	8	12	18	0	0	0
총 품질비용	200	300	450	530	770	830

력 $S=25$라는 제약이 있다면 최적 서비스 능력 및 품질검사는 다시 유도되어야 한다. 이제 $\theta_1 \le C_{a_1}/(C_{e_1}-C_{r_1})$, $C_{a_2}/(C_{e_2}-C_{r_2}) < \theta_2 \le C_{a_2}/(C_{f_2}+C_{s_2}-C_{r_2})$이므로 제품 1의 서비스 능력 s_1에 대한 한계비용 $\triangle_1(s_1, n_{1s}^*) = (C_{f_1}+C_{s_1})-C_{e_1}=-3$, 제품 2의 서비스 능력 s_2에 대한 한계비용 $\triangle_2(s_2, n_{2s}^*) = C_{f_2}+C_{s_2}-(C_{a_2}/\theta_2+C_{r_2})=-0.11$이 되며 주어진 한계비용은 서비스 능력의 크기에 관계없이 일정하다. 그러므로 초기 서비스 능력 벡터 $s^0=(0,0,0)$에서 시작하나 최적 서비스 능력 벡터 $s^*=(12,13,0)$임을 쉽게 알 수 있으며 제품 1의 최적 표본 수 $n_1^*=0$이나 제품 2의 최적 표본 수 $n_2^*=200-13/0.09=56$이 되어 최적 표본 수 벡터 $n^*=(0,56,200)$이 된다.

이제 일양분포를 갖는 불량률 θ_i, $i=1,2,3$에 대하여 주어진 최적화문제를 해결하고 확정적인 결과와 비교해 보기로 한다. 제품 i, $i=1,2,3$의 로트크기 및 품질비용은 확정적인 경우와 모두 동일하다. 또한 확정적인 경우의 결과와 비교를 용이하게 하기 위하여 모든 경우에 있어서 $\theta_i \in [\mu_i-0.2, \mu_i+0.2]$를 가정한다. 주어진 결과는 아래와 같다.

위의 결과로부터 불량률 θ_i, $i=1,2,3$이 확정적인 경우와 확률적인 경우에 있어서 몇 가지 서로 다른 결과를 정리할 수 있다. 첫째, 불량률이 확률적인 경우에 서비스 능력이 근소하나마 더 많이 요구된다. 둘째, 결과적으로 불량률이 확률적인 경우에 총 품질비용이 증대된다. 셋째, 주어진 결과는 불량률의 분산이 증대될수록 확대된다. 예로서 만약 불량률 $\theta_i \in [\mu_i-0.3, \mu_i+0.3]$을 가정하여 제품 2의 경우 불량률 $\theta_2 \in [0.04, 0.1]$, $\mu_2=0.07$인 경우를 보면 $s_2^*=15$, $n_2^*=0$, 그리고 품질비용 $E(\Theta_2(15,0))=304.29$가 되어 불량률 $\theta_2 \in [0.05, 0.09]$인 경우의 품질비용 $E(\Theta_2(15,0))=$

〈표 5〉 제품 1의 최적 서비스 능력 및 품질검사

불량률(μ_1)	0.12	0.13	0.19	0.21	0.24	0.26
표본 수	0	0	0	100	100	100
서비스 능력	13	14	20	0	0	0
총 품질비용	157.5	170.5	248.5	268	292	308

〈표 6〉 제품 2의 최적 서비스 능력 및 품질검사

불량률(μ_2)	0.06	0.07	0.09	0.1	0.12	0.13
표본 수	0	0	200	200	200	200
서비스 능력	13	15	0	0	0	0
총 품질비용	258.94	300.94	380	400	440	460

〈표 7〉 제품 3의 최적 서비스 능력 및 품질검사

불량률(μ_3)	0.04	0.06	0.09	0.11	0.19	0.21
표본 수	0	0	0	200	200	200
서비스 능력	9	13	19	0	0	0
총 품질비용	213.44	313.44	463.42	530	770	830

300.94보다 증대됨을 알 수 있다. 넷째, 불량률이 확정적인 경우에는 불량률이 품질비용의 비율로 표시되는 $C_{a_i}/(C_{f_i}+C_{s_i}-C_{r_i})$를 기준으로 그 특성에 있어서 서로 확연히 구별되는 서비스시스템과 품질검사를 갖으나 불량률이 확률적인 경우에는 그렇지 않다. 예를 들어 제품 2에 있어서 불량률 $\theta_2=0.09$로 확정적인 경우에는 $s_2^*=18$, $n_2^*=0$였으나 불량률이 확률적으로 기대치 $\mu_2=0.09$인 경우에는 $s_2^*=0$, $n_2^*=200$임을 알 수 있다.

