KJHM Vol. 16, No. 2, 2003, 43-54

헤론 공식에 대한 교수학적 분석 및 확장

경상대학교 수학교육과 **한인기**[1]

Abstract

In this article we study various proofs of Heron's formula, extract some didactical ideas from these proofs, and didactically enlarge Heron's formula. In this paper we in detail introduce five different proofs from various articles and textbooks, and suggest our proof of Heron's formula. Enlarging this proof we are able to prove Brahmagupta's formula and generalized convex quadrangle's area formula.

0. 서론

수학사를 보면, 다양한 도형의 넓이를 구하는 방법에 많은 관심을 가져왔음을 쉽게 알 수 있다. 삼각형은 평면에서 기본 도형의 하나로, 다른 도형들을 구성하는 요소가 되기도 한다. 현행 중·고등학교 수학과 교육과정을 보면, 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴, 원, 부채꼴 등의 넓이를 구하는 방법 및 공식이 소개되어 있으며, 그 밖의 도형들은 보통 삼각형으로 분할하여 넓이를 구하게 된다.

삼각형의 넓이를 구하는 방법은 한 변과 그 변에 그은 높이를 이용하는 경우, 두 변과 그 끼인각의 사인값을 이용하는 경우, 세 꼭지점의 좌표를 이용하는 경우, 세 변의 길이를 이용하는 경우 등으로 나누어 생각할 수 있다. 이때, 세 변의 길이를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 방법이 헤론 공식이다. 헤론 공식은 '삼각형 ABC에서 변의 길이를 a, b, c라 할 때, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$이다.'라고 표현할 수 있다.

헤론은 고대 그리스의 수학자로, 서기 60년경에 알렉산드리아에서 활동했다. 그의 대표적인 저작으로는 **측정론**을 꼽을 수 있으며, **공학**, **기체 역학**, **조준의** 등의 저작을 남겼다. **측정론**(Metrica)은 제 1 권 넓이의 측정, 제 2 권 부피의 측정, 제 3 권 도형의 분할 등의 3권으로

1) 저자는 경상대학교 교육연구원 중등교육연구센터 연구원임.

구성되며, 헤론 공식은 **측정론** 제 1 권에 증명과 함께 소개되어 있다.

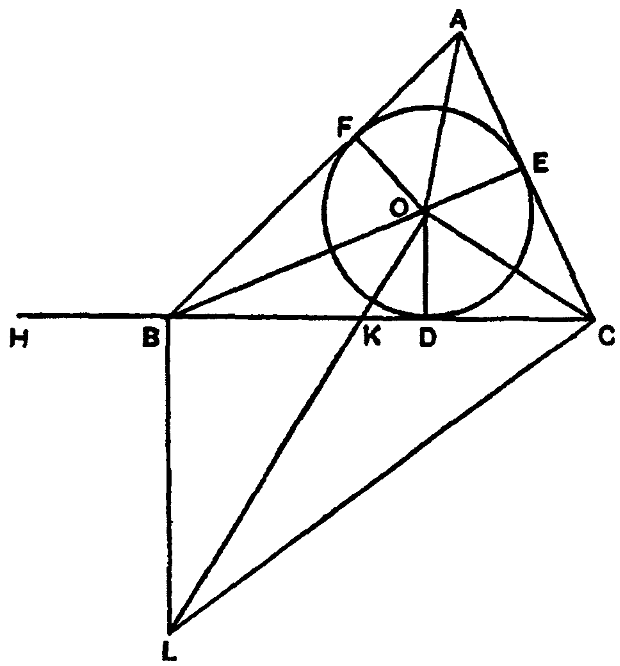
본 연구에서는 헤론 공식에 대한 다양한 증명 방법 및 특징들을 살펴보고, 헤론 공식을 교수학적으로 확장하여 내접 볼록사각형의 넓이를 구하는 브라마굽타의 공식, 일반화된 볼록사각형의 넓이 공식의 증명을 유도하고, 교수-학습 과정에서 교사의 교수학적 의사결정을 위한 몇몇 의미 있는 시사점을 도출할 것이다.

