韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 8. 제 42권, 제 3호, 275-294.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 3, 275-294.

한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교 연구[1)]

-중학교 대수 영역을 중심으로-

노 정 학 (한신대학교)
양 춘 우 (한신대학교)
정 환 옥 (한신대학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

오늘날의 현대사회는 인터넷을 비롯한 통신매체의 획기적인 발달로 개인이나 국가 상호간의 다양한 학문적 정보들이 매우 밀접하게 교류되고 있다. 이러한 현실은 교육분야 또한 예외는 아니어서, 타국의 교육제도나 교과지도방법, 수업용 교과서 등 교육의 제반 영역에서 심도있게 교류 및 비교 연구되고 있다. 특히 교수학습과정에서 수업내용의 순서와 범위를 결정짓는 교육과정의 설정이나 교육내용의 난이도 조정 등 교수활동 전반에 영향을 미치는 교과서의 역할은 그 무엇보다도 중요한 교육도구임은 두말할 나위가 없다. 교과서가 갖는 이와 같은 교육적 비중과 상호 밀접한 교류로 연결되어진 학문의 세계화 추세를 감안할 때, 우리 교과서와 외국, 특히 우리보다 교육영역에서 사실상 한 걸음 앞서가고 있는 선진국의 교과서를 비교 분석하는 것은 우리의 학습 수준에 대한 방향설정이나 교육내용의 전개 및 유도방법 등 교수학습 전반에 대한 발전에 큰 도움을 줄 것으로 생각된다. 우리가 여러 선진국 중에서도 특별히 독일을 선택하게 된 동기는 크게 보아 다음의 세 가지로 요약할 수 있다.

첫째로 독일은 과거 약 40여 년 동안 한국과 같은 분단국이었으나 약 12년 전에 통일을 이루어낸 통일국가이다. 이는 곧 통일이후 과거의 동·서독 학자들이 공동으로 이루어낸 현행 독일의 교과서는, 앞으로 독일과 같은 통일의 시기가 올 것에 대비하여 준비 중인 한국을 위해서는 매우 유익한 표본이 될 수 있다고 믿기 때문이다.

둘째, 지금까지 국내에서 발표된 수학교육에 관한 비교논문은 단지 미국과 일본 그리고 러시아 등 일부국가에 국한되어 왔으며, 세계 정치 및 경제의 3대 축인 서유럽에 대한 연구는 최근 발표된 영국의 수학과 교육과정 비교 연구 논문[황혜정·신항균(2002)] 이외에는 거의 없다는 사실이다. 지난해 이미 유럽 단일통화시대를 계기로 경제 및 사회문화적 측면에서는 사실상 단일공동체를 이루고 있는 유럽연합(EU)은 그 국제적 비중이 각 분야에서 더욱 증대되고 있는 현실이며, 특히 독일과 프랑스는 유럽연합을 사실상 주도해 온 가장 핵심적인 국가들이다. 이러한 관점에서 볼 때, 우리나라의 교육분야 역시 세계적 흐름에 동참하기 위하여 미국이나 일본뿐만 아니라 유럽연합과도 상호 긴밀한 교류와 쌍방 사이의 심도있는 비교연구가 절실히 필요하다고 생각되었다.

한편, 수학과 교육과정이나 교과서의 비교는 이러한 일부 국가들과의 경우, 예를 들어 김연미의 한국과 미국의 초등학교 저학년 수학 교과서 및 교육과정의 비교와 분석 연구[김연미(1999)], 임재훈의 한·일 초등학교 중학교 수학과 교육과정 내용 비교 연구[임재훈(1999)], 서보억 외 2인의 중학교 대수 영역을 중심으로 한·소 수학교육과정 비교 연구[서보억·신현용·진평국(1995)] 등이 발표되어 있다.

---

1) 이 논문은 2002년도 한신대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.
* 2002년 12월 투고, 2003년 5월 심사 완료.
* ZDM분류 : D13
* MSC2000분류 : 97D10, 97U20
* 주제어 : 독일교육과정, 독일교육제도, 비교분석, 대수영역.

