KJHM Vol. 16, No. 1, 2003, 25-44

대수의 탈산술화에 관한 고찰*

서울대학교 대학원 수학교육과 **김성준**

Abstract

In this paper, we deal with the 'dearithmetization' of algebra. Historically, the origin of algebra comes from arithmetic. Also school algebra is related to arithmetic in general. However, we have many difficulties in teaching school algebra, and there is many problems for students to learn algebra from elementary arithmetic knowledges. This paper supposed that the solution of these problem may be founded in the 'dearithmetization' of algebra. And we supposed that the 'dearithmetization' of algebra may be developed by three historical achievements - the completion of symbolic algebra, the principle of permanence of form, and the expansion of number concepts. In order to justify these supposition, we investigate Peacock's ideas, i.e. 'symbolic algebra', 'the principle of permanence of form', and consider how the integer is introduced in modern mathematics. And we analyze various textbooks, and investigate the 'dearithmetization' of school algebra which has been progressed in the three fields - symbolic algebra, the principle of permanence of form, and the expansion of number concepts.

0. 서론

대수는 기호적 대수 이전에 이미 디오판토스(Diophantus)를 경계로 해서 언어적 대수와 생략적 대수에서, 그리고 그리스의 기하적 대수를 통해 다양한 형태로 등장한다. 그러나 일반적으로 현대대수학의 출발점은 비에트(Viète)의 아이디어에서 시작한 기호적 대수로 볼 수 있으며, 따라서 식이나 연산이 일상언어에서부터 독립되어 기호적 언어로 표현되는 단계는 비에트의 기호적 대수에서 시작되었다고 볼 수 있다. 이러한 기호체계를 이용한 대수의 등장으로 인하여 대수적 사고 영역에서는 본격적인 구조적 사고로의 전환이 가능하게 되었으며, 이것은 17세기 이후 변수 개념과 함수 개념의 발달에 결정적인 역할을 하게 된다. 그러나 이러한 기호적 대수 역시 초기 단계에서는 '일반화된 산술'에 지나지 않았으며, 이것

* 이 논문은 2000-2002년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구 과제 지원에 의하여 연구되었음.

또한 수학자들간의 일관된 사용에 의해 받아들여졌을 뿐 수학적, 논리적 근거를 확보한 상태에서 사용된 것은 아니었다. 피콕(Peacock, 1791-1858)은 대수 기호 사용에 있어서 이러한 혼란스러운 시기에 등장하여 대수를 완전히 탈산술화(dearithmetization)시킴으로써 학문적인, 논리적인 기반을 마련한 인물이었다.

대수가 오랫동안 산술에서부터 벗어나지 못한 것은 물론 기호의 부재로 인하여 대수적인 구조적 사고와 일반화가 이루어지지 않았던 것이 가장 큰 이유이겠지만, 사실 그 가운데에는 수 개념의 확장이라는 또 다른 문제가 있었다. 다시 말해, 음수에 대한 논리적인 근거의 부족은 끊임없이 수학자들을 괴롭혔던 문제로, 대수 기호와 함께 이러한 음수의 수용 문제는 대수의 탈산술화에서 그 진행을 더디게 만들었으며, 비에트에 의해 등장한 기호적 대수 역시 음수가 수 영역으로 인정받을 때까지는 완전한 대수로 성장하는데 어느 정도 한계를 가지고 있었다.

이러한 상황에서 피콕은 산술과 구분되는 '산술대수'(arithmetical algebra)와 '기호대수'(symbolic algebra)를 제안함으로써 대수 기호와 산술을 분리시켜 놓았으며, 이러한 그의 생각은 한켈(Hankel, 1839-1873)에 이르러 음수 개념을 양(measurement)의 개념과 관련짓지 않고 순전히 형식적인 개념으로 간주하게 됨으로써 대수는 완전한 탈산술화에 이르게 된다. 이 과정에서 한켈은 양수 체계를 구성하는 여러 가지 원리를 그대로 유지하면서 음수 체계를 연구하였는데, 이것은 피콕이 기호대수로의 확장에서 제시한 '형식불역의 원리'(the principle of permanence of form)가 응용된 것으로, 이렇게 하여 얻어진 음수의 구조는 대수적으로 모순 없이 받아들여지게 되었다. 대수가 그리스 기하 이후 오랫동안 그 본연의 지위를 유지하지 못했던 것이 음수와 관련해서 산술의 조작적 사고에 묶여 있었기 때문이라면, 대수의 탈산술화 곧 구조 중심의 추상 대수가 출발한 것 역시 음수 개념의 확장과 연결되어 있다는 사실은 대수의 역사에서 흥미 있는 대목 가운데 하나이다. 이러한 사실은 대수적 구조의 역사적 발달 과정에서 점진적인 추상화 과정을 분석함으로써 발견할 수 있는 것으로, 이것은 구조의 본질이 문제의 구체적인 특성으로부터 이탈하면서, 곧 문제가 되고 있는 구체적인 대상에서부터 그 조작 규칙의 중요성을 인식하면서 기호적 대수가 이루어진 것과 같은 맥락에서 이해할 수 있을 것이다[9, p. 263].

이 글에서는 대수의 탈산술화와 관련해서 먼저 비에트에 의해 이루어진 기호적 대수와 피콕의 '기호대수'를 비교하면서, 기호적 대수의 완성을 대수의 탈산술화의 출발점으로 보고 있다. 이와 함께 우리는 기호적 대수에서 이루어진 대수적 구조의 발달을 계산 조작의 실재화(reification) 과정으로 보았으며, 이러한 관점에서 19세기에 이루어진 수 개념의 확장을 대수의 탈산술화와 관련해서 논의하고 있다. 그리고 이러한 기호적 대수의 완성과 수 개념의 확장에서 '형식불역의 원리'가 그 바탕에 놓여 있다는 점에 주목하였다. 따라서 이 글은 대수의 탈산술화에 있어서 기호적 대수의 완성, 형식불역의 원리, 수 개념의 확장 이 세 가지를 그 핵심으로 보았으며, 피콕의 아이디어를 중심으로 하여 '기호대수'와 '형식불역의 원리' 및 정수로의 확장에 대하여 살펴보았다. 이와 함께 대수의 탈산술화와 관련해서 기호적 대

수와 '형식불역의 원리', 수 개념의 확장이 학교수학에서 어떻게 진행되고 있는지를 교과서 분석을 통해서 살펴보았다.

1. 기호적 대수의 완성

(1) 비에트의 기호적 대수와 피콕의 '기호대수'

기호적 대수의 발달에서 결정적인 계기는 16세기 비에트의 기호법에 의해 마련되었다. 특히 그의 기호법은 미지수는 물론 상수까지 문자를 사용하여 나타냄으로써 기호적 대수의 역사에서 출발점에 놓여 있으며, 이러한 기호적 대수는 17세기 데카르트(Descartes) 이후 수학에서 모든 식이나 연산을 일상언어에서부터 독립된 기호적 언어로 표현함으로써, 수학적인 문제를 일반화하고 형식적인 방법으로 다루는 것을 가능하게 하였다. 그리고 그 결과 공식화된 해법을 통해 문제의 원리와 방법의 타당성에 대한 연역적 추론이 가능하게 되었다[9, p. 227].

그러나 이러한 비에트의 기호적 대수가 17세기 이후 수학에서 모든 수학자에 의해 받아들여진 것은 아니었다. 비에트의 기호법은 수학의 여러 분야에서 사용되었지만, 그 가운데 어떤 수학자들은 그것을 사용하는 것에 대해서 여전히 부정적이었으며 그 사용에도 반대하였다.[1] 이것은 물론 17세기에도 여전히 수학에서 기하의 영향력이 우세했음을 말해주는 것으로, 배로(Barrow)의 경우 "모든 수학은 기하의 범위 안에 포함되고 또 그 안에 제한되어야 한다"고 하였다.[2] 이와 함께 기호적 대수에 있어서 논리적 기반의 부재는 이러한 반박과 의심을 끊임없이 계속되게 하였다. 우리는 수학사에서 이러한 기호적 대수의 경우와 같이 과정에서 비롯되는 존재론적 본성이 내적 일관성이 갖추어지기 이전에 등장함으로써 문제가 되었던 것을 볼 수 있다. 그 예로 기호적 대수에서 등장한 변수는 실재화[3](reification)되기 어려운 개념으로, 내적 일관성의 문제를 안고 있었으며, 무엇보다 변수 개념은 기호적 대수에서 엄밀한 정의를 통해 설명될 수 없었기에, 이후 수학의 흐름에서 계속 문제가 되었다. 다시 말해 변수 개념을 사용하는 조작(과정에서 표현되는 존재론적 본성)과 실재화를 통해

---

1) 비에트의 대수 기호체계는 처음부터 쉽게 수용된 것은 아니었다. 오히려 많은 수학자의 반대에 부딪히면서 어려움을 겪었는데, [17, p. 78-81]에 따르면 홉스(Hobbes), 배로(Barrow), 뉴턴(Newton) 등이 대수에서 기호법의 사용에 부정적이었음을 알 수 있다.