1. 헤론 공식에 대한 다양한 증명들

헤론의 **측정론** 제 1 권에 헤론 공식에 대한 다음과 같은 증명이 제시되어 있다[9, pp. 322-323].

삼각형 ABC의 변의 길이가 주어졌다고 하자. 원 DEF를 내접시키고, O를 중심이라 하자. 이때, AO, BO, CO, DO, EO, FO를 연결하자(그림 1). 그러면 다음이 성립한다.

$$BC \cdot OD = 2\triangle BOC, \quad CA \cdot OE = 2\triangle COA, \quad AB \cdot OF = 2\triangle AOB$$



<그림 1>

이들을 서로 더하고, p를 둘레라 하면, $p \cdot OD = 2\triangle ABC$이다. CB를 H쪽으로 연장하여, BH=AF가 되도록 하자. 그러면 AE=AF, BF=BD, CE=CD이므로, CH=½p=s이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$CH \cdot OD = \triangle ABC, \quad (\triangle ABC)^2 = CH^2 \cdot OD^2$$

OC와 직각을 이루며, BC와 K에서 만나도록 OL을 작도하자. 이때, L은 BL이 BC와 직각을 이루도록 잡는다. 그리고 CL을 연결하자. 그러면 각 COL과 CBL은 모두 직각이므로, COBL은 원에 내접하는 사각형이다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$\angle COB + \angle CLB = 2R$$

AO, BO, CO가 점 O를 둘러싸는 각들을 각각 이등분하고, 각 COB와 AOF는 함께 각 AOC와 BOF에 같고, 네 각의 합이 4R이므로, $\angle COB + \angle AOF = 2R$이다. 결국, $\angle AOF = \angle CLB$이다. 그러므로 직각삼각형 AOF와 CLB는 닮았고, 이로부터 다음이 성립한다.

$$BC : BL = AF : FO = BH : OD,$$

$$CB : BH = BL : OD = BK : KD$$

한편, $CH : HB = BD : DK$가 성립하고, 이들로부터 다음이 성립한다.

$$CH^2 : CH \cdot HB = BD \cdot DC : CD \cdot DK$$

$$= BD \cdot DC : OD^2 \text{ (각 COK가 직각이므로)}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$(\triangle ABC)^2 = CH^2 \cdot OD^2 \text{ (위에서부터)}$$

$$= CH \cdot HB \cdot BD \cdot DC$$

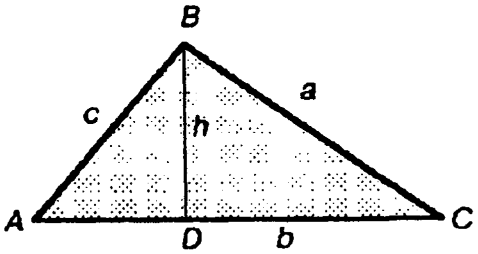
$$= s(s-a)(s-b)(s-c) \ \square$$

이 방법은 헤론에 의해 제시된 증명이라는 점에서 의의를 둘 수 있지만, 증명 방법 자체는 쉽지 않다. 이 방법에서는 <그림 1>에서 보는 바와 같이, AO, BO, CO, EO, … 등과 같은 많은 보조선들, 내접원의 성질, 원에 내접하는 사각형의 성질, 삼각형의 닮음 등과 다양한 개념들이 사용되었다. 한 가지 주목할 것은 삼각함수의 개념이 사용되지 않은 증명으로, 닮음을 이용하여 기하학적 성질들을 대수적으로 표현하였다.

다른 증명 방법으로, 피타고라스 정리를 활용한 증명 방법을 Gusev V.A.의 교과서에 제시된 방법을 중심으로 살펴보자[15, pp. 65-66].

<그림 2>와 같이, 꼭지점 B에서 수선을 그어, $BD = h$라 하면, $\triangle ABD$와 $\triangle BCD$는 직각삼각형이 된다. 이제, 높이 h를 구하자. 이때, BD가 두 직각삼각형 $\triangle ABD$와 $\triangle BCD$의 공통 밑변이라는 것에 주목하여, 두 삼각형에 대해 피타고라스 정리를 사용하면, BD의 길이를 구할 수 있다. 우선, $CD = x$라 하면, $DA = a - x$이 된다.

