KJHM Vol. 16, No. 3, 2003, 45-56

유클리드 제5공준의 기원에 관한 가설

서울대학교 대학원 수학교육과 **도종훈**

Abstract

In this paper, we investigate the origin of Euclid's fifth postulate. For this we analyze the Euclid's proof of the Pythagorean theorem, so form a hypothesis "The Euclid's fifth postulate originated from the Pythagorean theorem." And we test our hypothesis by some historical evidences.

0. 문제 의식

"한 직선이 주어진 다른 2개의 직선들과 서로 만나고 그 직선 한쪽에 있는 안각의 합이 2직각보다 작을 때, 주어진 2개의 직선을 한없이 연장하면 두 직선은 그 안각이 있는 쪽에서 만난다."(제5공준, 유클리드)

유클리드의 제5공준은 그것의 등장 이후 19세기 새로운 기하학의 탄생에 이르기까지 수많은 수학자들의 의심과 공격의 대상이 되었다. 제5공준은 나머지 4개의 공준과는 달리 직관적이거나 자명하지 않을 뿐 아니라 그 진술이 장황하고 복잡하여 공준이라기보다는 **원론**에 등장하는 명제들과 오히려 더 유사해 보인다. 이런 이유로 유클리드 자신조차 **원론** 제1권의 29번째 명제에 이르기까지 제5공준을 사용하지 않았을 정도로 제5공준의 사용을 꺼렸고[12, 97], 그 후 약 2000여 년 동안 수많은 학자들이 제5공준을 나머지 4개의 공준들로부터 연역적으로 증명하거나 더 간단한 공준으로 대체하려고 시도하였다([14], [12, 96-103], [1, 433]). 그 과정에서 제5공준과 논리적으로 동치이면서 더 간단한 형태의 여러 명제[1]가 발견되었는

1) 다음 명제는 모두 유클리드의 제5공준과 동치인 명제들이다([18], [3], [11, 220]).
- 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나 그 주어진 직선에 평행한 직선은 유일하다.(플레이페어 공리)
- 임의의 직각삼각형에서 피타고라스 정리가 성립한다.
- 직사각형이 존재한다.
- 밑변의 길이가 a, 높이가 h인 삼각형의 넓이는 $ah/2$이다.
- 임의의 삼각형의 내각의 합은 180°이다.

데, 예를 들어 18세기에 널리 보급된 유클리드 **원론**의 개정판에는 제5공준 대신 우리에게 친숙한 플레이페어 공리가 들어 있다[5, 50].

유클리드는 왜 하필 그 자신도 사용하기를 기피한 그토록 장황하고 복잡한 진술을 그의 제5공준으로 채택한 것일까? 만약 평행선의 유일성이라는 원리가 필요했다면 플레이페어 공리와 같이 더 간단한 형태의 원리를 채택할 수도 있었을 텐데 무엇이 그로 하여금 그토록 복잡한 형태의 원리를 제5공준으로 채택하게 한 것일까?

본 고에서는 이에 대한 답을 유클리드의 피타고라스 정리에 대한 증명으로부터 찾고자 한다. 연구자는 분석법에 의한 유클리드의 피타고라스 정리 증명 분석을 통해 유클리드가 피타고라스 정리를 증명하는 과정에서 제5공준을 도입할 수밖에 없었으리라는 가설을 설정하고, 몇 가지 증거를 통해 가설의 타당성을 검증하고자 한다. 그리고 이러한 일련의 작업이 지니는 수학 교육적 의미에 대해 간단히 논의하고자 한다.

1. 분석법 : 피타고라스 정리에 대한 유클리드의 증명으로부터

유클리드 **원론**은 5개의 공준(postulate)과 공리(common notion) 및 정의들과 이들로부터 연역되는 465개의 명제로 구성되어 있다. 피타고라스 정리 역시 이들 명제 중 하나로서 기원전 약 6세기경 피타고라스 학파에 의해 발견된 이후 현재까지 학교 기하 교육 과정에서 중요한 위치를 차지하고 있다. 피타고라스 정리의 중요성을 감안해 볼 때, 당대의 기하학 지식과 이론을 집대성하여 조직하고 체계화하고자 하는 원대한 포부를 지녔던[13, 30] 유클리드가 **원론**의 집필 과정에서 피타고라스 정리를 누락시켰을 리 없다. 실제로 피타고라스 정리와 그에 대한 증명은 유클리드 **원론**의 제1권 47번째 명제로 제시되어 있다. 유클리드는 자신의 체계에서 직관에 근거한 무의식적 가정이나 추측, 부정확성을 추방하고자 했으며[13, 34], 그러한 목표 하에 집필된 **원론**의 구성 체계로 미루어 볼 때 유클리드는 피타고라스 정리 역시 다른 명제들과 마찬가지로 최소한의 공준과 공리들로부터 연역적으로 증명하고자 시도하였을 것이다. 사실 **원론**에 제시된 증명법은 이미 잘 알려져 있고 현행 중학교 3학년 교과서에도 포함되어 있지만, 역사적으로 독창적이라는 극찬과 쥐덫증명이라는 혹평을 동시에 받았을 만큼 특이한 증명이기도 하다. 다음은 **원론**에 대한 히스(Heath)의 주석 일부이다 [11, 350-354].