2) 배로는 대수에 대하여, 물리학, 윤리학 또는 다른 자연과학이 수학에 속하지 않는 것과 마찬가지로 대수 역시 그렇다고 하면서, 대수는 오직 논리의 일부분이거나 논리 체계에 지나지 않는다고 하였다([17, p. 79] 재인용).

3) 실재화(구상화, reification)는 스파르드(Sfard)가 제시한 용어로, 수학의 역사에서 수학적 개념을 과정과 대상 사이에서 발달해 온 것으로 보고, 수학적 개념은 궁극적으로 과정에서 대상으로 진행된다고 보는 것이다. 따라서 기호적 대수의 완성이 쉽지 않았던 이유를 존재론적 본성과 내적 일관성 사이의 불일치로 보는 것은 이러한 실재화와 관련해서 생각해 볼 수 있을 것이다.

개념을 파악하려는 시도(대상으로 다루어지기 위해 요구되는 내적 일관성의 문제)는 변수를 받아들이기 힘든 개념으로 만들었다. 다소 극단적인 경우겠지만, 프레게(Frege, 1970)는 변수 개념을 이해하는 것이 불가능하게 되자 결국 그는 "'변수'라는 단어는 … 순수한 해석학에서 정당성을 확보할 수 없다"고 말함으로써 대수에 대한 아이디어 전체를 반대하기까지 하였다([19, p. 27] 재인용). 그러나 이러한 장애는 기호적 대수가 광범위하게 사용되는 것을 막지는 못했으며, 결국 대수에서 시작한 기호주의는 17세기 해석기하와 18세기 미적분학을 탄생시켰다. 이처럼 존재론적 본성에 대한 의심은 무엇보다 일관된 기호 사용과 함께 점차 해결되었다. 그리고 사실 18세기가 끝날 무렵의 수학자들은 충분히 대수 기호에 익숙해 있었고 그리고 더 이상의 어려움 없이 그것들을 사용하는 기술에도 익숙해지게 되었다.

한편 대수에서 비에트의 기호법이 제시된 이후, 이를 정당화하려는 시도가 여러 학자들을 통해 이루어졌는데, 그 대표적인 경우로 17세기 오트레드(Oughtred, 1648)를 들 수 있다. 그는 대수에서 다루는 기호법이 그 방법 측면에서 산술에서 다루는 것보다 그 과정과 결과 양측면에서 효율적이며, 대수에서도 기하와 같은 연역적인 정리가 존재할 수 있음을 다음 글을 통해 강조하였다.

> 이러한 기호 산술은 수치를 다루는 산술보다 분석에 있어서 보다 효율적이다. 수치를 다루는 산술에서는 숫자들이 사라져버리고 그 결과 연산의 흔적조차 남아있지 않게 된다. 그러나 기호 산술에서는 기호는 어떠한 변화에도 남아 있으며, 그리고 전체 과정에서 모든 단계를 볼 수 있을 뿐 아니라 다른 양과 관련된 유사한 질문에 대하여 그 답에 이르는 정리를 만들어낼 수도 있다([17, p. 80] 재인용).

비에트의 기호법에 대한 이러한 두 가지 반응에 대하여, 클라인(Kline, 1980)은 "비록 1750년경의 대수는 단단한 뿌리 없이 많은 가지만을 가진 채 성장한 나무였다 하더라도 … 그 무렵에는 대수를 사용하는데 있어서 망설였던 경향들이 극복되었다"([19, p. 27] 재인용)라는 말을 통해, 18세기 대수가 불완전한 가운데에서도 보편적인 과학으로 성장하고 있었음을 보여주고 있다.

그러나 19세기에 들어와서 수학자들은 존재론적 본성과 내적 일관성에 대한 의문을 다시 연구주제에 포함시키게 되었다. 1830년대와 1840년대에, 대수의 의미와 그 기호체계에 대한 논쟁은 영국의 유명한 수학자인 드 모르간(de Morgan)과 해밀턴(Hamilton)에 의해 다시 제기되었으며, 피콕은 이러한 논쟁과 함께 영국의 형식주의 사고 학파를 이끌고 있는 인물이었다. 그때까지, 대수는 보편적 산술 곧 수치적 연산을 지배하는 일반적인 규칙을 표현하는 학문으로 받아들여졌다. 따라서 기호와 기호적 조작에 대한 이러한 해석은 필연적으로 대수 법칙의 범위와 힘을 제한시켰으며, 완전한 대수의 탈산술화 역시 지연되고 있었다.

이러한 상황에서 피콕은 산술 연산에서 비롯되는 한계에서 대수가 벗어날 수 있도록 논리적 기반을 마련하고자 하였으며, 그는 '산술대수'와 '기호대수'를 구분하고, 이 과정에서 '형식불역의 원리'를 제시함으로써 기호적 대수를 완성시켰다. 무엇보다 피콕은 산술대수와 기

호대수를 제시함으로써, 대수가 독립적으로 연구 가능한 대상임을 보이고자 하였다. 카츠(Katz, 1993)는 산술대수와 기호대수의 특성을 분석하면서, 산술대수를 보편적인 대수 즉, 수 자체보다는 문자를 사용함으로써 음수에 대한 산술의 원리를 개발하는 수단으로 보았다. 그리고 산술대수에서는 연산이 이루어지기 위한 제약조건이 존재해야만 연산이 실제로 수행될 수 있는데 비해, 기호대수에서는 기호연산이 산술과 유사한 연산으로부터 유도되지만 산술대수처럼 더 이상 연산의 적용 범위를 제한하지 않는 것으로, 즉 어떤 제한 조건 없이 일반적으로 유효하고, 어떤 특별한 해석도 필요하지 않은 상태에서 산술에서 유도된 방식과 동일하게 연산이 진행된다([11, p. 4] 재인용)는 점을 강조하였다.

이처럼 기호대수는 산술의 연산을 사용하지만 산술에서처럼 특별한 해석을 필요로 하지 않았으며, 이러한 기호대수의 특징은 '형식불역의 원리'에 의해 보장되었다. 따라서 이제 대수 기호는 '형식'을 유지하기 위한 기본 전제에 따라 사용할 수 있게 되었으며, 이러한 기호적 대수의 완성은 대수의 탈산술화에서 중요한 역할을 하게 된다. 그리고 피콕이 이 과정에서 사용한 '형식불역의 원리'는 기호적 대수의 완성과 함께 이후 수 개념의 확장에서 음수를 형식적으로 도입하는데 있어서도 핵심적인 역할을 하게 된다.

(2) 학교수학에서 진행되는 기호적 대수의 과정

학교수학에서 문자의 도입은 7차 교육과정부터는 중학교 1학년에서 다루어지고 있다.[1] 중학교 1학년에서 대략적으로 문자가 도입되는 과정을 살펴보면, 학생들은 '집합' 단원에서 집합을 뜻하는 A, B 등과 원소를 의미하는 a, b, x 등의 문자를 만나게 된다. 그리고 정수와 유리수에서 교환법칙 $a+b=b+a$, 결합법칙 $a+(b+c)=(a+b)+c$ 등을 표현하기 위해 a, b, c 등의 문자를 사용하게 된다. 그러나 학생들이 본격적으로 문자를 다루게 되는 것은 '문자와 식' 단원을 통해서이다. 학생들은 구체적인 상황에서 문자를 사용하면 수에 관한 여러 가지 식을 하나의 식으로 표현할 수 있다는 이유(A 교과서) 및 문자를 사용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다는 학습목표(B, C, D 교과서)에 따라 문자의 사용을 학습하게 된다. 그러나 이러한 문자의 사용은 곧바로 식의 값을 구하는 과정으로 이어지게 되고, 이 과정은 학생들이 이후 문자의 사용에서 그 의미를 미지수로 제한해서 사용하는 문제를 낳게 된다. 또한 학생들은 다항식의 계산 등에서 x, y 등으로 제한된 문자를 다루게 되는데, 이러한 제한된 문자의 사용은 방정식과 함수까지 계속 이어지게 된다. 그리고 일반적으로 이 과정에서 미지수와 변수의 구분은 분명하게 이루어지지 않는다. 이러한 문제들은 학교수학에서 학생들이 기호적 대수를 받아들이는 과정에서 경험하는 근본적인 문제들이다.