피타고라스 정리에 의해 $h^2 = c^2 - (b-x)^2$, $h^2 = a^2 - x^2$이므로, 이로부터 $a^2 - x^2 = c^2 - (b-x)^2$, $x = (a^2 + b^2 - c^2)/2b$을 얻는다.



<그림 2>

얻어진 x값을 $h^2=a^2-x^2$에 대입하면, 다음을 얻는다.

$$h^2=a^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2=\left(a+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)\left(a-\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)$$

$$=\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a}\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}=\frac{(a+b)^2-c^2}{2a}\cdot\frac{c^2-(a+b)^2}{2a}$$

$$=\frac{1}{4a^2}(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)$$

한편, $a+b+c=2s$, $a+b-c=2s-2c$, $a-b+c=2s-2b$, $b+c-a=2s-2a$이므로, 다음이 성립한다.

$$h^2=\frac{1}{4a^2}\cdot 2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$$

그러므로 $h=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$이고, 삼각형의 넓이 공식에 의해 다음을 얻는다.

$$S=\frac{1}{2}ah=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\ \square$$

이 증명 방법은 헤론 공식의 증명을 위해 피타고라스 정리와 적절한 식의 변형만을 이용하였다는 점에서 흥미롭다. 이 증명 방법을 자세히 살펴보면 다음과 같다.

(1) CD$=x$라 놓고, 직각삼각형인 △ABD, △BCD에 피타고라스 정리를 사용하여 x를 변의 길이인 a, b, c로 나타내고,

(2) △BCD에 피타고라스 정리를 사용하여 높이인 h를 a, b, c로 나타내고,

(3) 삼각형의 넓이 공식 $S=½ah$를 이용하여 S를 a, b, c로 나타냈다.

이 증명에서 교수학적으로 주목해야 할 것은 식의 변형이다. 주어진 식을 원하는 형태로 변형시키는 능력은 대수교육에서 특히 강조하여 육성해야 하며, 이러한 측면에서 소개된 증

명 방법은 학생들에게 식의 변형에 관련된 흥미로운 경험을 제공할 것으로 기대된다. 이와 유사한 증명 방법은 몇몇 교과서와 교과용 참고 도서에서 찾아볼 수 있다[11, 13, 16].

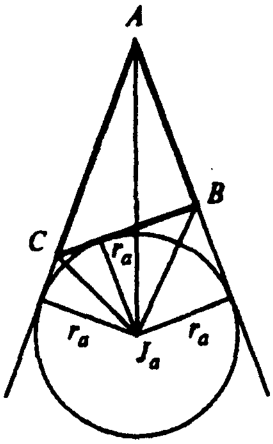
다른 증명 방법으로, 내접원, 방심원, 그리고 닮음을 이용한 방법을 살펴보자[17, pp. 250-251].

J_a를 변 BC에 접하는 방심이라 하자(그림 3a). 삼각형 ABJ_a, BCJ_a, CAJ_a의 꼭지점 J_a에서 각각 높이를 긋고, 그 길이를 r_a라 하자. 이때, 다음을 얻을 수 있다.

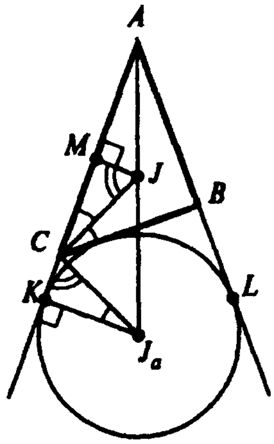
$$S_{ABC} = S_{ABJ_a} + S_{ACJ_a} - S_{ABJ_a}$$

$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{b+c-a}{2}r_a = (s-a)r_a$$

이제, 내접원의 반지름 r과 r_a의 관계를 나타내는 다른 식을 하나 유도하자. J를 내접원의 중심, M을 내접원과 AC의 접점, K를 방심원과 AC의 연장선과의 접점이라 하자(그림 3b). 선분 CM과 CK의 길이를 생각하면, $CM=s-c$, $CK=s-b$이 된다.



