KJHM Vol. 16, No. 3, 2003, 57-68

무한 개념에 대한 수학 교육학적 고찰

전주공업고등학교 **이대현**

한국교원대학교 수학교육과 **박배훈**

Abstract

Infinity is very important concept in mathematics. In history of mathematics, potential infinity concept conflicts with actual infinity concept for a long time. It is reason that actual infinity concept causes difficulty in our perceptions. This phenomenon is called epistemological obstacle by Brousseau.

So, in this paper, we examine the infinity in terms of mathematical didactics. First, we examine the history of development of infinity and reveal the similarity between the history of debate about infinity and epistemological obstacle of students. Next, we investigate obstacle of students about infinity and the contents of curriculum which treat the infinity. Finally, we suggest the methods for overcoming obstacle in learning of infinity concept.

0. 서론

초등학교에 들어가기 전부터, 학생들은 일상 생활에서 수와 관련된 활동에 익숙해진다. 그리고, 초등학교에서 학생들은 수세기와 계산 활동에 필수적인 자연수 열인 셈수로 수를 다루게 된다. 셈수는 심리 발생적으로나 이론적으로 수학의 초석이며, 자연수 열 1, 2, 3, 4, ⋯ 에서 중요한 성질은 1로부터 차례로 1을 더해 생성된다는 것으로, 이를 형식화한 것이 수학적 귀납법의 원리이다[5]. 여기에서 자연수 열의 기본 성질에 함축된 의미가 바로 '수의 무한'이라고 할 수 있다.

수학에서 무한은 중요한 개념이며, 현대 수학에서 핵심적이고 필수적인 역할을 한다. 그러나, 그 개념의 발달의 역사는 잠재적 무한(potential infinity) 개념과 실 무한(actual infinity) 개념 사이의 끊임없는 논쟁의 연속이었다. 한편, 현대 수학에서 받아들여지고 있는 칸토르(Georg Contor, 1845-1918)에 의한 실 무한 개념은 인간의 경험적 현실에 바탕을 두지 않는

순수한 지적 산물이다. 이러한 사실은 관측 가능하거나 실험으로 증명 가능한 상황을 다루는 과학의 세계와 마찬가지로, 인간의 인식 내에서 설명 가능한 사실만을 인정하는 잠재적 무한 개념이 우선시 되어 온 이유이다. 무한에 대한 인간의 해석이 잠재적 무한 개념으로 귀착되기 때문에, 순수한 수학적 개념으로 탄생된 실 무한 개념은 학교 교육에 의해 학생들에게 전달되기가 쉽지 않다. 이것은 인간의 사고 방식이 구체적이고 확실하며, 공간적이고 직관적인 성향을 쉽게 인지하기 때문이다.

실제로 많은 연구들은 학생들이 무한에 대한 개념을 학습할 때 학교 수학에서 제시되어지는 실 무한 개념을 쉽게 받아들이지 않는다는 것을 보여주고 있다([7], [16], [17], [21], [22]). 이것은 학생들이 가지고 있는 무한에 대한 개념이 그들의 경험에 의하여 형성된 잠재적 무한 개념에 토대를 두고 있기 때문이다. 이러한 현상에 대하여, Brousseau[13]는 수학 교수-학습 현장에서 이런 유형의 오류들은 예측 가능하며 '장애'를 구성한다고 한다. 특히, 그는 이러한 장애를 '인식론적 장애'에 기인한다고 설명하고 있다.

따라서 본 논문에서는 현대 수학에서 중요한 개념인 '무한'에 대하여, 학생들이 겪고 있는 어려움의 주원인을 인식론적 장애로 보고, 이것을 중심으로 무한 개념에 대한 교육학적 시사점을 모색해 보고자 한다. 먼저, 무한 개념의 역사를 고찰함으로써, 무한에 대한 논쟁의 역사와 학습자가 보이는 인식론적 장애와의 유사성을 밝혀본다.

다음으로는, 무한 개념에 대한 학생들의 장애를 구체적으로 살펴본다. 이 장에서는 실 무한 개념과 관련된 학생들의 장애를 구체적으로 기술하며, 교육과정에 기술된 무한 개념들을 살펴본다. 마지막으로, 무한 개념에 대한 수학 교육학적 시사점을 이끌어낸다. 이 장에서는 인간의 직접적인 인식으로 파악하기 어려운 실 무한 개념을 구체적으로 인식시킬 수 있는 방안에 대하여 모색해 본다.