1) 6차 교육과정에서는 초등학교 5학년 2학기에 x, y 문자가 관계, 대응표, 그래프 등에서 다루어진다. 그러나 7차 교육과정에서는 7-가 단계에서 문자가 처음으로 등장하는데, 우리는 그 문자들이 각각 다르게 해석될 수 있음에 유의해야 한다. 예를 들어, 집합에서 등장하는 문자 A, B, a, b, x는 임의의 대상을 뜻하는 것으로, 교환법칙 등에서 사용되는 a, b 등은 부정소(indeterminate)로 볼 수 있다. 그리고 방정식에서는 미지수로 문자가 사용되며, 함수의 경우 변수 개념으로 문자가 사용된다.

이와 함께 비에트의 기호적 대수의 특징을 수학에서 미지의 양뿐만 아니라 기지의 양에 대해서도 문자 표현을 가능하게 한 것으로 본다면, 학교수학에서 이러한 표현이 등장하는 것은 기호적 대수의 완성으로 볼 수 있을 것이다. 7차 교육과정에서는 일차방정식에서 그 풀이법을 소개하면서 $ax=b$라는 표현이 등장하는데(A, B, C, D), 여기에서 x는 미지의 양을, a, b는 기지의 양을 표현하는 문자로 볼 수 있을 것이다. 실제 학교수학에서 $ax=b$에 대한 해석은 대부분 x는 미지수로, 그리고 a, b는 상수로 불리어지거나 또는 별다른 명칭 없이 사용되는 것이 일반적이지만, 엄밀한 의미에서 a, b는 상수가 아닌 변수(정해지지 않은 상수의 의미를 갖는 변수)로 보아야 한다. 이러한 해석은 이후 학생들이 다양한 문자를 다루면서 어떤 문자를 변수로 보면서 문제를 풀어야 하는지를 결정하는데 중요한 역할을 하는 것으로, 학교수학에서 이러한 문자 해석이 원활하게 이루어지게 될 때 비로소 기호적 대수가 완성된다고 볼 수 있을 것이다. 다음은 중학교 1학년 함수 단원(7차 교육과정)에서 서로 다른 4개의 교과서에 제시된 유사한 유형의 문제들이다.

(A) 함수 $y=ax$의 그래프가 점(6, 3)을 지날 때, a의 값을 구하고 이 함수의 그래프를 그려라.

(B) 함수 $f(x)=ax$에 대하여 $f(3)=2$일 때, a의 값을 구하여라.

(C) 함수 $y=ax$의 그래프가 오른쪽 그림의 (1), (2)와 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(D) … 대략 $y=ax$로 표시할 때, a의 값은 □이다.

A, B, D 교과서의 경우 동일한 문제 유형에서 a의 값을 구하는 것으로 문제를 제시하고 있는데 비해, C 교과서에서는 '상수' a의 값을 구하라는 표현을 사용하고 있다. 물론 a의 값을 구한다고 할 때 그 값은 결국 상수가 되겠지만, 상수 a라는 표현은 자칫 $y=ax$에서 a를 상수로 보는 오류를 범할 수 있다는 점에서 그 표현의 문제를 신중하게 고려해야 할 것이다. 이와 함께 학교수학에서 학생들이 문자를 다루는 과정에서 x를 양수로 $-x$를 음수로 해석하려는 경향은, 수학사에서 비에트의 기호적 대수가 피콕의 '기호대수'에 의해 기호 사용의 범위가 정수까지 확장되는 과정에서 발생했던 어려움을 간접적으로 보여주는 것이다. 따라서 피콕의 기호대수를 기호적 대수의 완성으로 본다면 문자에서 그 부호는 보다 신중하게 다루어져야 한다. 이러한 맥락에서 피콕의 다음 지적은 학교수학에서 기호적 대수의 완성이 결코 쉽지 않다는 사실을 보여주는 것으로, 오늘날 학생들이 대수에서 특히 기호로 인하여 경험하는 어려움을 학생들의 상태와 관련해서 설명하고 있다.

> … 무엇보다, 이러한 원리에 대한 진정한 가정과 확립은 상당히 심각한 종류의 형이상학적인 어려움을 포함하는데, 이것은 학생들이 이러한 원리들을 받아들일 수 있을 만큼 수학적 훈련 체계에 익숙하지 못한 상태에서 (이러한 원리가) 그들에게 제시되기 때문이다([16, p. 10] 재인용).

2. 형식불역의 원리

(1) 피콕의 '형식불역의 원리'

버코프(Birkhoff, 1973)는 대수의 역사를 기술하면서 고전대수학과 현대대수학을 대비시키고 있다. 그에 따르면 현대대수학은 방정식론을 의미하는 고전대수학과 구분하기 위해 1930년대에 붙여진 이름이다. 1750년부터 1830년까지 오일러(Euler), 라그랑주(Lagrange), 가우스(Gauss) 등의 연구에 힘입어 고전대수학은 거의 지금과 같은 형태로 발전하였다. 그리고 현대대수학은 수학자들이 점차 방정식 이론으로부터 기호 대수의 비수치적 응용성(군, 벡터, 행렬 등)에 주의를 돌리기 시작하면서 고전대수학에서 벗어나기 시작했다[14, pp. 760-761].

노비(Novy, 1973)는 1770년부터 1870년까지의 대수학의 역사를 분석하면서 그 과정에서 오늘날의 대수를 이끌어 온 두 가지 주요한 영역에 주목하였다. 그것은 다름 아닌 방정식 이론과 함께 수 영역의 확장인데, 이러한 그의 견해는 버코프의 것과 유사한 것으로, 대수의 역사와 관련된 두 사람의 논의에서 우리는 대수의 탈산술화에 존재하는 두 단계의 도약을 생각해볼 수 있다. 우선 첫 번째 단계에서 핵심적인 역할을 한 것은 비에트에 의해 시작된 기호적 대수 곧 변수 개념으로, 이것은 피콕의 '기호대수'로 이어져 방정식 이론을 통해 고전대수학을 확립하는데 중요한 공헌을 하였다. 그리고 두 번째로 고전대수학에서 현대대수학으로 넘어 오는 경계에서 우리는 수 영역의 확장이라는 주제를 만나게 된다. 특히 이 가운데 음수를 수용하는 과정은 피콕이 '형식'을 강조한 맥락에서 이해할 수 있는 것으로, 이후 구체적인 접근에 따르지 않고 형식적인 음수 도입이 가능하게 되었다. 이러한 생각은 한켈에 이르러 보다 확실해졌으며, 피콕이 고전대수학에서 방정식 이론을 완성시키는데 결정적인 역할을 하였다면, 한켈은 음수를 형식적인 관점에서 받아들임으로써 피콕과 함께 현대대수학에서 그 출발점에 놓여 있다고 볼 수 있다. 그리고 이 두 단계의 도약에서 '형식불역의 원리'는 가장 핵심적인 원리로 사용되고 있다. 피콕에 의해 '형식불역의 원리'가 발생한 배경은 다음과 같다.

그는 19세기까지 진행된 대수 연구를 종합하는 과정에서, 대수의 기본 원리에 대한 연구가 그 활용에 비해 충분한 주목을 받지 못했다는 사실에 관심을 가지게 되었다. 사실 19세기에 들어와서 처음 50년간 수학자들은 어떤 분명한 정의도 없는 상태에서 실수와 복소수를 사용하고 있었다. 문자는 유리수의 성질을 암묵적으로 가정하면서 사용되었다. 그리고 유리수를 대신하는 다른 형태의 수에서 기존의 방법과 알고리즘은 아무런 모순 없이 사용되었으며, 대수의 기본 원리에 대한 의문은 제기되지 않았다. 19세기까지 대수와 해석학은 아무런 어려움 없이 전개되는 것처럼 보였다. 이러한 상황에서 피콕은 문자식과 기호의 연산에 정당화의 문제를 제기한 최초의 인물이었으며, 그는 그의 논문 "Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis(1833)"를 통해 기호 대수의 필요성을 강조하였다.