<그림 3a>



<그림 3b>

CK를 어떻게 구할 수 있는가를 살펴보자. $CK+BL=BC=a$임을 알고 있다. 그러므로 $AK+AL=AC+AB+BC=2s$가 된다. 그리고 $AK=AL$이다. 결국, $AK=s$, $CK=AK-AC=s-b$가 성립한다.

이제, 두 직각삼각형 CJM과 CJ_aK를 보자. 첫 번째 삼각형에서 꼭지점 C에서의 각은 CJ가 각 C의 이등분선이므로, ½C와 같고, 꼭지점 J에서의 각은 90°−½C이 된다. 삼각형 CJ_aK에서 꼭지점 C에서의 각은 각 KCB의 절반과 같다. 그러므로 ½(180°−C)=90°−½C가 된다.

이처럼, 직각삼각형 CJM과 J_aCK는 꼭지점 J와 C에서의 각들이 서로 같으므로, 닮음이다. 이 닮음으로부터, 다음이 성립한다.

$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MJ}}=\frac{\mathrm{KJ_a}}{\mathrm{CK}},\quad \frac{s-c}{r}=\frac{r_a}{s-b},\quad rr_a=(s-b)(s-c)$$

다음 세 등식을 보자.

$$S=sr,\quad S=(s-a)r_a,\quad rr_a=(s-b)(s-c)$$

처음 두 등식을 서로 곱하고, rr_a 대신에 세 번째 등식을 대입하면 다음을 얻는다.

$$S^2=s(s-a)rr_a=s(s-a)(s-b)(s-c)\ \square$$

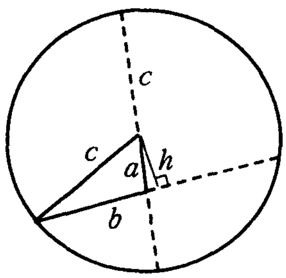
이 방법은 삼각형의 내접원과 방심원의 성질을 이용한 흥미로운 기하학적 증명 방법이라 할 수 있다. 특히, 증명 과정에는 내접원의 반지름과 삼각형의 넓이, 방접원의 반지름과 삼각형의 넓이, 내접원의 반지름과 방접원의 반지름 사이의 관계 등에 관련된 흥미로운 수학적 사실들이 포함되어 있다.

이제, 원의 성질을 이용한 헤론 공식의 증명을 살펴보자[10, p. 120]. 이 증명은 피타고라스 정리와 원에 대해 잘 알려진 다음 두 성질에 근거한다.

성질 1. 원에서 두 현이 만나면, 한 현의 두 선분의 길이 곱은 다른 현의 두 선분의 길이 곱과 같다.

성질 2. 원의 중심을 지나고 현과 직교하는 직선은 현을 이등분한다.

삼각형의 가장 긴 변의 길이를 c라 하고, 이 변의 한 끝점을 중심으로 반지름이 c인 원을 작도하자. 그리고, 나머지 두 변을 연장하여 원과 만나도록 하자(그림 4).



<그림 4>

길이가 a인 변의 연장선으로 만들어진 현의 선분은 각각 $c+a$, $c-a$가 된다. 한편, 길이가 b인 선분을 원과 만날 때까지 연장한 선분의 길이를 x라 하면, 성질 1에 의해, $bx=(c+a)(c-a)$이다. 한편, y는 길이가 b인 변을 포함하는 현의 중점이라 하면, $y=\frac{1}{2}(b+x)$가 성립한다.

이제, 원의 중심에서 삼각형에 높이를 긋자. 그러면, 성질 2에 의해 이 높이는 길이가 $b+x$인 현을 이등분한다. 피타고라스 정리에 의해, $h=\sqrt{c^2-y^2}$이 된다.