1. 무한 개념의 발달의 역사

1-1. 고대의 무한 개념

수학에서 무한이라는 개념은 그리스에서 시작되었다. 그들은 무한이라는 개념이 인간의 직관을 뛰어 넘는 압도적이고 가공할만한 것이어서 매우 금기시하였다. 그리스인들이 무한에 대한 아이디어를 가졌다는 증거는 제논의 역설로 알려진 '아킬레스와 거북'에 대한 이야기에서 찾을 수 있다. 제일 빨리 달릴 수 있는 아킬레스에 비해 거북은 아주 느리기 때문에 거북이 얼마정도 앞서서 출발한다. 거북이 처음 출발한 지점에 아킬레스가 이르면, 거북은 어느 정도 더 앞으로 진행해 있을 것이다. 마찬가지로, 거북이 더 진행한 만큼 아킬레스가 따라가면 거북은 또 얼마간 앞으로 진행해 있을 것이다. 그리고, 이러한 과정은 끝없이 반복된다. 제논은 이 역설을 통해 시간과 공간을 끝임 없이 분할할 수 있다는 가정 아래서 운동

이 불가능하다고 주장하고 있다. 이 역설은 역사상 무한의 개념을 사용한 최초의 예시이며, 무한에 대해 인간이 가지는 혼란스러운 속성을 그대로 반영하고 있다고 볼 수 있다([12], [19]).

한편, 무한이라는 개념은 피타고라스가 먼저 제기한 것이다. 제논보다 1세기 이전 사람인 피타고라스와 그의 제자들은 '무리수'의 발견으로 인하여, 정수와 그 비율만으로 구성된 수를 통하여 논리의 완전한 체계를 구축하려는 시도가 무산되게 되는 경로를 겪게 되었다. 즉, 그들은 피타고라스 정리로 잘 알려진 $a^2+b^2=c^2$을 이용하여 무리수의 존재를 연역해 내었는데, 이 수의 발견은 피타고라스 학파에 큰 어려움을 주게 되는 결과를 초래하게 되었다 [14].

무한에 대한 아이디어는 에우독소스와 아르키메데스에 의해 계승되었다. 에우독소스는 곡면체의 넓이와 부피를 알아내기 위하여, 넓이나 부피를 수많은 직사각형이나 입방체로 나누어 계산한 다음에, 그것들을 합하는 방법을 취했다. 그는 전체 넓이나 부피를 구하는데 있어서, 우리가 원하는 만큼 작은 양이 존재한다는 가정 하에서 주어진 전체를 분할하는 방법을 취했는데, 이는 잠재적 무한의 개념을 도입한 것이다. 이 방법은 아르키메데스에 의해 더욱 발전되게 되는데, 아르키메데스는 무한소(infinitesimal-무한히 작은 수)의 양을 사용하여 넓이와 부피를 구하는데 잠재적 무한을 이용하였다.

위에서 언급한 위대한 수학자들은 무한에 대한 많은 발견을 했지만, 그 후 2천년동안 무한에 대한 수학적 속성은 거의 발견되지 않았다. 이것은 인간의 직관적인 의식으로는 받아들일 수 없는 무한에 대한 두려움이 20세기에 이를 때까지 계속되었음을 의미한다. 실제로, 그리스인들 이후로 많은 사람들은 잠재적 무한과 실 무한의 개념을 인식하고 구별했지만, 실 무한의 개념을 수용하지 않았다. 예를 들면, 아리스토텔레스는 잠재적 무한과 실 무한을 구별하고, 잠재적 무한이란 '어떤 것이 임의로 무한히 증대될 수 있는 것'이고, 실 무한은 '무한히 증대될 수 있는 것의 총체가 완결되어 실제로 존재함'이라고 하였다. 그리고, 그는 수학에는 실 무한이 필요하지 않으며, 오직 잠재적 무한만이 존재한다고 보았다[11].

수를 중시하던 피타고라스 학파의 활동에서 유클리드의 '원론'으로 대표되는 기하로의 이동은 그리스인들이 논리적으로 연역될 수 있는 지식만을 수학 체계 안으로 받아들이는 결과를 초래하였다. 만약 그리스인들이 대수적인 용어와 의미의 이점을 누렸다면, 수학의 역사는 2000년 이상 앞섰을지도 모른다. 비록, 무한을 지적인 대상으로 이용하지는 못했지만, 위에 예시한 여러 가지 사실들과 π의 값을 구하기 위하여 원에 내접하는 정다각형과 외접하는 정다각형의 변의 수를 늘여갔다는 아르키메데스에 관한 역사적 사실은 고대부터 수학에서 무한에 대한 개념을 꾸준히 이용했음을 말해준다.