그는 먼저 대수를 두 가지 관점에서 파악했는데, 그 중 하나는 발견과 탐구를 위한 '도구 과학(instrumental science)' 곧 대수를 응용을 위한 도구로 보았으며, 다른 하나는 '독립 과학(independent science)'의 맥락에서 대수의 원리와 완전성을 추구하는 것으로 보았다. 이러한 구분은 자연스럽게 대수를 어떤 구조로 볼 것인가에 대한 해석으로 이어졌다. 대수를 '도구 과학'으로 본다면 대수에 대한 해석은 구체적인 모델에서 이루어진다. 그러나 만약 대수를 '독립 과학'으로 본다면, 구조에 대한 해석은 반드시 수치적 구조일 필요는 없게 되며, 추상적인 이론에서 구조는 과정에서보다 더 강력한 역할을 하게 된다. 이러한 그의 생각은 앞서 고전대수학과 현대대수학을 대비시키려고 했던 버코프의 생각과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다. 19세기 초까지 이루어진 대수 연구가 주로 방정식의 풀이를 강조했다면 그리고 그 과정에서 대수가 주로 응용을 위한 도구로 사용되었다면 이러한 측면에서 '도구 과학'으로서의 대수는 고전대수학과 관련이 있는 반면, 현대대수학에서 강조되는 군, 벡터 등의 비수치적 응용성은 대수를 '독립 과학'으로 파악함으로써 가능하였다고 볼 수 있다.

이러한 대수의 구분에 이어, 피콕은 대수 기호에서 본질적으로 대수 기호의 의미 또는 가치를 제한하거나 한정할 수 있는 것은 어떠한 것도 없다는데 주목하였다. 그리고 자연수에 제한된 산술에서부터 형식적인 대수로의 이행에 대하여 논의하였으며, 그 결과 '독립 과학'으로서의 대수의 원리(형식)는 이미 알려진 것을 확장(일반화)함으로써 제시될 수 있다는 사실에 주목하였다. 이 과정에서 그는 대수를 '독립 과학'으로 연구하기 위해 '형식'에 주목하였으며, '형식불역의 원리'를 도입하게 되었다. 이 원리에 대한 피콕 자신의 설명은 다음과 같다.

> 제시된 과학으로 생각되는 산술대수에서 발견될 수 있는 동치인 형식은 그것이 무엇이든 간에, 기호가 그 형식에서 일반적인 것일 때, 그리고 비록 그 값이 특별하다 하더라도 기호가 그 본질과 그 형식에서 일반적일 때, 기호는 동치인 형식을 통해 유지된다([15, p. 10] 재인용)

피콕은 이러한 '형식불역의 원리'를 통해 형식적인 대수를 도입할 수 있게 되었으며, 대수는 기하에서처럼 연역적인 과학으로 성장할 수 있게 되었다. 이제 대수는 '독립 과학'으로 연구되기 위한 조건을 갖추게 되었으며, 그 원리를 조작하고 기술하는 법칙을 필요로 하게 되었다.[5] 그리고 이 과정에서 의미를 통해 형식을 제한하려는 경향은 19세기 이후 조금씩 완화되었으며, 피콕 이후 의미에 따르지 않고 형식을 통해 개념의 범위를 넓히려는 경향은 수학사에서 전형적인 과정이 되었다. 그 대표적인 예는 피콕의 기호대수에서 다루었던 기호

---

5) 이러한 조작 기술에 대하여 20세기 수학자인 치폴라(Cipolla, 1929)는 '형식적인 성질을 보존하는 원리 또는 형식불역의 원리'(principle of permanence or of the conservation of formal properties)는 수치적 구조의 확장에서 그 형식적 성질이 보존되는 방향에서 연산을 정의하는 것과 같은 것으로, 그 연산이 작용하는 수에 의존하지 않고, 대신 제시된 연산에 따라 결정되고 따라서 형식의 성질이 중요하다고 하였다. 또한 그는 형식불역의 원리는 대수에서 합과 곱이 주어진 확장된 집합을 통해 정의를 만들어낼 수 있게 되었다고 하였다([15, p. 11] 재인용).

연산으로, 그는 기호 연산에 있어서 작은 수에서 큰 수를 빼는 금지조항을 제거함으로써 대수의 위치를 형식적인 '독립 과학'의 입장에서 논의할 수 있게 하였다. 이러한 음수에 있어서의 '형식불역의 원리'는 한켈에 의해 1867년 다시 제시되었다. 그 결과 19세기에 들어와서는 이러한 음수에 대한 형식적인 아이디어와 함께, 영국 수학자들은 대수를 의미에서부터 벗어나 형식적인 입장에서 다룰 수 있게 되었다. 대수의 법칙은 완전히 보편적인 상태에서 다루어지게 되었으며 그리고 이러한 보편성의 원칙은 이론의 일관성과 함께 우선적으로 고려되었다. 이것은 바로 피콕이 '형식불역의 원리'에서 가장 강조한 것이었다. [16]에 따르면, 피콕은 "어떤 형식이든 일반적 기호로 표현된 다른 형식과 대수적으로 동치라면, 그것은 그 기호가 표현하는 어떤 것과도 계속 동치여야 한다"고 말함으로써, 형식 곧 대수식과 기호적 조작에서 동치를 유지하는 것이 무엇보다 중요하다는 점을 강조하고 있다([19, p. 20] 재인용). 이것은 앞서 논의한 기호적 대수의 완성으로 볼 수 있으며, 대수 기호는 더 이상 일반화된 수로 여겨지지 않게 되었으며 어떠한 외적인 의미도 생략된 상태에서 그 자체로서 다루어질 수 있게 되었다. 이러한 논의로부터 피콕은 대수의 완전한 탈산술화에 도달하였다.

이와 함께 피콕은 '형식불역의 원리'를 통해 대수에 임의성을 도입하였다. 이러한 임의성을 통해 공리적 방법을 제안함으로써 존재론적 제한에서 벗어나게 하였으며, 피콕 이후 수학자들은 논리적 법칙에 따르는 새로운 수학적 대상을 만들어낼 수 있게 되었다. 이제 새로운 아이디어의 내적 일관성이 수학자들의 유일한 관심사가 되었으며, 형식적으로 정의된 대상의 본질이나 실세계와의 관계에 대한 철학적 질문은 더 이상 필요하지 않게 되었다. 그리고 '형식불역의 원리'에 의해 이러한 존재론적 돌파구가 마련된 후에, 공리적 방법을 통해 새로운 수학적 대상을 도입하는 것은 점점 보편화되었다. 대수의 탈산술화는 이처럼 완전한 대상을 획득하기 위해 조작적인 기원에서부터 수학적 아이디어를 단절시킨 전형적인 과정으로 볼 수 있다.[6] 수와 수치적 계산과 대수와의 연결은 조금씩 느슨해졌으며, 이러한 대수의 탈산술화를 통해 대수는 점점 추상 구조의 과학으로 변하게 되었다. 이 과정에서 '형식불역의 원리'는 앞서 논의한 기호적 대수의 완성에서 결정적인 역할을 하였을 뿐 아니라, 수 개념의 확장에서도 핵심적인 원리로 작용하고 있음을 알 수 있다.

(2) 학교수학에 등장하는 '형식불역의 원리'

1) 십진기수법의 완성: 소수

학교수학에서 소수 개념은 자연수와 함께 십진기수법을 사용하여 지도되고 있으며, 소수를 십진기수법의 완성으로 본다면 이는 소수를 '형식불역의 원리'에 의한 자연수의 확장으로

---

6) 수학에서 이러한 비슷한 예는 다른 경우에서도 찾아 볼 수 있다. 예를 들어, 수 개념은 세고 측정하는 조작을 그 기원으로 하고 있으나, 이러한 해석은 복소수가 수용되기 위해서 포기되어야 했다. 그리고 함수를 순서쌍의 단순한 집합으로 전환시킨 수학자들은 (함수) 개념의 알고리즘적인 조작적 기원을 단절시켰다.