우리가 독일을 선택하게 된 마지막 이유는, 독일은 잘 알려진대로 근대에서 현대에 이르기까지 수학과 수학교육의 요람이었다는 사실이다. 먼저 순수수학의 경우, 17세기의 Euler를 시작으로 Gauss, Riemann 등에 이어 20세기의 Hilbert, Courant 등에 이르기까지 세계 수학의 중심에 위치하면서 현대수학의 큰 흐름을 주도한 국가였음은 주지의 사실이다. 한편 수학교육분야 역시 'Erlangen 프로그램'으로 잘 알려진 Klein[2]의 주도하에, 사물에 대한 함수적 사고력 배양 및 교육의 유전학적 구조에 기저를 둔 수학교육이론의 정립과 또한 순수 및 응용수학의 적절한 융합에 대한 기본적인 가이드라인이 설정되었던 1905년 Merano회의의 결과는 현대 수학교육의 큰 발판을 마련하는 계기가 되었다.

본 연구는 한국과 독일의 중학교 수학교과서 중 대수영역, 즉 수와 연산, 문자와 식 그리고 규칙성과 함수만을 중심으로 학습내용의 범위와 조직, 계열성 등에 대하여 중요한 유사점과 차이점을 비교 분석하였으며, 나머지 절반에 해당되는 기하영역은 차후로 유보하였다.

2. 연구문제

본 연구의 전반은 독일의 교육제도 및 김나지움에서의 교육과정, 수학과 교과과정에 대하여 조사하였으며, 본론에 들어서는 중학교의 대수영역에 속하는 수와 연산, 문자와 식 그리고 규칙성과 함수 영역을 다음과 같은 내용으로 비교 분석하였다[교육부(1999) 참조].

(1) 수와 연산의 영역에서는 정수, 유리수 그리고 실수에 대하여 비교 분석하였다.

(2) 수와 식의 영역에서는 문자와 식, 식의 계산, 1차 및 2차 방정식을 비교 분석하였다.

(3) 규칙성과 함수의 영역에서는 함수의 도입, 1차 및 2차 함수를 비교 분석하였다.

II. 연구방법

1. 연구대상

우리나라 교재로는 중학교과정에서 배우는 수학 7-가, 수학 8-가, 수학 9-가의 대수영역을 연구대상으로 삼았으며, 독일의 경우는 인문계 교육기관인 김나지움 7, 8, 9학년 수학교과서의 대수영역을 선택하였다. 한편 대상교재는 제 7차 교육과정에 따라 현재 발행되어 있는 여러 종의 중학교 수학교과서 중 대표저자 박규홍의 중학교 수학교과서를 중심으로 하였고, 독일의 경우는 바덴뷔템베르크주의 수학교과서를 따랐다.[3]

(1) 한국

중학교 수학 7-가, 박규홍 외 7인 공저, 두레교육(주), 2002년 발행

중학교 수학 8-가, 박규홍 외 7인 공저, 두레교육(주), 2002년 발행

중학교 수학 9-가, 박규홍 외 7인 공저, 두레교육(주), 2002년 발행

(2) 독일

Mathematisches Unterrichtswerk 7, A. Schmid (ed.), Ernst Klett Verlag (1994)

Mathematisches Unterrichtswerk 8, A. Schmid (ed.), Ernst Klett Verlag (1995)

Mathematisches Unterrichtswerk 9, A. Schmid (ed.), Ernst Klett Verlag (1997)

2. 연구절차

본 연구는 다음과 같은 절차에 의해 수행되었다.

(1) 교과서 및 각종 자료수집: 한국과는 달리 독일의 초·중등학교는 주마다 고유의 교육과정을 채택하고 있으며, 따라서 교과서 역시 각 주마다 약간의 차이가 있다. 우리는 그 중 바덴뷔템베르크주에서 채택하고 있는 수학과 교육과정 및 교과서를 선택하였으며, 그 외에도

2) Felix Klein(1849-1925): 독일의 수학자. 1872년 '기하학의 새로운 기법에 관한 비교연구' 발표(후에는 이를 'Erlangen 프로그램'으로 칭하고 있음).

3) 독일 김나지움의 경우, 주 별로 커리큘럼 및 교과서에서 약간의 차이를 보이고 있으나 전반적으로는 크게 다르지는 않다. 이 논문에서 채택한 교과서는 독일의 한 주에서 현재 사용 중인 교재를 임의로 선택한 것이며, 참고로 서울독일학교(Deutsche Schule Seoul)에서는 현재 이 책을 교재로 채택하여 사용하고 있다.