1-2. 고대 이후에서 칸토르까지의 무한 개념

그리스의 수학자들에 의해 다루어진 무한에 대한 논의는 중세에 종교의 맥락에서 나타나

지만, 수학적으로는 17세기 이후로 미루어졌다. 이 시기에 실무한의 핵심 속성을 발견한 사람으로는 갈릴레오(Galileo Galilei, 1564-1642)를 들 수 있다.

갈릴레오는 <두 가지 새 과학에 대한 논의와 수학적 증명>에서 잠재적 무한 개념에서 실무한 개념으로 나아갔다. 그는 제곱수가 모든 정수와 일대일 대응한다는 사실을 발견하였다. 그는 현대 수학에서 일반적으로 받아들여지는 개념인 '무한집합은 그 집합의 진 부분집합과 동치이다'라는 사실을 발견하고도, 인간의 직관으로는 감당할 수 없는 곤혹스러운 이 개념에 좌절하게 되며, 혹독한 시련을 겪기도 하였다([12], [14], [18]).

마찬가지로, 볼차노(B. Bolzano, 1781-1848)는 사후에 그의 친구에 의해 수집되고 편집된 책 <무한의 패러독스>에서, 함수의 개념을 독창적으로 사용하여 수들의 두 연속체를 일대일로 대응시킬 수 있었다. 즉, 그는 함수 $y=2x$를 이용하여, 어떤 수들의 한 폐구간은 다른 폐구간과 똑 같이 많은 수를 가지고 있다는 사실을 발견했다. 이리하여 무한의 한 속성이 다시 세상에 나오게 되었다[12].

이후에 무한에 대한 논의는 가우스(C. F. Gauss, 1777-1855), 리만(B. Riemann, 1826-1866), 바이어슈트라스(K. W. T. Weierstrass, 1815-1897) 등에 의해 다루어졌지만, 그 이전에 미적분학을 발견한 뉴턴과 라이프니츠와 마찬가지로 잠재적 무한만으로 만족해야 했다[12].

1-3. 실 무한 개념의 탄생

무한의 개념에 대하여 실 무한을 따른 최초의 인간인 칸토르는 집합론의 본질을 탐구하면서 잠재적 무한이 아닌 실무한의 개념에 대한 아이디어를 얻었다. 그가 집합론의 아버지로 일컬어지지만, 그의 천재성은 실 무한에 대한 중요한 성질들을 발견했다는데 있을 것이다.

칸토르는 고대 그리스인들이나 칸토르 시대의 사람들이 가지고 있던 잠재적 무한의 개념을 버리고, 실 무한의 개념을 과감하게 받아들였다. 인간의 잠재적 한계를 넘어선 그는 가장 낮은 단계의 기수(어떤 집합에 속한 원소의 개수의 척도를 나타내는 것, cardinality)를 나타내는 기호로 $\aleph$(알레프)를 선택하였고, 특히 무한 집합 중에서 가장 중요한 역할을 하는 자연수의 집합의 기수를 $\aleph_0$이라고 했다([12], [19]).

알레프의 등장은 당시의 많은 논란에도 불구하고, 일련의 알레프가 존재한다는 가정 하에 초한 산수를 발견하기에 이른다. 칸토르가 만든 무한에 대한 수학 규칙은 다음과 같다. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$(무한히 많은 자연수를 나타내는 수에 1을 더한다 해도 그 결과는 여전히 무한히 많은 수이다). 더 나아가 자연수의 모든 부분집합들의 집합을 만듦으로써, 연속체 기수 $c(c = 2^{\aleph_0})$를 만드는 데 성공했다. 그러나 $\aleph_0$과 c 사이에 기수가 존재하는가? 즉, 초한 기수의 단계가 존재하는가에 대한 논제는 그가 사망한 오랜 후에 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$의 진위를 결정하는 것은 불가능하다는 사실이 발견되기까지 그의 정신 건강을 악화시키는 원인이 되었다([12], [19], [23]).