> 프로클루스는 다음과 같이 말했다. '나는 이 법칙이 성립함을 맨 처음 발견한 사람을 존경하기는 하지만 기하학 **원론**을 쓴 사람을 더욱더 존경한다. 왜냐하면 그는 이 법칙을 매우 독창적으로 증명하였을 뿐만 아니라 6권에 가서 이것을 더욱 일반화한 법칙을 증명하였다.' …

· 닮은 삼각형이 존재한다.
· 서로 간의 거리가 모든 곳에서 똑같은 두 직선이 존재한다.
· 한 직선 위에 놓여 있지 않은 세 점을 지나는 원이 존재한다.

쇼펜하우어는 직각이등변 삼각형의 경우와 같은 보다 명확한 증명을 원했으므로, 다소 복잡한 유클리드의 증명을 '쥐덫 증명'일 뿐 아니라 '쓸데없이 과장된 증명, 아니 덜떨어진 증명'이라고 하였다.

그렇다면 유클리드는 그러한 증명법을 어떻게 생각해 냈으며, 최초의 아이디어는 무엇이었을까? 2500여 년 전에 생성된 증명의 아이디어를 추측할 수 있는 한 가지 가능한 방법은 분석법을 이용하여 그 증명의 과정을 역추적하는 것이다. 분석이란 선행하는 어떤 것으로부터 바라는 결과가 유도될 수 있는가를 묻고 다시 그 선행자의 선행자는 무엇인가 묻기를 계속하여 결국 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 이르게 하는 절차를 일컫는다[15, 298]. 분석법은 문제의 해를 구하거나 새로운 증명법의 발견을 위해 사용되는 발견술의 하나이지만, 기존에 생성되어 있는 증명법의 최초 아이디어에 대한 탐구방법이 될 수도 있다. 우리는 종종 "도대체 이 증명법을 어떻게 생각해 냈을까?"라는 질문을 던지곤 한다. 그러나 유클리드 **원론**을 포함한 대부분의 수학저술이나 논문에 기술되어 있는 정리의 증명들은 종합[2]의 형태를 취하고 있으며, 각 증명법에 대한 최초 발견의 아이디어가 직접적으로 드러나지 않는 경우가 많다[16, 146-148]. 특히 그 증명이 오래 전에 집필된 것일수록 최초의 아이디어를 간파하기는 쉽지 않다. 이러한 경우 가능한 한 가지 방법이 바로 증명과정의 분석을 통한 최초 아이디어의 역추적이다. 물론 분석의 과정을 통해 도달한 최초 아이디어는 그것에 관한 하나의 가설로서 필연성을 보장받기는 어려울 것이다. 그러나 당시의 상황에 관한 역사적 증거들을 통해 가설에 대한 개연성을 확보하고 가설의 신뢰도를 높일 수 있다.[3]

2. 가설에 이르기까지

피타고라스 정리와 그 증명에 관한 역사적 기록이나 연구에 비해 제5공준의 기원에 관한 기록이나 연구는 찾아보기 어렵다. 제5공준이 수학사에 남긴 파장을 고려해볼 때 그것의 기원에 관한 연구가 없다는 것은 의아스러운 일이다. 제5공준의 기원에 관한 다음의 가설은 연구자가 분석법을 이용하여 **원론**에 나타난 유클리드의 피타고라스 정리 증명에 대한 최초 아이디어를 역추적하는 과정에서 발견한 것이다.

---

2) 종합은 분석에서 제일 마지막에 도달한 점, 즉 이미 알려져 있거나 참이라고 가정한 것으로부터 시작하여 분석과정에서 그에 선행했던 것을 이끌어 내고 계속하여 분석 과정을 되밟아 가면서 마지막에 요구하고 있는 것에 도달할 때까지 연역과정을 계속하는 절차를 말한다[15, 298-299].

3) 폴리아는 수학에서의 이와 같은 개연적 추론의 과정을 법정에서의 심문 과정에 비유하여 다음과 같이 패턴화하였다[16].

A이면 B이다.
B가 참이다.

A는 더욱 믿을 만하다.

가설 : 유클리드 제5공준의 기원은 피타고라스 정리에 있다.