양국의 수학과 교수요목, 각종 국제기관의 보고서 등이 수집되었다.

(2) 자료의 분석: 수집된 자료에 대하여 종합적으로 연구 분석하였으며, 특히 다음과 같은 내용에 대하여는 더욱 심층적으로 다루었다.

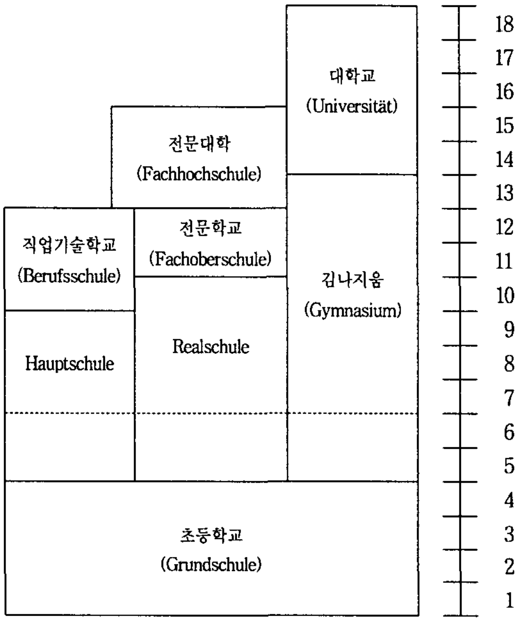
① 독일의 교육제도는 어떠한가?
② 양국 인문계 중등학교의 교육과정은 어떻게 편성되어 있는가?
③ 수학교과서의 교육과정은 어디에 초점을 두고 편성되었는가? 또 편성의 근본적 차이점은 어디에 있는가?
④ 교과서의 외형적 체제는 어떤 차이점이 있는가?
⑤ 새로운 용어를 도입하거나 명제나 정리 등 새로운 성질들을 유도하는 경우, 그 방법에는 어떤 차이가 있는가?
⑥ 양국 교과서에서 나타나는 수학적 기호의 표현방법은 어떻게 다른가?

III. 독일의 수학교육

1. 독일의 교육제도

독일의 전 교육과정은 대체로 초등, 중등, 고등교육과정 등 3단계로 나눈다. 1단계에 속하는 초등학교는 특별한 경우를 제외하고는 일반적으로 4년 과정이며, 이 과정을 마친 어린이는 2단계 중등교육과정에 속하는 Hauptschule, Realschule[4] 또는 김나지움(Gymnasium)에 진학하게 된다(<표 1> 참조). 앞의 두 종류의 학교는 주로 장래 농공상업 등 사회 각 분야의 취업을 준비하기 위한 실업기초교육에 초점을 두고 있는 반면, 김나지움의 경우는 전문인 양성기관인 대학교 진학을 위한 인문계 중등학교이다. 이 세 가지 독일의 전통적 중등교육과정에 대하여 근래에 들면서는 일부의 주에서 다소의 변화를 보이고 있는데, 그 대표적인 예가 1980년대에 새롭게 출범된 종합학교(Gesamtschule)이다. 이 학교는 위의

<표 1> 독일의 교육제도
(자료: Internet [3])



세 종류의 교육과정을 모두 함유하는 중등학교이며, 실업교육과 인문교육을 병행 실시함과 더불어 필요한 경우에는 이 두 과정을 바꾸어 공부할 수도 있는 장점을 가지고 있다[Burscheid(1984)]. 다만 이 제도는 현재 일부의 주에서는 어느 정도 정착되어 시행되고 있는 반면, 대다수의 주에서는 아직도 실험단계에 있거나 아니면 이러한 학교제도의 도입 자체를 유보하고 있다.

한편, 독일의 전통적인 4년제 초등학교 과정은 우리나라나 미국을 비롯한 많은 나라에서 시행되고 있는 6년제 초등학교와 비교할 때, 학생들에게 인문 및 실업계의 선택시기가 너무 이르다는 주장이 일부 교육학자들에 의해 제기됨에 따라, 소위 4+6년제 초등과정이 현재 주 또는 학교에 따라 부분적으로 시행되고 있다(<표 1>의 점선 참조). 이 제도는 초등학교 4학년을 마친 학생 중 인문 또는 실업계 학교의 선택이 확정적인 경우는 2단계 중등학교로 진학을 하는 반면, 결정하기가 매우 애매한 학생은 초등학교에서 2년을 더 수학한 후에 진로를 결정하는 것이다. 우리가 관심을 갖는 것은 물론 2단계 중등교육과정이므로, 여기서는 중등과정의 3종류 학교인

4) 직역하여 Hauptschule를 '주요학교', Realschule를 '실업학교' 또는 '실과학교'라고 부르기도 한다. 그러나 이 표현 역시 일반화된 용어가 아니므로 우리는 원어를 그대로 사용하겠다.