이처럼 초한 기수를 나타내는 수들은 자연수의 개념을 확장한 것이라고 할 수 있다. 즉, 초한 기수는 실 무한의 입장에서나 가능한 것으로, 수의 개념이 무한으로 확장된 것이다. '대등인 집합은 모두 같은 기수를 갖는다'라고 정함으로써, 기수의 상등 관계가 얻어진다. 문제는 기수가 같지 않은 두 집합에 대해서는 그 기수의 대소를 어떻게 얻느냐 하는 것이다. 그런데, 2개의 유한 집합의 경우에는 '두 유한 집합 A와 B가 있을 때, A가 B의 어느 진부분집합과 대등이면 A의 기수는 B의 기수보다 작다'라는 명제에 의해 쉽게 얻어지지만, 무한집합의 경우에는 '전체는 부분과 같다'는 것이 성립함으로써, 유한 집합에서 성립하는 명제가 무한집합에서는 성립하지 않음을 알 수 있다.

이러한 문제는 칸토르 이전의 20세기 초까지 대부분의 수학자를 괴롭혔을 것이다. 그러나, 현실적인 검증이나 실험적 확인이 불가능하지만, 수학 체계 내에서 무 모순 하다면 이러한 사실들을 기꺼이 받아들일 수 있는 현대 수학의 자유성은 실무한의 개념을 기꺼이 수용하였다. 비록 우리 인간의 기본적인 관념과 인식은 여전히 그것을 배척하고 있을지라도.

무한과 관련된 여러 가지 역사적 사실들은 실 무한 개념의 발견의 역사 속에서 나타난 여러 가지 어려움을 제시한다. 이러한 과정은 학교 수학에서 학생들이 무한에 대한 성질을 배울 때에도 여전히 나타나는 현상이다. 예를 들면, 순환소수 0.999…는 1인가? 1보다 작은가? 1보다 큰가? 이 질문에 많은 학생들은 '작다'라는 쪽에 답하길 원한다[7]. 비록 순환소수를 정해진 규칙에 따라 분수로 바꾸거나, 무한 등비급수의 합의 공식을 이용하여 그 값이 1이라는 것을 확인한 후에도 학생들은 자신의 신념을 쉽게 바꾸지 않는다. 이러한 예시는 수학의 역사에서 나타난 실 무한 개념에 대한 인식의 어려움과 학생들이 이 개념을 배울 때 겪는 어려움과의 동질성을 보여준다고 할 수 있다.

2. 무한 개념에 대한 학습자의 장애

아리스토텔레스 이후에서 칸토르 이전까지, 대부분의 사람들이 인식한 무한은 '언제까지라도 계속해서 진행할 수 있는 잠재적 무한 개념'이라고 할 수 있다. 이것이 실 무한 개념에 대한 연구에 끊임없는 방해 역할을 해왔으며, 실 무한 개념이 밝혀진 현대에도 실 무한 개념은 우리에게 쉽게 인식되어지지 않고 있다.

마찬가지로, 실 무한 개념에 대하여 학생들이 가지는 인지적인 곤란함은 개개인의 지적 능력의 부족이나 정신적 미성숙과 같은 개인적인 차원의 문제가 아니라, 그 개념의 발달의 역사와 같이 보편적인 현상으로 인식되어야 한다. 학생들이 무한에 대하여 잠재적 무한 개념을 우선시 하는 것은 Brousseau[13]에 의한 '인식론적 장애'로 설명할 수 있다. 즉, 학생들이 가지고 있는 어떤 개념에 대한 관념은 어떤 개념의 발달의 역사에서 오랜 기간동안 축적되어 온 것과 같이, 수학을 배우는 학생들에게 여전히 남아 있다. 따라서, 학습자가 새로운 개념을 습득한다 할지라도 기존의 개념은 완전히 사라지는 것이 아니고, 새롭게 획

득된 개념과 혼합되어, 수학 학습의 장애의 원인이 된다.

다음에 제시되는 가상의 수학 교실은 학생들이 무한에 대한 개념을 이해하려고 할 때, 그들이 가지고 있는 잠재적 무한 개념이 실 무한 개념에 대하여 갈등의 원인이 되고 있음을 보여준다[15].

학 생: 선생님께서는 두 선분 AB와 CD는 같은 개수의 점을 갖고 있다고 하셨어요?

선생님: 그렇지. 두 집합은 동치라는 것. 다시 말하면, 두 집합의 원소 사이에 일대일 대응이 성립한다는 의미이지.