이제, 삼각형의 넓이 $S=\frac{1}{2}bh$에 $h=\sqrt{c^2-y^2}$, $y=\frac{1}{2}(b+x)$, $x=(c^2-a^2)/b$을 대입하면, 헤론 공식을 얻게 된다. □

이 방법에 필요한 작도인 <그림 4>는 비정형적인 많은 보조선을 포함하고 있지만, 위의 성질을 삼각형의 넓이 공식을 유도한다는데 사용한다는 것, 식의 연립 및 적절한 변형의 기회를 제공한다는 측면에서 의의를 찾아볼 수 있다.

이제, 우리 나라의 고등학교 수학교과서에 제시된 증명 방법을 살펴보자. 우리 나라의 수학 교과서에서는 (1) 변의 길이가 a와 c이고 끼인각의 크기가 α인 $\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{1}{2}ac\sin\alpha$, (2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, (3) 코사인 제2법칙 등을 사용한 증명 방법이 소개되고 있다. 현행 7차 교육과정에 따른 한 교과서에 제시된 증명 방법을 자세히 살펴보자[7, p. 185].

넓이를 구하기 위하여, 먼저 $\sin A$를 구하여 보자. $\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)$에 코사인 제2법칙을 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\sin^2 A&=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\&=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\\&=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}\end{aligned}$$

여기서 $a+b+c=2s$이므로 $b+c-a=2(s-a)$, $a-b+c=2(s-b)$, $a+b-c=2(s-c)$이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$\sin^2 A=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

그런데 $\sin A>0$이므로, $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$이고 다음이 성립한다.

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\square$$

권영한[1]에 의하면, 이 방법은 피보나치(Fibonacci)가 고안한 증명 방법이라고 하며, 유사한 증명 방법은 국내외의 다른 교과서들[2, 3, 4, 5, 6, 12, 14]에서도 찾아볼 수 있다. 기술한 증명 방법은 삼각함수에 바탕을 두고 있다는 점, 그리고 대수식의 변형 등을 특징으로 들 수 있다.

이 증명 방법이 살펴본 다른 증명 방법들과 구별되는 것은, 헤론 공식과 네 변의 길이를 이용하여 내접사각형의 넓이를 구하는 브라마굽타의 공식을 쉽게 관련시킬 수 있다는 것, 즉 교과 내용의 교수학적 확장이 용이한 증명 방법이라는 점이다.

2. 헤론 공식의 교수학적 확장

헤론 공식을 교수학적으로 확장시켜보자. 헤론 공식만을 고립적이고 단편적으로 고찰하는 것이 아니라, 헤론 공식을 바탕으로 교수학적으로 의미 있는 다른 내용으로 확장시키는 한 가지 방법을 살펴보자.

삼각형에서 헤론의 공식에 대한 사각형의 유추로 한인기[8]는 내접 볼록사각형에 대한 브라마굽타의 공식을 소개하였다. 브라마굽타 공식은 '변의 길이를 a, b, c, d, $s=½(a+b+c+d)$라 하면, 원에 내접하는 볼록사각형의 넓이 S는 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$'라는 것이다.

삼각형과 볼록사각형의 유추를 통해, 헤론 공식을 브라마굽타의 공식으로 확장시킬 때, 주목해야 하는 것들 중의 하나가 그러한 교과 내용의 교수학적 확장에 적합한 증명 방법을 찾는 일이다. 가령, 유추를 통해 헤론 공식에서 브라마굽타의 공식을 추측했다고 하자. 추측된 브라마굽타 공식은 증명을 통해 확인해야 하는데, 헤론 공식의 어떤 증명 방법을 확장하여 브라마굽타 공식을 증명할 수 있는가는 중요한 교수학적 문제가 된다. 헤론 공식 자체의 유추뿐만 아니라, 유추된 명제의 증명이 병행되어야만 교수학적으로 의미심장한 교과 내용의 교수학적 확장이 될 수 있다.

본 연구에서는 살펴본 증명 방법들 중에서 브라마굽타 공식의 증명에 적합한 삼각함수를 이용한 증명 방법을 제시하고, 이것을 확장하여 브라마굽타의 공식을 증명할 것이다. 증명 방법의 확장 과정을 명료하게 나타내기 위해, 헤론 공식의 증명 방법과 브라마굽타 공식의 증명 방법을 두 줄로 기술하기로 하자.