보는 것이다[7]. 십진법으로 표기한 자연수에서는 숫자의 위치에 따라 각 숫자가 의미하는 바가 달라지며, 이는 어떤 자리에 있는 수가 표현하는 값은 그 수와 자리값의 곱이 된다는 것을 의미한다. 현행 학교수학(6차 교육과정)에서는 초등학교 6학년 수학 교과서에서 2345의 십진기수법의 전개식 $2\times10^3+3\times10^2+4\times10+5\times1$을 보여주고 있으며, 중학교 1학년 교과서에서도 기수법을 통해 자연수의 십진기수법에 대하여 다루고 있다. 그런데 이러한 십진기수법의 원리는 자연수뿐만 아니라 소수에서도 사용되는 것으로[7], 이 과정에서 우리는 '형식불역의 원리'를 생각해 볼 수 있다. 다시 말해, 자연수 표기에서는 일의 자리를 기준해서 왼쪽으로 10배씩 자리값이 커지는 것을 십진기수법의 원리로 본다면, 소수에서는 소수점을 기준으로 오른쪽으로 1/10배씩 자리값이 줄어드는 것을 볼 수 있고 이 과정에서 자연수와 소수는 완전한 십진기수법을 이루게 되는 것이다.

2) 지수법칙의 확장

학교수학에서 지수법칙 가운데 지수의 나눗셈을 설명하는 과정은 피콕이 산술대수에서 기호대수로 확장하는 과정과 유사하게 진행되며, 이 과정은 지수와 관련해서 중학교에서부터 고등학교로의 이행 과정에서 나타난다. 피콕에 의해 이루어진 산술대수와 기호대수는 다음과 같은 전형적인 예를 통해 나타낼 수 있으며[11, p. 4], 그는 19세기 초 이러한 산술대수의 기호대수로의 확장을 '형식불역의 원리'를 사용함으로써 가능하게 하였다.

산술	⇒	산술대수	⇒	기호대수
$7-(5-2)=7+5-2$		$c<b,\ b-c<a$일 때, $a-(b-c)=a+c-b$		$a-(b-c)=a+c-b$

여기에서 우선 산술대수는 숫자를 대신해서 문자를 쓴 것을 제외하면 산술과 거의 구분되지 않는다. 따라서 산술대수를 보편적인 산술로 생각하는 것은 이처럼 산술에서처럼 구체적인 값을 대신하여 다만 문자로 표현되기 때문에 붙여진 이름으로 볼 수 있다. 그러나 기호대수는 분명 산술과의 차별성을 드러내고 있다. 기호대수에서는 산술이나 산술대수처럼 구체적인 의미가 문자를 사용한 식에서 드러나지 않는다. 그럼에도 불구하고 우리는 산술대수와 기호대수 사이에서 동일한 연산 결과를 확인할 수 있다. 피콕은 이것이 가능한 이유로 '형식불역의 원리'를 들고 있다. 다시 말해 이것은 음수와 같이 제한된 수 범위에서 문자를

---

7) 소수에서 십진기수법의 원리가 명시적으로 학교수학에서 다루어지려면 지수가 정수까지 확장이 되어야 하며, 따라서 고등학교 이후에 등장해야만 한다. 그러나 초등학교(6차 교육과정: 5-2, 7차 교육과정: 6-가)에서 할푼리 개념을 다루는 동안 우리는 이러한 십진기수법의 전개식 형태(6차 교육과정, p.97, 0.375를 3할 7푼 5리라고 읽는다. $0.375=\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}$)를 만날 수 있다.

도입하려는 노력에 의해 이루어진 것으로, 학교수학의 경우 이와 비슷한 예는 지수의 나눗셈에서 찾아볼 수 있다. 지수의 나눗셈은 중학교 2학년 수학에서 처음 등장해서, 고등학교 1학년 수학에서 모든 제한된 조건을 뛰어넘어 실수까지 확장되면서 완성된다. 이 과정을 살펴보면 산술과 산술대수, 그리고 기호대수로의 확장이 단계적으로 진행된다는 사실과 이 과정에서 '형식불역의 원리'가 어떻게 암묵적으로 사용되고 있는지를 알 수 있다.

Level 1. 산술의 단계

지수의 나눗셈 (중2 수학, 두산, p. 36에서 밑 a를 2로 바꾼 형태)
거듭제곱으로 표현된 밑이 같은 수들의 나눗셈은 다음과 같이 할 수 있다.

(1) $2^5 \div 2^3 = \dfrac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2\times2 = 2^2(=2^{5-3})$

(2) $2^3 \div 2^3 = \dfrac{2\times2\times2}{2\times2\times2} = 1$

(3) $2^3 \div 2^5 = \dfrac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \dfrac{1}{2\times2} = \dfrac{1}{2^2}(=\dfrac{1}{2^{5-3}})$

Level 1에서는 산술연산이 그대로 적용된다. 학생들은 거듭제곱을 초등학교 6학년 2학기 때 십진기수법과 함께 학습하였으며, 중학교 1학년에서는 소인수 분해를 통해 지수를 학습하게 된다. 이러한 배경 지식을 통해 거듭제곱을 표현하게 되고, 분수에서 약분을 통해 그 결과를 나타내는 것이다. 여기서 마지막 괄호 안에 있는 해석은 이후 산술대수와의 관련성을 보여주기 위한 것이다. 이러한 과정은 곧바로 산술대수와 연결되어 다음과 같이 Level 2에서 문자를 사용한 동일한 연산이 진행되고 그 결과는 지수법칙으로 정리된다. 여기서 특이한 점은 고등학교 수학에서 지수가 정수로 확장되기 이전에 이와 동일한 표현이 나오는데, 이 과정에서는 세 가지 경우 가운데 $m>n$ 인 경우만을 다루고 있다는 점이다(이것은 이후 $m=n$, $m<n$인 경우에 '형식불역의 원리'를 통해 확장을 시도하기 때문이다). 이처럼 산술대수에서 각각의 경우에서 연산의 조건이 주어진 것은 지수의 확장에서 음수가 도입되지 않았기 때문인데, 이것은 위에서 살펴본 산술대수의 예에서 문자의 뺄셈을 하기 위해 그 조건을 제한하는 것과 같은 맥락에서 생각해볼 수 있는 것이다.

Level 2. 산술대수의 단계

지수법칙(3) (중2 수학, 두산, p. 37)
$a\neq0$ 이고, m, n이 자연수일 때,

1. $m>n$ 이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$
2. $m=n$ 이면 $a^m \div a^n = 1$
3. $m<n$ 이면 $a^m \div a^n = 1/a^{n-m}$

지수법칙 1 (공통수학, 금성교과서, p. 208)

양의 정수 m, n에 대하여

5. $m>n$ 일 때, $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Level 3. 기호대수의 단계

지수법칙 2 (공통수학, 금성교과서, p. 210)

m, n이 정수일 때,

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Level 3의 기호대수의 단계에서는 산술대수와 비교해 볼 때 각각의 경우에서 제한된 조건이 사라졌다. 곧 연산의 제한 조건이 사라짐으로써 연산의 일반화가 이루어지고 이 과정에서 음수의 존재나 그 의미에 대한 것들은 고려되지 않는다. 물론 지수법칙 2가 소개되기 전에 0과 음의 정수 지수에 대한 정의가 도입된다. 우리는 이 과정에서 피콕이 말하는 '형식불역의 원리'가 적용되는 것을 볼 수 있으며, 그 결과 지수의 나눗셈은 그 적용 범위를 넓혀 새로운 대상 곧 정수에까지 확장되는 것을 볼 수 있다.

0 또는 음의 정수 지수 (공통수학, 금성교과서, p. 209)

$a \neq 0$일 때, m과 n이 양의 정수이고 $m>n$이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 이 성립하는 것을 알고 있다.
이 지수법칙이 $m=n$일 때도 성립한다면 양의 정수 n에 대하여,

$$1 = a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0, \text{ 즉 } 1 = a^0$$

따라서 $a \neq 0$일 때, $a^0 = 1$로 정의한다.
또 위의 지수법칙이 $m<n$일 때도 성립한다면 양의 정수 n에 대하여,

$$1/a^n = 1 \div a^n = a^0 \div a^n = a^{0-n} = a^{-n}, \text{ 즉 } 1/a^n = a^{-n}$$

따라서, $a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때, $a^{-n} = 1/a^n$ 로 정의한다.

0 또는 음의 정수 지수의 정의에서 우리는 두 번의 암묵적인 가정을 찾아볼 수 있는데, 이것은 0의 지수를 정의하는 과정에서 '$m=n$일 때도 성립한다면'과 그리고 음의 정수 지수에서 '$m<n$일 때도 성립한다면'이라는 가정이다. 이것은 앞서 제시한 지수법칙 1의 지수의 나눗셈에 관한 법칙이 그 형식을 바꾸지 않고 성립한다는 사실을 가정한 것으로, 우리는 이러한 가정에 대한 근거를 '형식불역의 원리'에서 찾아볼 수 있을 것이다.