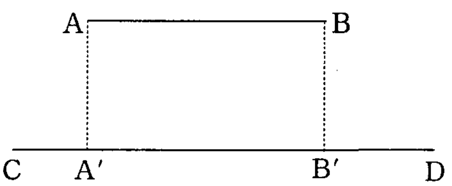
학 생: 선은 점으로, 그리고 점만으로 이루어졌다고 하시는 군요.

선생님: 확실하지.

학 생: 그렇다면, 선분 AB를 선분 CD 위에 놓았을 때는 선분 CA′와 B′D에 들어 있는 점들은 두 선분의 공통 부분에 들어 있지 않습니다.

선생님: 그렇지.

학 생: 그러면 선분 CA′와 선분 B′D를 긋는데 필요한 점들은 어디서 찾습니까?[pp. 138-139]



<그림> 잠재적 무한 개념에 의한 두 선분 위의 점들의 비교

위의 가상 시나리오와 같이, 무한에 대한 개념과 관련하여, 현대 수학이 순수한 지적 산물인 실 무한 개념을 수용하고 있음에도 불구하고, 학생들이 가지는 잠재적 무한 개념은 판단의 상황에서 우선시 되어진다. 이것은 자신의 직관적 판단에 대한 확신과 신뢰에 근거를 두기 때문이다. 실 무한 개념이 인간의 직관적인 판단의 결과와 모순이 있음은 그 개념의 생성 과정 자체가 안고 있는 본유의 특징이며, 이는 형식적 교수를 통해서도 쉽게 개선되기 어렵다. 이에 Tirosh[21]는 실 무한 개념에 대한 학습에 어려움을 겪는 이유를 다음과 같이 요약하고 있다[pp. 201-202].

· 실 무한 개념과 우리의 지적 쉐마 사이에는 깊은 모순이 있다.

· 실 무한에 대한 직관은 나이나 학교 교육에도 별로 나아지지 않는다.

- 실 무한에 대한 직관은 제기된 문제의 개념적 상황이나 그림으로 표현된 상황에 매우 민감하다.
- 학생들은 여러 가지 무한에 대한 아이디어를 가지고 있으며, 이러한 아이디어들은 실 무한에 대한 문제를 해결하는 능력에 상당히 영향을 끼친다. 이러한 아이디어들은 주로 잠재적 무한 개념을 토대로 한다.
- 아동들의 실 무한에 대한 경험들은 무한 농도의 개념과 거의 관련이 없다. 그러나 그들은 커지거나 작아지는 양에 대한 수업을 통하여 무한에 대한 경험을 하게 되는 것이 보통이다.

이러한 사실에 비추어 볼 때, 우리의 학교 수학 교육은 무한개념에 대한 학생들의 인지적 갈등을 고려해 왔는지 제고되어야 할 것이다. 이를 위해 학교에서 다루어지는 교과서를 분석해 보는 것은 유용할 것이다. 이것은 학생들이 수학적인 지식을 획득하는 일차적인 자료가 교과서이기 때문이다. 학생들이 중등학교에 들어오기 이전에, 그들은 초등학교 수학 수업에서 무한과 관련된 여러 가지 경험을 하게 된다. 이러한 것으로는 직선에 대한 정의(선분을 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선)[1, p. 33], 원의 넓이와 원기둥의 부피 구하기[2, pp. 63-67] 등을 들 수 있다.

중학교에서는 1학년에 자연수의 집합 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$의 경우처럼 원소가 끝없이 나타나는 것과 같이, 원소가 무수히 많은 집합을 '무한집합'이라고 정의[8, p. 10]하는 것으로 무한에 대한 경험을 시작한다. 여기에서 무한집합은 '끝없이 나타날 수 있다'는 의미로 제시함으로써, 잠재적 무한 개념에 의존하고 있음을 알 수 있다.

다음으로는 순환 소수를 들 수 있다. 무한 순환소수인 $0.5555\cdots$에 대한 값은 다음과 같은 방법을 통하여 제시되어 있다. 즉, $x=0.5555\cdots$라고 하면, $10x=5.5555\cdots$가 되므로 두 식으로부터 $9x=5$를 얻고, 이로부터 $x=\frac{5}{9}$이다[9, p. 13]. 이것이 중등학교 수학과 교육 과정에 제시된 실 무한의 개념에 대한 첫 경험이 된다.