이제 유클리드에 의한 피타고라스 정리 증명의 과정을 분석법을 이용하여 역추적해 보도록 하자.4)

[명제 47] 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 그 직각삼각형의 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형들의 넓이의 합과 같다.(피타고라스 정리)

[증명] □BGHD=2△ABC(명제 41)=2△FBC=□EFBA (명제 41)이다. 같은 방법으로 □DHIC=□ACKJ 임을 보일 수 있다. 그러므로 다음이 성립하여 정리가 증명된다.

$$\overline{BC}^2 = \square BGIC = \square BGHD + \square DHIC$$
$$= \square EFBA + \square ACKJ = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

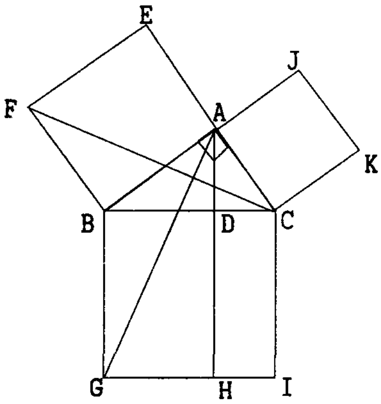


그림 1

위 증명은 명제 41 "밑변이 같고 같은 평행선에 놓여 있는 평행사변형과 삼각형이 있을 때, 평행사변형의 넓이는 삼각형 넓이의 두 배이다."를 중요한 전제로 하고 있다. 명제 41은 명제 37과 명제 34로부터 유도될 수 있으며, 명제 37은 다시 명제 35와 명제 34로부터 유도될 수 있다(부록 참고).

[명제 37] 두 삼각형의 밑변이 같고, 같은 평행선에 놓여 있다면 이들 두 삼각형의 넓이는 서로 같다.

[명제 35] 밑변의 길이가 같고, 밑변과 평행한 직선 위에 윗변이 놓인 임의의 두 평행사변형의 넓이는 서로 같다.

[명제 34] 평행사변형의 대변의 길이와 대각의 크기는 서로 같다. 그리고 대각선은 넓이를 이등분한다.

여기서 주의할 점이 있다. 평행선과 평행사변형이란 용어를 주목해 보자. 평행사변형은 평행선이 존재한다는 가정으로부터 정의될 수 있다. 유클리드는 교점을 갖지 않는 동일 평면상의 두 직선을 서로 평행하다고 정의하였다. 즉, 아무리(무한히) 연장하더라도 만나지 않는

4) 본 고의 증명 분석은 [10]의 "The Pythagorean Theorem on the basis of Euclid's Axioms"에 관한 논의에서 기본적인 아이디어를 얻었으며, 분석에 사용된 **원론**은 [11]이다. 그러나 명제의 진술과 증명에 사용된 용어나 서술방식 등을 학교수학에서의 그것들에 준하여 재구성하였다. 예를 들어, 명제 47의 진술에서 '넓이'라는 용어를 사용하였는데, **원론**에서는 '넓이'라는 용어가 사용되지 않는다.

동일 평면상의 두 직선은 서로 평행하다는 것이다. 평행선의 정의 속에는 무한에 대한 논의가 포함되어 있다([17], [10], [12, 96-97]). 인간의 경험이 유한하다는 측면에서 볼 때 평행선의 개념은 직관적으로 쉽게 받아들여지거나 확인되지 않는다. 우리는 우리의 경험을 초월하는 세상의 존재성뿐만 아니라 설령 존재한다고 하더라도 그 곳에서 어떠한 현상들이 일어나는지에 대해서는 경험적으로 알 수가 없다. 마찬가지로 직선이 우리의 경험 영역을 벗어나서 무한히 연장된다고 했을 때, 과연 그러한 연장이 가능한가의 여부와 더불어 설령 연장이 가능하다고 하더라도 그 곳에서 무슨 일이 일어날지 경험적으로 아는 것은 불가능하다.

따라서 우리는 여기에서 다시 두 가지의 의문을 제기할 수 있다. 첫째, 평행선은 존재하는가? 평행선이 존재하지 않으면 평행사변형 또한 존재하지 않을 것이다. 평면상에서 평행한 두 직선이 존재한다는 것은 어떻게 알 수 있는가? 둘째, 평행선이 존재한다면 그것은 유일한가? 그러나 이 유일성의 문제는 평행선의 존재성 문제와 함께 자연스럽게 제기된 우리의 의문과는 달리 지금 이 시점보다 더 후에 유클리드에 의해 취급된 것으로 보이며, 더구나 유클리드는 이것을 의문시한 것이 아니라 당연시하여 그의 제5공준으로 받아들였다. 유클리드가 제5공준을 꺼림칙하게 여긴 것은 이미 언급한 사실이며, 그것에 대해 보다 공격적인 문제를 제기한 것은 그의 몫이 아니었다. 그러나 유일성 문제와는 달리 평행선의 존재성에 대한 증명은 **원론** 1권 명제 31을 통해 이미 유클리드에 의해 확립되어 있었다. 명제 31은 명제 27에 의해, 그리고 명제 27은 다시 명제 16에 의해 유도될 수 있다(부록 참고). 이로써 평행선의 존재성은 증명되고, 평행사변형의 정의와 그에 대한 논의 또한 가능해진다.