3. 수 개념의 확장

(1) 수 개념의 확장: 과정과 대상의 상호작용

수학의 모든 분야에서 '과정'(process)과 '대상'(object)의 구분은 개념을 획득하는 과정에서 발생하는 것으로 볼 수 있다([18], [20]). 여기서 대상은 추상적인 성질을 띠고 있으며, 과정은 계산 절차에 따르는 구체성을 띠는 것으로 생각할 수 있다. 수 개념의 경우에는 이 두 가지 성격을 동시에 보여주고 있는데, 대상과 과정을 통해 수 개념의 확장은 이루어져 왔다. 일반적으로 수 개념을 대상으로 하여 그것을 정신적으로 조작하는 방법은 물리적 대상을 인지하고 조작하는 방법과 유사하게 진행되는데, 그것은 계산 과정에서 대상을 표현함으로써 진행된다. 이러한 대상과 과정 사이의 관계는 수 개념의 확장에서 서로 도움을 주면서 진행된다. 그리고 경우에 따라서 (추상적인) 대상은 (계산) 과정에 대한 대안적인 방법으로 등장한다. 예를 들어, 자연수와 유리수는 세기와 측정 과정을 표현하려는 대안적인 방법으로 볼 수 있으며, 무리수의 아이디어는 정수의 쌍(비)으로서 나타낼 수 없는 측정 과정에서 생겨났으며, 음수와 복소수의 개념은 사실 더 작은 수에서 빼기 연산을 하는 것과 음수의 제곱근을 만들어내는 과정에서 비롯된 것이다.

[18]에 따르면, 모든 수는 과정으로 보는 조작적인 방법과 대상으로 보는 구조적인 방법에 의해 고안되었으며, 특히 수 개념의 확장은 조작적인 방법을 먼저 수용하는 가운데 구조적인 방법으로 그 정당성을 확보하면서 진행되었다고 하였다. 따라서, 유리수, 무리수, 음수, 복소수는 어떤 계산 과정이 실재화(reification)되어 대상으로 표현되면서 그 확장이 이루어졌다고 볼 수 있다.

이러한 수 개념의 확장을 그 역사적 발달에서 살펴보면, 새로운 수의 등장은 일단 계산 과정에서부터 발생하였다. 그러나 새로운 수가 수학으로 인정받기 위해서는 이러한 계산 과정을 뛰어넘어 대상으로 조직되고 구조화되어야 하는데, 음수와 복소수가 수 개념으로 받아들여진 과정은 이러한 사실을 분명하게 보여준다. 음수와 복소수는 삼차방정식을 해결하는 알고리즘에서 더 작은 수에서 큰 수를 빼는 절차와 이러한 뺄셈의 결과에 제곱근을 구하는 과정에서 나타났으며, 이 두 개념이 실제로 추상적인 대상으로 받아들여진 것은 거의 3세기가 지난 후에야 가능하게 되었다. 수 개념의 확장은 이처럼 먼저 조작적 개념이 등장하고 어느 정도의 시간이 지나면서 구조적 개념으로 발달하면서 진행되었다. 이 과정에서 우리는 수학자들이 이러한 과정을 대상으로 파악하기 이전에도 그것들을 이용해서 보다 복잡한 연산과 결합시킬 수 있었다는 사실에 주목해야 한다. 물론 시간이 지남에 따라, 과정은 어떤 추상적인 대상을 수행하고, 보다 높은 수준의 과정에 다시 사용되기 위해 새로운 대상으로 변하게 된다. 그러나 과정이 대상으로 조직되기 이전에 과정은 계산 과정으로서 그 가치를 가지고 있었으며, 이러한 가치에 대한 인식이 대상을 낳게 되었다는 사실을 기억해야 한다 따라서 학교수학에서 이루어지는 수 개념의 확장은 추상적인 대상에 의해 형식적으로 가르

처지기 이전에 과정에 대한 설명이 충분히 강조되어야 한다.[8)]

예를 들어, 스파르드(Sfard)는 이러한 과정을 강조하기 위해, 과정을 일차적인 과정(primary process)과 이차적인 과정(secondary process)으로 구분하였다. 그리고 이것을 음수에 적용해서, $a \geq b$인 제한이 제거된 $a-b$ 연산을 일차적인 과정으로 보았으며, 그 결과로부터 확장된 모든 산술 연산을 이차적인 과정으로 보고 있다[19, p. 38]. 또한 가르시아(Garcia)와 피아제(Piaget, 1989)가 제시한 intra-, inter-, trans-operational 단계 역시 수 개념의 확장에서 과정을 강조하고 있다고 볼 수 있다[9)]([19, p. 38] 재인용).

일반적으로 수 개념의 확장은 측정이나 계산 과정을 통해 먼저 그 필요성 및 가치가 받아들여졌으며, 그것이 대상으로 수용된 것은 많은 시행착오와 어려움을 거치면서 달성된 것이다. 그리고 무엇보다 수 개념의 확장에서 과정을 대상으로 파악하는데 있어서 나타난 어려움은 대수가 산술에서부터 벗어나 새로운 추상 과학으로 성장하면서 겪었던 어려움과 유사하다. 이것은 대수의 탈산술화에서 수 개념의 확장이 중요한 역할을 하였음을 의미한다. 흔히 학교수학에서 산술은 과정 중심으로 지도되는 것이 일반적이다. 그리고 대수에서는 과정과 대상이 동시에 다루어지지만 일반적으로 과정에서부터 대상으로의 관점의 전환을 요구한다고 볼 수 있다. 따라서 이러한 산술과 대수의 성격에 비추어 보면, 수 개념의 확장에서 과정과 대상간의 관계는 대수의 탈산술화에서 요구하는 '형식'을 반영하고 있음을 알 수 있다. 그리고 앞서 설명하였듯이 과정에서부터 대상으로의 도약에서 이를 가능하게 한 것은 '형식불역의 원리'였으며,[10)] '형식'이 유지되면서 과정을 수용하려는 단계는 결국 대상으로 나아가는 출발점이 되었다.

8) 실제로 학교수학에서는 자연수를 제외하고는 역사에서 수 개념이 등장한 과정에 대한 언급을 생략한 채, 형식적인 방법을 통해 추상적인 대상으로 수 개념을 도입하고 있다. 이것은 물론 과정에서 대상으로 이어지는 수학적 개념을 단축해서 제시함으로써, 역사에서 등장하는 여러 어려움을 뛰어넘으려는 시도로 볼 수 있지만, 한편 이러한 수 개념 학습에 있어서 그 필요성 및 동기를 부여한다는 측면에서 본다면 발생 과정에 대한 분석이 필요하게 된다. 이러한 맥락에서 '형식불역의 원리'는 그것이 형식적 외삽이든 귀납적 외삽이든 어떤 형태로든, 학교 수학에서 수의 확장과 관련해서 의미 있게 지도될 수 있을 것이다.

9) [19]의 해석을 수 개념의 확장과 관련해서 생각해보면, intra-operational 단계는 구체적인 수를 다루는 과정에서부터 수를 계산하는 일반적인 규칙을 발견하는 것으로, inter-operational 단계는 기초적인 수 연산 과정을 벗어나 계산 과정에서 드러나는 연산을 대상으로 하여 그 사이의 관계를 파악하는 단계로 볼 수 있다. 그리고 trans-operational 단계에서는 대상의 전반적인 구조에 관심을 기울이는 것으로, 구조에 부여된 성질만이 관심의 대상이 된다.

10) 학교수학에서 이루어지는 정수의 정의는 자연수로부터 그 확장을 시도하고 있으며, 유리수 역시 자연수 또는 정수로부터 정의되고 있다는 점에서, 그리고 그 연산들 역시 앞서 다루었던 수 연산으로부터 유도된다는 점에서 이러한 수의 확장은 '형식불역의 원리'를 전제로 한다고 볼 수 있을 것이다. 그러나 앞서 살펴보았듯이 이러한 수의 확장이 과정에서부터 대상으로의 도약을 제대로 보여주지 못하고 형식적으로 도입된다는 점은 학교수학에서 논의가 필요한 부분이다.