3학년 과정에서 도입되는 무리수는 $\sqrt{2}=1.4142135623\cdots$과 같이 순환하지 않는 무한소수로 정의하고 있지만, 정사각형의 대각선의 길이가 되는 수로 보여줌으로써, 그것이 계속되는 과정보다 하나의 완결된 존재로 보여주는 실 무한의 개념으로 취급되고 있다[10].

고등학교에서는 실수의 집합과 복소수의 집합 위에서 수학적 사실들을 다루므로, 무한집합을 배경으로 수학 교육 과정이 전개되고 있다고 볼 수 있다. 특히, 분수함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프에서 점근선에 대한 정의(곡선 위의 점이 한 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다)[4, p. 130], $y=\tan x$의 그래프에 대한 설명[4, p. 169], 지수함수와 로그함수에서의 점근선[3, pp. 54-55, p. 64] 등은 무한에 대한 경험을 제공한다.

다음으로, 무한급수의 합의 정의를 통하여 실 무한 개념을 직접 도입하고 있다. 이것은 중학교에서 배운 순환소수가 실 무한 개념으로 해석되는 또 다른 방법이다. 즉, '공비가 1보다 작은 무한 등비급수의 합의 공식'을 이용하여 0.9999⋯=1임을 제시하고 있다[3].

이를 종합해 보면, 초등학교에서부터 접하게 되는 무한 개념에 대하여 학생들은 나름대로의 '자생적 개념'을 형성할 것이라고 판단된다. 교육과정의 흐름은 잠재적 무한 개념에서 실 무한 개념으로 옮겨가고 있다. 곡선의 점근선과 같이, 때로는 잠재적 무한 개념이 학습 주제의 이해에 도움을 주기도 하지만, 이러한 경험들은 이후의 실 무한 학습에 장애가 될 수 있다.

따라서, 학교수학에서 제시하고자 하는 최종 목표가 실 무한 개념임을 고려할 때, 이전의 잠재적 무한 개념에 의한 인지구조를 재구성하도록 요구하는 교수-학습 방안이 요구된다.

3. 무한 개념에 대한 교육학적 시사점

학생들에게서 체계적인 오류가 나타나는 수학 내용을 가르치기 위해서는, 이들 수학 내용에 대하여 학생들이 가지는 오류 발생의 원인을 고려해 보아야 한다. 특히, 무한개념과 관련하여 학생들에게서 나타나는 체계적인 오류는 개념이 생성되고 발달해 가는 과정에서 발생하는 인식론적 장애가 존재하기 때문이다.

이런 면에서, 학생들이 무한에 대하여 직관적으로 인식하는 것은 잠재적 무한 개념인데, 이것은 우리의 인식에 깊이 뿌리내리고 있는 신념(예를 들면, 전체는 부분과 동치가 될 수 없다)에 근거하기 때문이다. 따라서, 실 무한의 개념을 학습해야 하는 학생들은 무한 개념에 대한 근본적인 신념의 재조직이 필요하다.

그러나, 수학의 역사가 보여주듯이, 기존의 잠재적 무한 개념을 쉽게 일소하기는 어렵다. 이런 경우에 교사에 의해 제시되는 실 무한 개념은 학생들에게 또 하나의 잠재적 갈등 요인이 된다. 따라서, 무한 개념의 이해를 위해서는 전체는 부분과 동치가 될 수 있으며, 무한 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해하도록 도움을 주어야 한다.

이에, Fischbein[15]은 심리학적 관점에서 체계적인 지적 훈련을 통한 제 2 직관의 계발을 제시하고 있다. 실 무한 개념에 대한 제 2 직관의 계발을 위하여, 교사는 실 무한의 개념을 적절히 안내할 수 있는 소재를 수업에 도입하거나, 무한 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해하도록 도움을 주는 방안을 제시하여야 한다. 이것은 학생들에게 그들의 사전 경험과 일치하지 않고, 기존의 신념과 갈등을 야기할 수 있는 기회를 제공할 것이다.

첫째로, 실 무한의 개념을 적절히 안내할 수 있는 소재를 수학 교실에서 이용하기 위하여 '힐버트의 호텔(Hilbert's Hotel)'이라고 알려진 무한호텔에 관한 이야기를 제시하는 것은 유

용할 것이다. 이것은 무한집합이 자신의 진부분집합과 동치라는 사실을 이해하는데 좋은 방법이 될 수 있다[12], [19].