헤론 공식	브라마굽타 공식
(1) 삼각형의 넓이를 사인값을 이용하여 나타내기(그림 5). $S = ½ac\sin\alpha$	(1) 사각형의 넓이를 사인값을 이용하여 나타내기(그림 6). $S = ½ad\sin\alpha + ½bc\sin\beta$ $= ½ad\sin\alpha + ½bc\sin(180^\circ - \alpha)$ $= ½ad\sin\alpha + ½bc\sin\alpha$
(2) 항등식 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$을 이용하기 위해, (1)에서 얻어진 등식을 적절히 변형하기. $2S = ac\sin\alpha$ $4S^2 = a^2c^2\sin^2\alpha$	(2) 항등식 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$을 이용하기 위해, (1)에서 얻어진 등식을 적절히 변형하기 $2S = ad\sin\alpha + bc\sin\alpha$ $4S^2 = (ad+bc)^2\sin^2\alpha$
(3) 코사인 제 2공식을 이용하여 $\cos\alpha$를 a, b, c를 이용하여 나타내기	(3) 코사인 제 2공식을 이용하여 $\cos\alpha$를 a, b, c, d를 이용하여 나타내기

$$a^2+c^2-b^2 = 2ac\cos\alpha$$

(4) 삼각 항등식 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$을 이용하기 위해, (3)에서 얻어진 등식을 적절히 변형하기

$$(a^2+c^2-b^2)^2 = 4a^2c^2\cos^2\alpha$$

(5) (2)와 (4)에서 얻어진 등식을 서로 더하여 식을 원하는 형태로 변형하기

$$16S^2+(a^2+c^2-b^2)^2 = 4a^2c^2$$
$$16S^2 = 4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2$$
$$16S^2 = [(2ac-(a^2+c^2-b^2)]\times[(2ac+(a^2+c^2-b^2)] = [b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]$$

(6) 식을 적당히 인수분해하기

$$S^2 = \frac{(b-a+c)}{2}\cdot\frac{(b+a-c)}{2}\times\frac{(a+c-b)}{2}\cdot\frac{(a+c+b)}{2}$$
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\overline{BD}^2 = a^2+d^2-2ad\cos\alpha$$
$$\overline{BD}^2 = b^2+c^2-2bc\cos\beta$$
$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha = b^2+c^2-2bc\cos\beta = b^2+c^2+2bc\cos\alpha$$
$$a^2+d^2-b^2-c^2 = 2(ad+bc)\cos\alpha$$

(4) 삼각 항등식 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$을 이용하기 위해, (3)에서 얻어진 등식을 적절히 변형하기

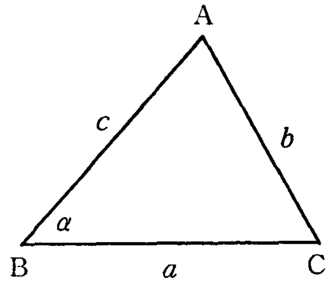
$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 = 4(ad+bc)^2\cos^2\alpha$$

(5) (2)와 (4)에서 얻어진 등식을 서로 더하여 식을 원하는 형태로 변형하기

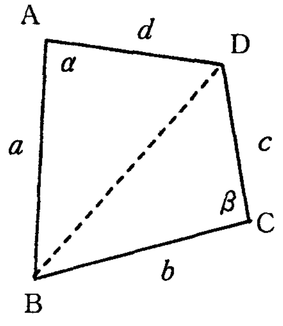
$$16S^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 = 4(ad+bc)^2$$
$$16S^2 = 4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 = [2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)]\times[2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)] = [(b+c)^2-(a-d)^2]\times[(a+d)^2-(b-c)^2]$$

(6) 식을 적당히 인수분해하기

$$S^2 = \frac{(b+c-a+d)}{2}\cdot\frac{(b+c+a-d)}{2}\times\frac{(a+d-b+c)}{2}\cdot\frac{(a+d+b-c)}{2}$$
$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