(2) 학교수학에서 이루어지는 수 개념의 확장

1) 정수의 정의 (7차 교육과정)

7차 교육과정부터 정수는 중학교 1학년에서 지도된다. 이것은 6차 교육과정의 경우 초등학교 6학년 2학기에서 음의 정수와 양의 정수를 …, 2, 1, ˈ1, ˈ2, …로 표현하다가 중학교 1학년에서 다시 정수를 학습하면서 그 표기를 …, −2, −1, +1, +2, …로 바꾸는 문제를 해결함과 동시에 음수 지도의 어려움을 교육과정에 반영한 것으로 보여진다. 학교수학에서 음수 개념의 확장은 역사에서 음수가 등장한 것과는 많은 차이를 보인다. 수학사에서 음수는 방정식의 풀이과정에서 자연스럽게 등장하였지만, 교육과정에서는 음수가 먼저 다루어지고 방정식이 그 뒤에 등장하기 때문에, 역사에서 등장하는 음수 개념의 필요성은 교육과정에서는 부각되지 않으며, 그 대신 형식적인 정의 방법이 사용된다. 그러나 실제로 음수로의 확장이 '형식불역의 원리'에 따르는 형식적인 외삽법[11]으로 설명이 가능하다고 할 때, 방정식의 학습 이후 다시 음수의 필요성과 그 연산의 타당성을 방정식을 통해 확인하는 것은 학생들이 음수와 그 연산을 받아들이는데 있어서 정당성을 부여할 수 있을 것이다.

(A) 자연수 1, 2, 3, …(+1, +2, +3, …)과 자연수에 음의 부호 −를 붙인 수 −1, −2, −3, … 및 0을 통틀어 정수라고 한다.

(B) 자연수 1, 2, 3, …에 양의 부호를 붙인 수 +1, +2, +3, …을 양의 정수라 하고, 음의 부호를 붙인 수 −1, −2, −3, …을 음의 정수라고 한다. 이때, 양의 정수, 0, 음의 정수를 통틀어 정수라고 한다.

(C) 자연수 1, 2, 3, …에 양의 부호 +가 붙은 수 +1, +2, +3, …과 음의 부호 −가 붙은 수 −1, −2, −3, …, 그리고 0을 통틀어 정수라고 한다.

(D) 집합 {…, −4, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4, …}를 이루는 모든 수들을 정수라고 한다.

위의 내용은 7차 교육과정에 따르는 교과서에서 정수를 정의한 것이다. 이들은 정수를 정의하기에 앞서 '부호를 가진 수'를 통해 양수와 음수를 설명한 뒤, 양의 정수와 음의 정수를 정의하고 있다. A, B, C 교과서들은 한결같이 자연수를 도입하여 자연수에 앞서 설명한 부호를 붙임으로써 양의 정수와 음의 정수를 정의한다. D 교과서의 경우는 약간의 차이를 보이는데 양수와 음수를 설명한 후에 집합을 사용해서 정수를 정의함으로써 자연수에서의 확장이라는 느낌은 다소 감소하고 있다. 그러나 대부분의 교과서는 정수를 정의하는 과정에서

11) 형식불역의 원리에 따르는 수의 확장에서, 형식적 외삽법은 일차방정식의 근으로서 음수, 분수 및 무리수의 연산을 이끌어내는 방법을 말한다. 예를 들면, $x+3=0$, $y+4=0$에서부터 $x=-3$, $y=-4$임을 알고 있고, 여기서 우리는 $(x+y)+(3+4)=0$을 이끌어낼 수 있다. 그리고 $x+y=-(3+4)$에서부터 음수의 덧셈 $(-3)+(-4)=-(3+4)$가 성립한다는 사실을 확인할 수 있는데, 이와 유사한 과정을 통해 우리는 음수, 분수, 무리수의 확장을 생각해볼 수 있다.

자연수를 확장함으로써 정수를 설명하고 있으며, 이는 정수를 자연수와 연결하여 형식적으로 정의하려는 것으로, 이러한 설명은 '형식불역의 원리'를 간접적으로 보여주면서 역사에서 경험했던 음수의 수용 과정을 단축해서 제시하는 것으로 볼 수 있다.

2) 유리수의 정의 (7차 교육과정)

유리수의 경우 학생들은 초등학교 때부터 분수와 소수를 통해 이미 충분히 다루었던 내용으로 볼 수 있을 것이다. 이런 의미에서 중학교 1학년에서 정의되는 유리수는 앞서 정의한 음의 정수를 확장하여 음의 유리수를 소개함으로써, 유리수 집합의 완전한 정의를 이끌어내는 것을 목적으로 하고 있다.

(A) 분자, 분모가 모두 자연수인 분수에 양의 부호 +를 붙인 수와 음의 부호 −를 붙인 수 및 0을 통틀어 유리수라고 한다.

(B) 분자와 분모(0이 아니다)가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다.

(C) 분자, 분모($\neq 0$)가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다.

(D) 분자, 분모가 자연수인 분수로 나타낼 수 있는 수에 양의 부호 +를 붙인 수와 음의 부호 −를 붙인 수, 그리고 0을 통틀어 유리수라고 한다.

위에서 보듯이 유리수의 정의 형태는 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 우선 A, D 교과서에서처럼 분모, 분자를 자연수로 보고 이러한 분수에 앞서 설명한 부호를 붙임으로써 유리수를 정의하는 방법이 있다. 이 방법의 경우 정수와 동일한 확장 방법을 사용한 것으로, 정수를 자연수에 부호를 붙인 것으로 정의한 것처럼 유리수 역시 초등학교에서 학습한 분수 개념에 동일한 부호 개념을 사용함으로써 유리수로의 확장을 꾀하는 것으로 볼 수 있다. 다음으로 B, C 교과서처럼 분모, 분자를 정수로 보고 이러한 분수를 유리수로 정의하는 방법이 있다. 이것은 자연수에서 정수로의 확장을 통해 자연수가 정수의 부분집합임을 보였다면, 이와 같은 방법으로 정수에서 유리수로의 자연스러운 확장을 설명함으로써 수 개념의 확장을 위계적으로 고려할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 어떤 형태든 유리수의 정의는 앞서 학습한 자연수와 부호 개념 및 정수를 자연스럽게 확장함으로써, 수 개념 사이의 확장에서 그 연결성을 강조하고 있다고 볼 수 있다. 또한 이러한 연결성 측면을 강조한다면, 앞서 음수가 '형식불역의 원리' 곧 형식적인 외삽법에 따라 방정식을 통해 설명이 가능한 것처럼 유리수 역시 방정식 학습 이후에 방정식을 통한 설명이 가능할 것이며, 이러한 설명은 학생들이 자연수, 정수, 유리수의 개념을 모두 계산수라는 형식적인 측면에서 이해하는데 도움을 줄 것이다.

3) 수의 확장과 귀납적 외삽법 (7차 교육과정)

수의 확장에서 교과서의 정의는 형식적인 방법을 취하고 있으며, 이것은 역사에서 절실히

필요로 했던 수 개념의 등장배경에 대한 설명이 결여되어 있다. 앞서 지적했듯이 교육과정 순서가 수의 확장에 이어 방정식이 등장하기 때문에 방정식을 통한 형식적인 외삽법이 실제로 음수와 유리수의 확장에서 설명될 수 없다면, A, B, C 교과서에서와 같이 확장된 수의 연산에서 귀납적 외삽법의 형태를 제시함으로써 수의 확장에서 '형식불역의 원리' 형태를 찾아보는 것은 의미 있을 것이다. 특히 주목할 부분은 B 교과서의 경우 유리수의 곱셈 전개 자체가 이러한 귀납적 외삽법의 형태로 전개되고 있다는 점이다. A, C 교과서의 경우는 부가적인 설명 부분에서 이러한 형태의 규칙을 제시하고 있다.