무한호텔에는 객실이 무한히 많다. 그러나, 이 호텔에 투숙하려는데 객실이 모두 찼다고 한다. 어떻게 하면 이 호텔에 투숙할 수 있을까? 이 문제는 위대한 독일의 수학자 힐버트가 이 이야기를 자주 언급했기 때문이 힐버트의 호텔이라고 명명되고 있는데, 이 호텔에 투숙할 수 있는 방법은 다음과 같다.

먼저, 1호실 사람을 2호실로 보낸다. 그리고, 2호실 사람을 3호실로 보낸다. 마찬가지로, 3호실 사람을 4호실로, 4호실 사람을 5호실로, …. 이와 같이, 모든 투숙객을 옮길 수 있다. 그러면 1호실이 비기 때문에 1호실에 투숙하면 된다. 이러한 예시는 부분이 전체와 동치일 수 있다는 사실을 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

둘째로는, 무한 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라, 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해하도록 도움을 주는 방안을 제시하는 것을 들 수 있다. 이를 위한 방안으로 수학적 사실의 시각화는 유용하다. 예를 들면, Nelsen[20]에 의해 제시되는 단위 정사각형의 분할 모델은 무한 등비급수의 합($\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1$)을 이해시키기에 적절하다.

이것은 제논에 의해 제시되는 또 다른 역설인 이분법에 의한 설명과도 적절하다. 제논의 이분법에 의하면, 우리는 지금 있는 실내를 절대로 벗어날 수 없는데, 그 이유는 다음과 같다. 우리는 먼저 문까지의 거리의 반을 걸어간다. 아직 반이 남아 있다. 다시 남은 거리의 반을 간다. 또다시 반이 남아 있다. 이런 과정을 반복한다면 각 단계의 남은 거리는 전 보다는 작아지겠지만, 결코 문 밖으로 나갈 수 없다. 이 역설에는 무한히 많은 단계를 갈지라도 때로는 그 합이 유한이 될 수 있다는 아이디어를 보여주고 있다. 무한히 많은 단계를 거친다 할지라도 그 값은 완결된 하나의 과정이다라는 실무한의 중요한 아이디어를 내포하고 있으며, 이에 대한 시각적 표현은 이러한 사실을 구체적으로 확인시켜준다.

마지막으로, 학생들은 실 무한 개념을 받아들이기 위해서 기존의 인지 구조에 모순이 있음을 인식할 기회와 자신의 사고 과정을 반성해 볼 수 있는 기회를 제공받아야 한다. 이를 위해 학생들이 스스로 정신적 갈등을 겪고, 학생 상호간에 갈등을 해결하기 위한 토론 학습의 기회를 부여하는 문제를 제공하는 것은 그 방안이 될 수 있다.

예를 들면, $S=1-1+1-1+\cdots$과 같은 무한 급수의 합을 구하도록 하자. 위 문제는 해결 방법에 따라 다음과 같이 모순이 없어 보이는 방법이 존재한다.

① $S=(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$

② $S=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+\cdots=1$

③ $S=1-(1-1+1-1+\cdots)$이므로 $S=1-S$에서 $S=1/2$이다.

학생들은 각기 다른 해결 방법을 가지고 토론을 통해 기존의 인지 구조에서는 해결하기 곤란한 수학적 사실을 발견하고 그들의 인지 구조를 의심하고 반성할 기회를 가질 것이다.

학교 수학에서 무한에 대한 교수의 경우에, 일상의 경험이나 선험 지식에 모순적인 실 무한 개념의 이해에는 많은 어려움이 있다는 것이 주지의 사실이다. 따라서, 무한 개념의 학습의 경우에 학생들에게 개인적으로, 그리고 경험적으로 정신적인 생산적 활동에 참여할 수 있는 교수학적 상황을 제공해야 한다. 학생들은 갈등을 경험하고 갈등을 극복하는 노력을 함으로써 특정한 명제나 개념을 지적으로 일관성 있는 것으로 받아들일 수 있게 된다. 반직관적인 것을 논리적인 바탕 위에서 의미 있는 것으로 수용하는 것은 수학교육에서 기본적으로 획득되어야 한다[6].