<그림 5>



<그림 6>

살펴본 바와 같이, 헤론 공식에 대한 증명 방법을 확장시켜 브라마굽타의 공식을 유도할 수 있다. 이때, 한 가지 주목할 것은 교수-학습 과정에서 교사의 교수학적 선택에 관한 문제이다. 앞에서 헤론 공식에 대한 몇 가지 증명 방법을 기술하였는데, 다양한 증명 방법들 중에서 교사가 어떤 증명 방법을 선택하여 학생들에게 제시할 것인가는 교수-학습 과정에서 중요한 교수학적 문제가 된다. 이 물음에 대한 대답을 여러 가지 측면에서 모색할 수 있지만, 본 연구에서 제시한 헤론 공식의 증명 과정을 브라마굽타 공식의 증명으로 확장시키는 것은 교수-학습 과정에서 교사의 교수학적 선택의 한 가지 방법이 될 수 있을 것이다.

한편, 살펴본 증명 방법은 일반화된 볼록사각형의 넓이를 구하는 다음 공식으로 확장될 수 있다. 변의 길이를 a, b, c, d, $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, 마주보는 두 각을 α, β라 하면, 임의의 볼록사각형 ABCD의 넓이 S는 다음과 같다.

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

볼록사각형에 대한 증명을 헤론 공식의 증명을 확장하여 기술하여 보자.

(1) 도형(볼록사각형 ABCD)의 넓이를 사인값을 이용하여 나타내기.
<그림 6>의 $\triangle$ABD와 $\triangle$BCD에서 $S=\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta$.

(2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$을 이용하기 위해, (1)에서 얻어진 등식을 변형하기

$$2S=ad\sin\alpha+bc\sin\beta$$

$$4S^2=(ad\sin\alpha+bc\sin\beta)^2=a^2d^2\sin^2\alpha+b^2c^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta$$

(3) 코사인 제 2공식을 이용하여 $\cos\alpha$, $\cos\beta$를 a, b, c, d로 나타내기
$\triangle$ABD와 $\triangle$BCD에 코사인 제 2 공식을 사용하면 다음을 얻는다.

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha,\quad BD^2=b^2+c^2-2bc\cos\beta$$

이로부터, $a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\beta$, 즉 다음을 얻는다.

$$a^2+d^2-b^2-c^2=2(ad\cos\alpha-bc\cos\beta)$$

(4) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$을 이용하기 위해, (3)에서 얻어진 등식을 변형하기

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=4(ad\cos\alpha-bc\cos\beta)^2$$

$$=4a^2d^2\cos^2\alpha+4b^2c^2\cos^2\beta+8abcd\sin\alpha\sin\beta-8abcd\cos\alpha\cos\beta$$

(5) (2)와 (4)에서 얻어진 등식을 서로 더하여 식을 원하는 형태로 변형하기

$$16S^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=4a^2d^2+4b^2c^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-8abcd(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=4a^2d^2+4b^2c^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-8abcd\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$= 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right)$$

$$= 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 8abcd - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= [2ad + 2bc - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)][2ad + 2bc + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)] - 16abcd \cdot \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= [(b+c)^2 - (a-d)^2][(a+d)^2 - (b-c)^2] - 16abcd \cdot \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(6) 식을 적당히 인수분해하기

$$S^2 = \frac{(b+c-a+d)}{2} \cdot \frac{(b+c+a-d)}{2} \cdot \frac{(a+d-b+c)}{2} \cdot \frac{(a+d+b-c)}{2} - abcd \cdot \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \square$$

살펴본 바와 같이, 헤론 공식을 교수학적으로 확장하여 내접 볼록사각형의 넓이를 구하는 브라마굽타의 공식, 일반화된 볼록사각형의 넓이 공식에 대한 증명을 얻을 수 있었다. 이러한 교수학적 확장은 교수-학습 과정에서 교사의 교수학적 의사결정에 중요한 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

3. 결론

본 연구는 헤론 공식에 대한 다양한 증명 방법 및 특징들을 살펴보고, 헤론 공식을 교수학적으로 확장하여 내접 볼록사각형의 넓이를 구하는 브라마굽타의 공식, 일반화된 볼록사각형의 넓이 공식의 증명을 유도하고, 교수-학습 과정에서 교사의 교수학적 의사결정을 위한 몇몇 의미있는 시사점을 도출하기 위한 연구이다.