[명제 31] 직선과 한 점이 주어졌을 때, 그 점을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선을 작도하여라.(평행선의 존재성)

[명제 27] 두 직선이 주어져 있다. 주어진 두 직선을 횡단하는 직선에 의해 만들어지는 엇각의 크기가 서로 같으면, 두 직선은 평행하다.

[명제 16] 삼각형의 한 외각의 크기는 인접하지 않은 내각의 크기보다 크다.

이제 명제 35와 명제 34의 증명을 각각 살펴보도록 하자.

[명제 35 증명]

$\triangle ABE = \triangle DCF$이면 $\square ABCD = \triangle ABE + \triangle GBC - \triangle GED = \triangle DCF + \triangle GBC - \triangle GED = \square EBCF$이므로, $\triangle ABE = \triangle DCF$임을 보이기만 하면 충분하다. 그런데 $\triangle ABE = \triangle DCF$임을 보이기 위해서는 $\angle AEB = \angle DFC$임을 보여야 한다.

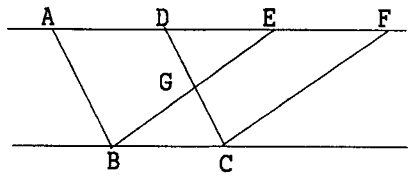


그림 2

[명제 34 증명]

$\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $\triangle ABD = \triangle CBD$임을 보이기 위해서는 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$임을 보이면 된다. 그리고 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$임을 보이기 위해서는 $\angle ACB = \angle DBC$, $\angle ABC = \angle DCB$임을 보여야 한다.

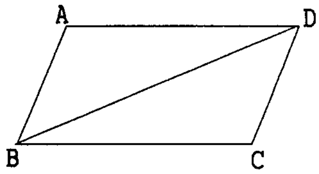


그림 3

위의 두 명제의 증명을 완료하기 위해서는 "평행한 두 직선과 이 두 직선을 횡단하는 직선에 의해 만들어지는 동위각(엇각)의 크기가 서로 같음"을 보여야 한다. 아마도 유클리드는 피타고라스 정리를 증명하는 과정에서 현재 우리가 당면한 지금의 상황에 봉착하였을 것이며, 그는 이 상황을 그의 **원론** 1권 명제 29를 통해 해결하였다. 주지하는 바와 같이 유클리드가 제5공준을 처음으로 사용한 것은 다름 아닌 명제 29이고, 이는 유클리드가 제5공준을 처음 사용한 명제일 뿐 아니라 그로 하여금 제5공준을 공준으로 채택할 수밖에 없게 만든 명제이기도 함을 다음 증명의 과정으로부터 추측할 수 있다.

[명제 29] 평행한 두 직선이 주어져 있을 때, 이 두 직선을 횡단하는 직선에 의해 만들어지는 엇각의 크기는 서로 같다.

[증명] 일반성을 잃지 않고 $\angle AGH > \angle GHD$, 즉 두 엇각(동위각)의 크기가 서로 다르다고 가정하면, $\angle AGH + \angle BGH = 2$ 직각이고 $\angle AGH + \angle BGH > \angle GHD + \angle BGH$이다. 즉, $\angle GHD + \angle BGH < 2$ 직각이다.