(A) 수의 사칙계산	(B) 유리수의 계산	(C) 정수와 유리수의 계산
'규칙으로 알아보기'에 별도로 제시된다	교과서 본문에서 유리수의 곱셈 전개에서 사용된다	부가적인 설명으로 제시된다
$(-3)\times(+2)=-6$ $(-3)\times(+1)=-3$ $(-3)\times\ 0\ =0$ $(-3)\times(-1)=+3$ $(-3)\times(-2)=+6$	$(+5)\times\ 0\ =(+5)-(+5)=0$ $(+5)\times(-1)=\ 0\ -(+5)=-5$ $(+5)\times(-2)=(-5)-(+5)=-10$ $(+5)\times(-3)=(-10)-(+5)=-15$	$(+3)\times(+2)=+6$ $(+3)\times(+1)=+3$ $(+3)\times\ 0=0$ $(+3)\times(-1)=-3$ $(+3)\times(-2)=-6$

4. 결론

학교대수는 그 교육과정에 있어서 산술과의 연결이 어떻게 구성되는가에 따라, 그리고 그 연결에서 산술의 어떤 부분을 강조하고 어떤 부분을 생략해야 하는가에 따라서 그 내용이 결정된다고 볼 수 있다. 이러한 관점은 대수의 출발점을 산술로 보는 것으로, 이는 곧 대수 학습에서의 성공을 산술과의 관련성에서 찾으려는 것이다. 대수의 역사적 발생은 학교대수의 이러한 지도 관점에 정당성을 부여해준다. 그러나 이러한 관점에서 우리가 간과해서는 안 되는 중요한 부분이 있다. 다시 말해 비록 대수가 산술에서부터 출발했지만, 대수는 대수 나름대로의 특징과 그 위치를 가지고 있으며, 이러한 인식이 부족할 경우 대수 학습에서 많은 장애를 낳게 된다는 것이다. 그렇다면 여기서 강조되어야 할 부분은 대수가 어떤 과정을 거치면서 완전한 탈산술화에 도달할 수 있었는가 하는 점이다. 이 글은 이런 관점에서 대수의 탈산술화를 논의하기 위해 세 가지 요인 곧, 기호적 대수의 완성, 형식불역의 원리, 수 개념의 확장을 들고 있으며, 이를 통해서 대수가 오늘날의 위치에 도달했다는 점을 강조하고 있다.

대수 기호의 역사에서 기호적 대수는 문자를 사용하여 일반적인 경우를 간략한 형식으로 나타내려는 필요에 의해 발생하였으며, 비에트는 이를 위해서 미지의 양과 기지의 양을 모두 대수 기호로 표현하여 문제를 해결하려 하였다. 그러나 오늘날 보편적으로 사용되는 이 기호법은 역사에서 오랜 시간을 거쳐 등장했으며, 그것을 수용하기까지 다시 오랜 시간을 기다려야 했다. 그 동안 수학자들 사이에는 이러한 대수 기호법에 대하여 많은 찬반 의견이 있었지만, 결국 그 존재론적 본성은 이론적 관점에 앞서 수학자들에게 매력적으로 다가갔으며, 그 결과 보편적인 사용으로 이어졌고, 문자 기호는 수학의 모든 분야에서 사용되게 되었다. 이것은 대수의 탈산술화를 향한 출발점으로 볼 수 있으나, 그러나 대수 기호의 이론적 근거가 없다는 것은 여전히 문제가 되었다. 피콕은 산술 및 '산술대수'와 구분되는 '기호대수'를 제시함으로써, 그리고 그 이론적 근거로 '형식불역의 원리'를 제시함으로써 이러한 문제를 해결하였으며, 따라서 그에 의해 이루어진 기호적 대수의 완성과 '형식불역의 원리'는 대수의 탈산술화 과정에서 핵심적인 역할을 하였다.

19세기초의 대수학은 산술을 기호화한 것으로, 자연수의 기본적인 성질이 일반화되어 추상적인 대수체계의 공리로 간주된 것은 19세기 후반 이후이다[10, p. 160]. 피콕은 19세기 초에 산술대수의 기호대수로의 확장을 '형식불역의 원리'를 사용함으로써 가능하게 하였다. 피콕에 의해 제시된 '형식불역의 원리'는 특히 수의 확장에서 중요한 사고양식이 되었는데, 한켈의 경우 음수를 형식적으로 정의하는 과정에서 이 원리를 사용하고 있다. 다시 말해 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계를 확장하고, 연산과 관계를 확장하듯이 기본적인 성질이 유지되도록 대수적 구조를 확장함으로써, 오랫동안 정당성을 확보하지 못했던 음수 개념을 수학의 대상으로 수용하게 된 것이다. 대수의 탈산술화에서 걸림돌이었던 수 개념은 이제 과정이 아닌 대상으로 그 존재론적 본성과 함께 이론적 근거를 마련하게 된 것이다. 대수는 기호 체계를 산술에서와 동일하지만 그 의미는 생략된 상태에서 사용할 수 있게 되었으며, 수 개념 역시 대수의 대상으로 기호와 함께 자유롭게 다룰 수 있게 되었으며, 그 결과 완전한 대수의 탈산술화는 현대대수학의 출발로 이어지게 되었다. 또한 이 글을 통해 우리는 대수의 탈산술화에서 수학자들이 경험했던 어려움으로부터 오늘날 학교수학에서 대수 학습-지도의 어려움을 예상할 수 있을 것이다. 그리고 이러한 어려움을 확인하기 위해 이 글은 대수의 탈산술화에서 기호적 대수의 완성과 '형식불역의 원리', 그리고 수 개념의 확장에 있어서 학교수학에서 이러한 과정이 어떻게 전개되고 있는지를 교과서 분석을 통해 살펴보았다.

결론적으로 우리는 이 글에서 피콕의 아이디어를 중심으로 하여 대수의 탈산술화에서 결정적인 역할을 한 요소들을 살펴보았으며, 또한 현대대수학은 대수의 탈산술화를 통해 수학사에서 그 의미와 역할이 분명하게 전개되었음을 살펴보았다. 그리고 우리는 수학자들이 경험했던 어려움을 통해 이러한 대수의 탈산술화가 쉽게 일어나지 않았는다는 것을 간접적으로 알 수 있었다. 이것은 결국 피콕의 아이디어가 의미를 고려할 때와 그 의미를 생략할 때를 구분할 수 있는 경우에 한하여 대수의 탈산술화가 진행될 수 있기 때문이다.

학교수학에서 대수의 탈산술화 과정을 학생들에게 지도하는 것은 분명 어려운 작업이다. 따라서 이러한 어려움을 극복하기 위해서, 우리는 이 글에서 제시한 대수의 탈산술화 과정을 보다 자세히 분석할 필요가 있으며, 그 과정에서 나타나는 여러 가지 문제점을 분명하게 드러냄으로써, 학교대수에서 대수의 탈산술화를 앞서 제시한 요인들을 각각 논의함과 동시에 서로 연결해서 지도하는 방법을 생각해볼 수 있을 것이다. 이러한 대수의 탈산술화와 학교대수 사이의 관련성은 계속적인 논의를 통해 연구되기를 기대해본다.

참고 문헌

1. 강옥기 외 2인, **중학교 수학 7-가**, (주)두산, 2001.
2. 강행고 외 9인, **중학교 수학 7-가**, (주)중앙교육진흥연구소, 2001.
3. 교육부, **초등학교 교사용 지도서 수학 5, 수학 6** (6차 교육과정).
4. 교육부, **초등학교 교사용 지도서 수학 6-가** (7차 교육과정).
5. 김연식 · 김흥기, **중학교 수학 1**, (주)두산, 2000.
6. 김연식 · 김흥기, **중학교 수학 2**, (주)두산, 1998.
7. 변희현, "소수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구," 수학교육학 연구 세미나 발표 자료, 2002.
8. 양승갑 외 6인, **중학교 수학 7-가**, (주)금성출판사, 2001.
9. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1998.
10. 우정호, **수학학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부, 2000.
11. 이승우, "형식불역의 원리에 대한 교육적 의미 고찰," **대한수학교육학회 2001년도 추계 수학교육학연구발표대회 논문집**, 2001.
12. 이준열 외 4인, **중학교 수학 7-가**, (주)도서출판 디딤돌, 2001.
13. 조태근 외 6인, **고등학교 공통수학**, 금성교과서(주), 1998.
14. Birkhoff, G., "Current trends in algebra", *American Mathematical Monthly* 80(1973), 760-782.
15. Menghini, M., "Form in Algebra: Reflecting, with Peacock, on upper secondary school teaching," *For the Learning of Mathematics* 14, vol. 3(1994), 9-14.
16. Novy, L., *Origins of Modern Algebra,* Noordhoff international publishing, Leyden, The Netherlands, 1973.
17. Roche, J., *The Mathematics of Measurement - a critical history,* The Athlone Press, London, Springer, 1998.
18. Sfard, A., "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin," *Educational Studies in Mathematics,* 22(1991), 1-36.

19. Sfard, A., "The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives," *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1995), 15-39.
20. Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., Simpson, A, "What is the object of the encapsulation of a process?," Unpublished paper, 2000.