Hauptschule, Realschule, 김나지움에 대하여 좀 더 상세히 서술하겠다. 참고로 <표 2>에서 보듯이 독일이 통일 한 후의 10년 동안에 나타난 변화는, Hauptschule에 재학중인 학생의 수는 대체로 감소하고 있는 반면, 종합학교의 학생수는 약간의 증가추세를 보이고 있다. 한편 김나지움이나 Realschule에 속한 학생의 수에는 큰 변화가 없다. 이 표에서 주목해야 할 것은 대학진학을 목표로 두고 있는 김나지움의 학생수는 전체학생의 30%를 넘지 않는다는 사실이다.

<표 2> 통독 후 독일 중등학교 재학생 비율
(자료: Internet [2]; 단위: %)

	1991	1993	1995	1997	1999
Hauptschule	30.8	24.5	24.0	23.4	22.6
Realschule	26.7	24.9	25.5	25.9	26.4
김나지움	29.3	30.0	29.9	28.9	29.3
종합학교 (Gesamtschule)	7.2	8.5	8.8	9.3	9.4
기 타	6.0	12.1	11.8	12.5	12.3

초등학교 성적에서 다소 뒤떨어지는 학생들이 진학하는 Hauptschule의 이수년도는 5년제이며 (단, Berlin과 Nordrhein-Westfalen주만 6년), 이 학교를 졸업한 학생은 대체로 3-4년 과정의 직업기술학교(Berufsschule)에 전문적 직업교육을 받은 후, 그 분야의 직업에 종사하게 된다. 이 학교의 가장 특징적인 교과목은 '현장실습' (Arbeitslehre)인데, 이는 공장이나 농장, 은행이나 관공서 등의 직업현장에서 일정기간동안 실무적 능력을 익히는 교과목으로 매우 중요한 비중을 차지한다. 한편, 국어(독일어)나 영어, 수학 등의 주요 교과목의 수업은 수준을 달리하는 우열반을 편성하여 능률적으로 운영하고 있다.

Realschule는 대체로 중간 정도의 수준에 속한 학생들에게 제공되는 6년과정의 교육기관이다. 이 학교의 목표 역시 직업인 양성을 위한 기본바탕을 교육한다는 점에서는 Hauptschule와 유사하지만, 여기서는 좀더 전문적인 직업인을 양성하는 전문학교(Fachoberschule), 나아가서는 전문대학(Fachhochschule)에 진학할 수 있도록 기초적 인문 및 실업교과목에 더 비중을 두고 있는 교육기관이다.

한편, 김나지움은 전문인 양성기관인 대학교 진학을 위한 9년제 인문계 학교로서, 대체로 학업성적이 우수한 학생들이 공부하는 교육기관이다. 이 과정을 이수한 학생은 대학입학을 위한 자격시험으로 우리의 수학능력시험이나 미국의 SAT에 준하는 졸업시험(Abitur)을 치른 후, 정규대학(Universität)에 진학하게 된다.

2. 독일의 교과과정

우리나라의 중고등학교에 준하는 독일의 김나지움은 일부 구동독 지역의 주들을 제외하고는 대체로 5학년부터 13학년까지의 9년제 인문계 중등교육기관이다. (다만, 구동독에 속했던 일부의 주들은 아직도 과거 통독 이전의 방식대로 12학년제를 유지하고 있다.) 근래에 미국이나 한국뿐 아니라 유럽의 여러 국가의 영향을 받아, 이러한 독일의 전통적 13학년제를 12학년제로 낮추자는 주장이 독일 소수정당인 자민당(FDP)을 비롯하여 일부에서 제기되고 있는 것이 사실임에도, 독일의 전반적 분위기는 아직도 이미 수백년 전부터 시행하고 있는 현 제도의 존속에 찬성하고 있다.