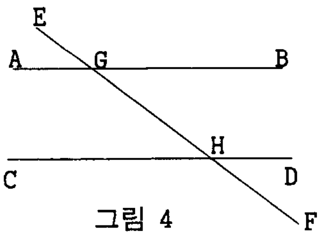
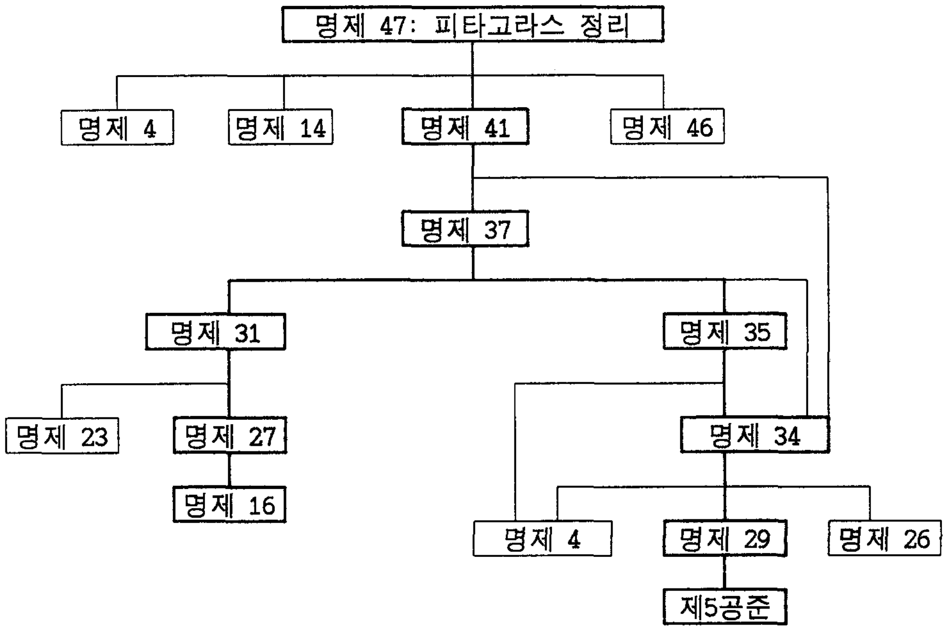


그림 4

명제 29에 대한 증명에 제시된 지금의 이 상황은 제5공준이 기술하고 있는 상황과 정확하게 일치한다. 아마도 유클리드는 이 상황에서 자 이제 어떻게 해야 할 것인가? 라고 자문하며 위 그림을 뚫어져라 쳐다보았을 것이다. 그리고 한 순간 그의 위대한 직관은 다음과 같은 원리에 주목했을 것이다. "직선 AB와 직선 CD는 $\angle GHD + \angle BGH < 2$ 직각이 되도록 직선 EF와 만나고 있다. 이러한 두 직선 AB와 CD는 반드시 만날 것이다." 이것이 바로 유클리드의 제5공준이며, 이로 인해 명제 29의 증명은 완결된다. 동시에 명제 29가 그 증명 과정에서 제5공준이 사용된 최초의 명제가 될 수밖에 없었던 필연성을 확인할 수 있다. 그리고 피타고라스 정리에 대한 증명이 이 필연성의 출발점이 되었음을 이상의 논의를 통해 추측할 수 있다.

지금까지의 논의를 정리하여 도식화하면 다음과 같다.



그러나 본 고의 논의와는 달리 클라인(1986)은 유클리드의 제5공준 진술 방식 즉, 제5공준의 기원에 대하여 다음과 같은 견해를 밝히고 있는데[12, 96], 이는 연구자가 찾아낸 제5공준의 기원에 관한 유일한 논의[5]이다.

> 유클리드가 그의 공준을 이런 방법으로 기술한 데에는 나름의 이유가 있었다. 그러한 진술 대신에 두 안각의 합이 2직각이 되면 두 직선은 결코 만나지 않는다, 즉 평행하다고 기술할 수도 있었을 것이다. 그러나 유클리드는 결코 만나지 않는 무한 직선이 있을 수 있다고 가정하는 것을 두려워했던 것으로 보인다. 확실히 경험은 무한 직선에 대해서는 어떤 보장도 주지 못하며, 그 반면에 공준은 물리적 세계에 대한 자명한 사실이라고 생각되었기 때문이다.

그러나 클라인의 이러한 견해는 다음의 두 측면에서 잘못된 견해라고 볼 수 있다. 첫째, '두 안각의 합이 2직각이 되면 두 직선이 만나지 않는다.'라는 진술은 **원론** 1권 명제 27의 재진술에 지나지 않으므로, 제5공준을 대신할 수 없다. 둘째, 제5공준은 평행선의 존재성에 대한 가정이 아니라 평행선의 유일성에 대한 가정이다. 앞에서 논의한 바대로 유클리드는 제5공준에 의지하지 않고 명제 27과 명제 31을 통해 이미 평행선의 존재성을 인정하였다. 그러므로 유클리드가 결코 만나지 않는 무한직선 즉, 평행선의 존재에 대한 가정을 꺼려서 제5공준을 그런 식으로 진술했다는 클라인의 견해는 받아들이기 어려운 것이다.

5) 실제로 연구자가 찾아낸 그 밖의 제5공준에 관한 논의들([3],[[6],[7],[14],[18],[19])은 모두 제5공준에 대한 증명 시도나 제5공준과 동치인 명제들에 관한 것들이다.