그러므로 총 서비스 능력 S에 대한 제약이 없다면 최적 서비스 능력 벡터 $s^*=(13,0,0)$, 최적 표본 수 벡터 $n^*=(0,200,200)$이 됨을 알 수 있다. 이제 만약 총 서비스 능력 $S=25$라는 제약이 있다면 최적 서비스 능력 및 품질검사 절차는 다시 유도되어야 하나 실제로 요구되는 총 서비스 능력은 13이면 충분함을 알 수 있다. 또한 주어진 조건하에서는 총 서비스 능력 $S<13$인 경우에도 최적 서비스 능력 벡터 $s^*=(S,0,0)$가 되며 최적 표본 수 벡터 $n^*=(n_{1s}^*,200,200)$이 됨을 알 수 있다. 여기에서 제품 1의 최적 표본 수 n_{1s}^*는 식 (4.9)에서 $P_1=108.6956$, $\sqrt{P_1}=10.4257$로부터 서비스 능력 $s_1=1,\cdots,12$,에 대하여 $n_1^*=90$, $n_2^*=79$, $n_3^*=69$, $n_4^*=58$, $n_5^*=48$, $n_6^*=37$, $n_7^*=$, 27, $n_8^*=17$, $n_9^*=6$, 그리고 $n_{10}^*=n_{11}^*=n_{12}^*=0$임을 알 수 있다. 이와 더불어 제품 1의 한계비용 $E(\triangle_1(s_1,n_{1s}^*))$가 $s_1=1,\cdots,8$의 경우에는 -3.4083, $s_1=9$인 경우에는 -3.325 그리고 $s_1=10,11$인 경우에는 -2.5가 되어 선형의 조각난 오목성을 만족시킴 또한 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문은 로트로 공급되는 복수제품에 있어서 제품의 품질확보를 위한 품질검사와 제품실패에 따른 서비스시스템을 동시에 설계하는 문제를 다루었다. 제품은 품질검사 후 공급되며 공급된 제품은 전수검사에 의하여 품질이 확인된다. 품질검사에는 검사비용과 교정비용이 소요되며 공급된 제품의 제품실패는 서비스 능력 확보를 위한 비용과 제품실패에 따른 실패비용을 수반한다.

제품의 불량률이 확정적인 경우 품질검사와 관련되는 비용과 제품실패와 관련되는 비용이 비교되어 품질검사에는 전수검사나 무검사를 시행하고 무검사를 시행하는 경우에는 제품실패와 동일한 서비스 능력을 확보하는 것이 최적임을 보였다. 복수의 제품에 있어서는 서비스 능력에 대한 품질비용의 한계비용이 선형임을 이용하여 제품 단위로 최적 서비스 능력을 모두 한 번에 할당하는 개선된 한계배분 알고리즘을 적용되어 서비스 시스템과 품질검사를 설계하였다.

불량률이 확률적인 경우에도 독립적인 제품에 있어서는 무검사나 전수검사에 의하여 제품이 공급되는 것이 최적임을 이용하여 이에 따른 최적 서비스 능력을 제시하였다. 복수제품에 대하여는 서비스 능력에 대하여 품질비용이 오목함수임을 증명하고 한계배분 알고리즘에 의하여 최적 서비스 능력과 품질검사가 설계되었다. 이와 더불어 불량률의 분산이 증대되면 최적 서비스 능력과 품질비용이 더불어 증대됨을 수치적으로 보였으며, 특수한 경우에는 불량률의 분산이 다르면 무검사나 전수검사에 대하여 근본적으로 서로 다른 절차의 품질검사를 필요로 함을 알 수 있었다.

주어진 결과는 제품의 품질과 서비스 시스템을 설계하는데 매우 쉽게 적용 가능하여 효율적으로 이용될 수 있으리라 생각한다.

참 고 문 헌

[1] Chen, J., Yao, D.D. and Zheng, S., "Quality Control for Products Supplied with Warranty," *Operations Research*, Vol.46, No.1 (1998), pp.107-115.

[2] Derman, C. and Ross, S.M., *Statistical As-*

pects of Quality Control, Academic Press, 1997.

[3] Fox, B., "Discrete Optimization via Marginal Analysis," *Management Science*, Vol. 13(1966), pp.210-216.

[4] Grant, E.L. and Leavenworth, R.S., *Statistical Quality Control*, McGraw Hill, New York, 1980.

[5] Mamer, J.W., "Discounted and Per Unit Costs of Product Warranty," *Management Science*, Vol.33, No.7(1987), pp.916-926.

[6] Tapiero, C. and Lee, H.L., "Quality Control and Product Servicing : A Decision Framework," *European Journal of Operational Research*, Vol.39(1989), pp.261-273.

[7] Thompson, J.R. and Koronacki, J., *Statistical Process Control for Quality Improvement*, Chapman & Hill, New York, 1993.