헤론 공식의 증명 방법으로는 헤론의 **측정론** 제1권에 제시된 증명, Gusev의 기하 교과서에 제시된 피타고라스 정리를 이용한 증명, Sharygin의 기하 교과서에 제시된 내접원과 방심원의 성질을 이용한 증명, 원의 성질을 이용한 증명, 우리 나라의 수학교과서에 제시된 삼각함수를 이용한 증명 방법 등의 5가지 서로 다른 증명 방법들을 소개하였으며, 각 증명 방법의 특징 및 교수학적 의의를 도출하였다.

본 연구에서는 헤론 공식의 교수학적 확장을 위한 증명 방법으로 삼각함수를 이용한 한

가지 증명 방법을 제시하였고, 이 증명 방법을 확장하여 브라마굽타 공식, 일반화된 볼록사각형 넓이 공식 등을 증명하였다. 특히, 본 연구에서는 증명 방법의 확장을 교사의 교수학적 선택에 관한 문제와 관련시켜 고찰하였다.

헤론 공식에 대한 다양한 증명 방법들 중에서 교사가 어떤 증명 방법을 선택하여 학생들에게 제시할 것인가는 교수-학습 과정에서 중요한 교수학적 문제가 되는데, 본 연구를 통해 제시된 헤론 공식의 증명 과정에 대한 브라마굽타 공식 증명으로의 확장은 교수-학습 과정에서 교사의 교수학적 선택의 한 가지 방법이 될 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 권영한, **재미있는 이야기 수학**, 전원문화사, 2000.
2. 박두일 · 신동선 · 김기현 · 박복현 · 안훈 · 소순영 · 송건수 · 김주석 · 이미선, **수학 10-나**, (주)교학사, 2002.
3. 박배훈 · 정창현 · 박상호 · 류성림 · 권기석 · 류익승, **공통수학**, (주)교학사, 1996.
4. 우정호 · 류희찬 · 문광호 · 박경미, **수학 10-나**, 대한교과서(주), 2002.
5. 임재훈 · 김진호 · 반용호 · 남승진 · 기우항 · 윤오영 · 조동석 · 오명성, **수학 10-나**, (주)두산, 2002.
6. 조승제, **공통수학**, 재능교육, 1996.
7. 최상기 · 이만근 · 이재실 · 백한미, **수학 10-나**, (주)고려출판, 2002.
8. 한인기, "인도 수학과 브라마굽타의 공식," **수학사랑** 25(2001), 수학사랑, 122-127.
9. Heath T., *A History of Greek Mathematics. Vol. II, From Aristarchus to Diophantus,* Dover Pub., Inc., NewYork, 1981.
10. Stover D.W., "Area of a triangle," *Mathematics Teacher* 83(2) (1990), NCTM, Virginia, 120.

<러시아어 참고 문헌>

11. Aleksandrov A.D., Verner A.L. & Pizik V.I., *기하학 8-9,* 교육출판사, 모스크바, 1991.
12. Andreev P.P. & Shyvakova. E.Z., *기하학,* 과학출판사, 모스크바, 1966.
13. Atanasyan L.S., Butuzov V.F., Kadomtsev S.B., Shestakov S.A. & Yudina I.I., *기하학: 8학년 교과서에 대한 심화 보조 참고서,* 교육출판사, 모스크바, 1996.
14. Bevz G.P., Bevz V.G. & Vladimirova N.G., *기하학 7-11학년,* 교육출판사, 모스크바, 1994.
15. Gusev V.A., *기하학-7 실험용 교과서,* 아반가르드 출판사, 모스크바, 1996.
16. Kiselev A.P. & Pibkin N.A., *기하학: 7-9학년 교과서,* Drofa, 모스크바, 1995.
17. Sharigin I.F., *기하학 7-9,* Drofa, 모스크바, 1997.