3. 가설을 뒷받침하는 몇 가지 증거

유클리드 제5공준의 기원에 관한 이상의 논의는 유클리드의 피타고라스 정리에 대한 증명을 분석하는 과정에서 얻어진 하나의 가설이며 이를 직접적으로 증명해줄 만한 역사적 기록은 아직 발견되지 않은 듯하다. 그러나 우리의 가설을 뒷받침해줄 만한 몇 가지의 논거들을 문헌을 통해 확인할 수 있다.

첫째, 제5공준은 유클리드의 독창적인 창작품이다.

유클리드 **원론**은 유클리드 자신의 창조적인 연구 결과물들을 저술한 것이라기보다는 당대의 지식과 이론을 집대성한 것으로서, 유클리드의 업적은 **원론**에 실린 내용 그 자체가 아니라 **원론**의 연역적 구성 체계에 있다고 볼 수 있다. 그러나 그렇다고 해서 유클리드 자신의 창작물이 전혀 없는 것은 아니다. 특히 제5공준은 다른 4개의 공준들에 비해 유클리드로부터 유래했다는 증거가 많으며[9, 67], Mlodinow(2001)는 제5공준을 유클리드 자신이 직접 창안한 것이라고 주장하였다[13, 37]. 그러나 역설적인 사실은 자신이, 아마도 자신의 필요에 의해, 창안한 제5공준을 그 자신이 사용하기를 기피하였다는 점이다. 이로부터 우리는 제5공준이 어떤 계기에 의해서 불가피하게 도입되었음을 추측할 수 있다. 그렇다면 그 계기가 무엇이었을까? **원론**에서 제5공준을 전제로 하여 증명되는 모든 명제들이 후보가 될 수 있겠지만, 그 중에서도 가장 강력한 후보는 아마 피타고라스 정리일 것이다. 피타고라스 정리는 제5공준 도입의 계기가 될 수 있는 충분한 자격을 지니고 있다.

둘째, 피타고라스 정리의 중요성

피타고라스 정리는 크기와 모양에 상관없이 임의의 직각 삼각형에 대해서 성립하는 법칙인 동시에 직각삼각형이 아닌 어떠한 삼각형에서도 성립하지 않는 일반적인 법칙으로서, 피타고라스는 이 정리의 발견을 기념하기 위해서 황소를 제물로 바칠 정도로 이 정리를 중요하게 여겼다고 한다([6], [11, 350]). 이 정리는 유클리드 시대로부터 현대에 이르기까지 수학의 기초가 되는 정리이자 인류의 위대한 문화적 자산으로서 언어와 문화의 경계를 초월하여 전 세계에 걸쳐 가르쳐지고 있다([19], [4, 57]). 피타고라스 수에 대한 탐구로부터 페르마의 마지막 정리가 유추되었고, 무리수 $\sqrt{2}$의 발견 역시 피타고라스 정리를 만족하는 직각이등변삼각형으로부터 비롯되었다. 현대수학에서의 각종 거리(metric) 개념, 그리고 코사인 제2법칙이나 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$과 같은 삼각함수 공식들이 피타고라스 정리로부터 유래되었으며[4, 44], 피타고라스 정리의 성립 여부를 통해서 공간이 휘어 있는지를 판별할 수가 있다[13, 7]. 피타고라스 정리는 평행선 공준과 동치이며, 실제로 피타고라스 정리로부터 제5공준과 동치인 플레이페어 공리를 증명할 수 있다([19], [7], [3]).

피타고라스 정리의 중요성은 그것의 **원론**에서의 위치를 통해서도 알 수 있다. **원론** 1권은

크게 기초적인 논의(명제 1~명제 26), 평행선에 관한 논의(명제 27~명제 32), 평행사변형과 넓이에 관한 논의(명제 33~명제 45), 그리고 피타고라스 정리에 관한 논의(명제 46~명제 48)의 네 부분으로 구성되어 있다[4]. 그러나 피타고라스 정리와 그것의 증명 과정 속에 1권 각 부분의 핵심적인 내용들이 대부분 포함되어 있어 피타고라스 정리가 **원론** 1권의 핵심 내용인 동시에 목적의 역할을 하고 있음을 알 수 있다. **원론** 2권은 직사각형에 관한 14개의 명제와 2개의 정의로 구성되어 있는데, 2권의 모든 증명이 피타고라스 정리를 기초로 하고 있어 피타고라스 정리가 **원론** 2권을 전개하는 핵심적인 수단이 되고 있음을 알 수 있다. 결국 **원론** 1권과 2권은 피타고라스 정리를 중심으로 구성되어 있으며, 1권은 피타고라스 정리를 증명하기 위한 것이고 2권은 피타고라스 정리를 응용한 것으로 볼 수 있다.

셋째, 유클리드는 피타고라스 정리에 대한 새로운 증명법을 창안해야만 했다.