4. 결론

수학에서 무한은 중요한 개념이며, 현대 수학에서 핵심적이고 필수적인 역할을 한다. 그러나, 현대 수학에서 받아들여지고 있는 실 무한 개념은 인간의 순수한 지적 산물이기 때문에, 잠재적 무한 개념을 우선시 하는 인간에게는 실 무한 개념이 쉽게 인식되어지지 않는다. 이러한 사실은 이 개념에 대한 학교 현장의 교수-학습 상황에서도 그대로 나타난다.

따라서 본 논문에서는 현대 수학에서 중요한 개념인 '무한'에 대하여, 학생들이 겪고 있는 어려움의 주원인을 '인식론적 장애'로 보고, 이것을 중심으로 무한 개념에 대한 교수학적 시사점을 모색해 보았다.

아리스토텔레스 이후로 많은 수학자들은 잠재적 무한과 실 무한을 구별해 왔으며, 아리스토텔레스는 오직 잠재적 무한만이 존재한다고 보았다[11]. 수학에서 실 무한을 거부하고 잠재적 무한만을 인정한 사례는 가우스(Gauss)와 푸앵카레(Poincaré)에서도 발견된다[21]. 이와 같이, 수학자들이 실 무한을 거부하는 주된 원인은 실 무한이 인식에 어려움을 초래하기 때문인데, 이것은 실 무한 개념을 발견한 칸토르 조차도 겪은 어려움이었다.

무한 개념과 관련된 수학의 역사는 학생들에게 인식론적 장애의 원인이 되며, 학교 교육을 통하여 학생들이 가지고 있는 기존의 잠재적 무한 개념을 쉽게 일소하기가 어렵다는 것을 보여준다. 따라서, 무한 개념의 이해를 위해서는 전체는 부분과 동치가 될 수 있으며, 무한 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해하도록 도움을 주어야 한다. 이를 위해 실 무한의 개념을 적절히 안내할 수 있는 소재를 수학 교실에서 이용하거나, 수학적 사실의 시각화와 같이 무한 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해하도록 도움을 주는 방안을 제시하는 것이 유용할 것이다.

참고 문헌

1. 교육부, **수학 2-가**, 대한교과서 주식회사, 2000.
2. 교육인적자원부, **수학 6-나**, 대한교과서 주식회사, 2002.
3. 박배훈, 김원경, 조민식, 김두성, 김원석, 정원진, 이대현, **수학 1**, 법문사, 2003.
4. 박배훈, 김원경, 조민식, 김원석, 이대현, **수학 10-나**, 법문사, 2003.
5. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1998.
6. 우정호, **수학 학습-지도원리와 방법**, 서울대학교 출판부, 2000.
7. 이대현, **수학 문제해결과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석**, 한국교원대학교 박사학위 논문, 2001.
8. 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, **수학 7-가**, (주) 교문사, 2003.
9. 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, **수학 8-가**, (주) 교문사, 2003.
10. 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, **수학 9-가**, (주) 교문사, 2003.
11. 임정대, **수학적 존재와 인식**, 서울: 청문각, 1985.
12. Aczel, A.D., *The Mystery of the Aleph.* Four Walls Eight Windows c/o Writers House Inc, 2000. 신현용, 승영조 공역, **무한의 신비: 수학, 철학, 종교의 만남**, 서울: 승산, 2002.
13. Brousseau, G., *Theory of Didactical Situations in Mathematics,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
14. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1953.
15. Fischbein, E., *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach,* Dordrecht: D. Reidel Publisching Company, 1987.
16. Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P.T., "The Intuition of Infinity," *Educational Studies in Mathematics* 10(1979), 3-40.
17. Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U., "Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?," *Educational Studies in Mathematics* 12(1981), 491-512.
18. Klein, M., *Mathematics: The Loss of Certainty, 1980.* 박세희 역, **수학의 확실성**, 서울: 민음사, 1988.
19. Maor, E., *To Infinity And Beyond: A Cultural History of the infinity,* Birkhäuser Boston, 1987. 전대호 역, **무한, 그리고 그 너머: 무한의 문화사**, 서울: (주)사이언스 북스, 1997.

20. Nelsen, R.B., *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking,* The Mathematical Association of America, 1993.
21. Tirosh, D., "The Role of Students' Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorian Theory," *Advanced Mathematical Thinking. ed.* Tall, D., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, 199-214.
22. Tirosh, D., "Finite and Infinite Sets: definitions and intuitions," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 30(3)(1999), 341-349.
23. You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin, *Set Theory: An Intuitive Approach,* Houghton Mifflin Company, 1974.