피타고라스 정리가 제5공준의 도입 계기가 되었다는 것은 결과로서의 정리 그 자체뿐만 아니라 직접적으로는 정리의 증명이 그렇다는 것이다. 유클리드 당시 이미 피타고라스 정리에 대한 증명법이 존재하고 있었음에도 불구하고 유클리드는 **원론**의 구성 체계에 맞는 새로운 증명법을 창안해야만 했다[8, 216]. Heath(1956)는 이에 대하여 다음과 같이 기술하고 있다[11, 353-354].

> 피타고라스 학파가 알고 있었을 것으로 간주되는 가장 그럴듯한 증명은 닮은 삼각형 즉, 비례 이론을 이용한 증명이다. 그러나 피타고라스 당시에는 비례 이론이 완전하지 않았으며, 따라서 그것을 이용한 피타고라스 정리 증명은 불완전한 것이다. 유클리드 역시 비례 이론을 이용하여 증명할 수는 없었다. 왜냐하면 피타고라스 정리는 당장 2권에서 쓰이지만, 유클리드는 비례 이론을 **원론** 5권에 넣을 계획이었기 때문이다. 그러나 유클리드가 자신의 증명법을 개발한 것은 비례식을 이용한 증명법을 통해서임이 확실하다. 그는 비례 이론을 이용한 방법을 **원론** 1권의 내용만을 바탕으로 하는 방법으로 바꾸기 위해서 이와 같은 독창적인 작도와 증명을 생각해 내었다. 이는 참으로 놀라운 능력이다. 쇼펜하우어의 무지한 혹평에도 불구하고 감탄하지 않을 수 없다.

앞장에 제시된 유클리드의 피타고라스 정리 증명에 대한 분석으로부터 알 수 있듯이 유클리드는 새로운 증명법의 창안과정에서 불가피하게 제5공준을 도입하게 된 것이다.

넷째, 결국 피타고라스 정리에 대한 증명 과정 그 자체가 가설에 대한 가장 강력한 논거라고 볼 수 있다.

4. 맺음말

유클리드 **원론**에서 피타고라스 정리는 어떻게 증명되는가? 유클리드 제5공준의 기원에 관

한 이상의 논의는 이 질문으로부터 시작하여 그에 대한 해답을 찾기 위한 증명의 분석과 그 과정에서 생성된 하나의 가설에 관한 논의이다. 유클리드 **원론**에서 제5공준이 증명 과정에 사용된 최초의 명제는 1권의 명제 29이며, 피타고라스 정리는 1권의 47번째 명제로서 1권에서 제5공준이 사용된 마지막 명제이다[6]. 그럼에도 불구하고 제5공준의 기원을 피타고라스 정리에서 찾는 이유는 그것이 다른 명제가 아닌 피타고라스 정리이기 때문이며, **원론**에 제시된 명제들의 배열 순서와 그것들이 실제로 생성된 순서가 일치한다고 볼만한 근거가 없기 때문이기도 하다.

제5공준의 기원을 사실로서 기술한 역사적 기록이 발견되지 않는 한 본 고의 논의는 어디까지나 가설에 불과하다. 그렇다면 이러한 가설은 수학 교육적으로 어떤 의미를 지니는가? 수학적 개념의 교수-학습과정에서 흔히 제기되는 질문들 중 하나는 이 개념이 언제 어떻게 누구에 의해 왜 만들어졌을까? 하는 것이다. 이는 학습이 지식의 단순기억이나 암송이 아니고 교수가 교과내용의 기계적 재진술이나 주입이 아니라는 측면에서 학생과 교사 모두에게 중요한 질문이다. 이 질문에 답하는 것 즉, 학교수학에 등장하는 각 수학적 개념에 대하여 그 발생의 기원과 맥락을 탐색하여 이해하거나 필요한 경우 직접 발견하고 재구성해 보는 것은 교사에게는 교수-학습 방법과 절차의 고안에 직접적인 도움을 주고 학생에게는 결과로서의 지식이 아닌 생성과정에 있는 지식으로서의 수학을 경험하는 기회를 제공해 줄 것이다. 본 고의 논의는 이에 대한 하나의 본보기가 될 것이라 생각된다.

참고 문헌

1. 김용운 · 김용국, **수학사대전**, 우성문화사, 1992.
2. 이종우, **기하학의 역사적 배경과 발달**, 경문사, 1998.
3. 최영기, "중학교 수학에서 평행공리의 의미," **대한수학교육학회지 학교수학** 제 1 권 제 1 호(1999), 7-18.
4. Artmann, B., *Euclid - The Creation of Mathematics,* Springer, 1999.
5. Barker, S.F./이종권 역, **수리철학**, 종로서적, 1983.
6. Buchanan, H.E., "The development of elementary geometry," *Mathematics News Letter* 3(5), 1929.
7. Dobbs, D.E., "A single instance of the Pythagorean theorem implies the parallel postulate," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 33(4), 2002.
8. Eves, H.W./이우영 · 신항균 역, **수학사**, 경문사, 1999.

6) 사실 **원론** 1권에서 제5공준이 사용된 마지막 명제는 명제 48이다. 그러나 명제 48은 피타고라스 정리의 역 명제이므로, 피타고라스 정리(명제 47)를 1권에서 제5공준이 사용된 마지막 명제라고 보아도 무방할 것이다.

9. Eves, H.W./허민 · 오혜영 역, **수학의 기초와 기본 개념**, 경문사, 2001.
10. Gould, S.H., "Origins and Development of Concepts of Geometry," in *Insight into modern mathematics*, The National Council of Teachers of Mathematics, 1957.
11. Heath, T.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements* Vol. 1, Dover Publications, Inc, 1956.
12. Kline, M./박세희 역, **수학의 확실성**, 민음사, 1986.
13. Mlodinow, L., *Euclid's Window*, The Free Press, 2001.
14. Lewis, F.P., "History of the parallel postulate," *American Mathematical Monthly* 27(1), MAA, 1920.
15. Polya, G./우정호 역, **어떻게 문제를 풀 것인가**, 천재교육, 1986.
16. ________, *Patterns of Plausible Inference*, Princeton University Press, 1968.
17. Sanders, S.T., "Euclid and infinity," *Mathematics News Letter* 4(7), MAA, 1930.
18. Shene, C.K., "The triangle area formula implies the parallel postulate," *Mathematics Magazine* 45(5), MAA, 1972.
19. Tong, J.C., "The Pythagorean theorem and the Euclidean parallel postulate," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 32(2), Taylor and Francis Ltd, 2001.

부 록

[명제 41 증명]

□ABCD=2△ABC(명제 34) =2△EBC(명제 37)이다.

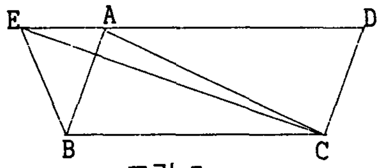


그림 5

[명제 37 증명]

△ABC=½□EBCA(명제 34)=½□DBCF(명제 35) =△DBC(명제 34)이다.

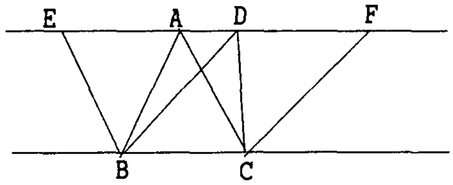


그림 6

[명제 31 증명]

직선 l과 그 밖의 한 점 A가 주어져 있다고 하자. l 위의 임의의 점 D와 A를 지나는 직선을 그린 후 ∠ABC와 크기가 같도록 ∠DAB를 작도하면, 반직선 AD를 연장한 직선은 직선 l과 평행하다(명제 27).

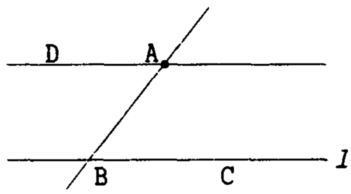


그림 7

[명제 27 증명]

∠ABC=∠BCD이고, 두 직선이 한 점 E에서 만난다(평행하지 않다)고 가정하자. 그러면 ∠ABC는 △BCE의 한 외각이 되므로 **원론** 제1권 명제 16에 의해 ∠ABC > ∠BCD이어야 한다. 그러나 이것은 ∠ABC=∠BCD이라는 가정에 모순이다. 따라서 두 직선은 평행하다.

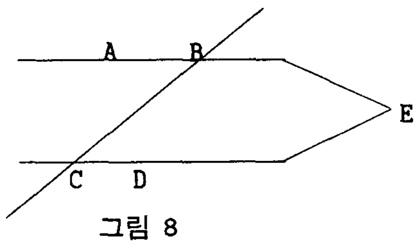


그림 8

[명제 16 증명]

점 E를 △ABC의 한 변 AC의 중점이라 하고, BE의 연장선 위에 점 F를 $\overline{BE}=\overline{EF}$가 성립하도록 잡자. 그러면 ∠ACD > ∠FCE이고, ∠FCE=∠BAC이다. 따라서 ∠ACD > ∠BAC이다.

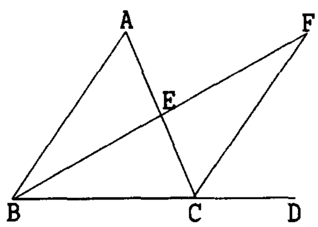


그림 9