<표 3> 독일 김나지움의 교과과정 (주당 시수)
(자료: Internet [1])

<table>
<tr><th rowspan="2">과 목</th><th rowspan="2">5 학년</th><th rowspan="2">6 학년</th><th rowspan="2">7 학년</th><th rowspan="2">8 학년</th><th colspan="2">9학년</th><th colspan="2">10학년</th><th colspan="2">11학년</th></tr>
<tr><th>문과</th><th>이과</th><th>문과</th><th>이과</th><th>문과</th><th>이과</th></tr>
<tr><td>종 교</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>국 어 (독일어)</td><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>지리/지구과학</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>역 사</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>일반사회</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>제1외국어</td><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>제2외국어</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>5</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>제3외국어</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>수 학</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>물 리</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>화 학</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>생 물</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>자연현상 관찰</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>자연과학 실습</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>체 육</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>음 악</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>미 술</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>계</td><td>29</td><td>30</td><td>30</td><td>31</td><td>33</td><td>31</td><td>33</td><td>31</td><td>34</td><td>32</td></tr>
</table>

초등학교에서 대학에 이르기까지 모든 교육의 주체는 주정부인 관계로, 김나지움의 교과과정 역시 주에 따라 다소의 차이는 있지만 큰 틀로 본다면 대체로 유사하다. 이수과목을 보면 국어인 독일어를 비롯하여 영어를 포함한 적어도 2개 이상의 외국어(주로 불어, 라틴어가 선택되는데, 학교에 따라서는 그리스어, 스페인어, 이태리어, 덴마크어, 러시아어 등도 선택)와 수학, 물리, 화학, 생물, 지리, 역사, 사회, 종교 등을 필수로 이수해야 하며, 그 외에도 주 또는 학교에 따라서 체육, 음악, 미술, 기술 등의 과목을 선택으로 이수한다. 예를 들어 바덴뷔템베르크주의 경우, <표 3>에서 보듯이 이과는 외국어를 2개 이수하는데 반하여, 문과의 경우는 3개의 외국어를 이수하도록 규정하고 있음을 볼 수 있다. 한편 12학년과 13학년의 마지막 2년(주에 따라서 11학년부터 13학년의 3년)동안에는 각 개인이 자신의 '기본선택과목'으로 5-6개의 교과목과 '전공선택과목'(Leistungskurs)으로 2과목(단, 라인란드팔츠주와 자알란트주만은 예외적으로 3과목)을 의무적으로 선택하여 이수해야하는데, 이 기간동안에는 이 두 종류의 선택과목 이외의 교과목은 수강하지 않으며, 특히 전공선택과목의 경우는 기본과목에 비해 상대적으로 더 많은 수업시간과 더 깊이 있는 교과내용을 공부하게 된다. 국어(독일어)와 수학은 기본 또는 전공선택과목으로 반드시 이수해야 하는 한편, 대다수의 학생들은 대학에서도 전공선택과 목과 관련된 학문을 전공하여 공부하고 있다.

3. 독일의 수학교육과정

독일 현행 수학교육과정의 기본 가이드라인은 1968년 KMK, 즉 '상설 독일연방공화국 주(州) 문화부장관회의'[5]에서 설정되었으며, 이 기준에 맞추어 각 주정부는 4년 이내에 새로운 교과과정을 개편하는 것으로 결의되었다. 그러나 그 기준은 각 주의 실정에 맞추어 융통성있게 편성할 수 있도록 매우 포괄적으로 설정되어진 관계로, 각 학년별 세부적 내용에서는 주별로 약간의 차이가 있다. 이 논문에서는 독일의 큰 주중 하나인 바덴뷔템베르크주의 김나지움 7-9학년의 수학과 교과과정을 소개하겠다(자료: Internet [4]).

5) Ständige Konferenz der Kulturminister der Länder in der Bundesrepblik Deutschland

(가) 7학년 과정

1. 유리수, 다항식 (35시간)

교육내용	참고사항
정수의 집합 Z, 유리수의 집합 Q (집합 N, Z, Q의 비교)	정수의 집합 Z에서 유리수의 집합 Q로의 확장
유리수의 대소관계와 절대값	
유리수 Q에서의 사칙연산 및 관련된 기본성질	
변수가 없는 항의 분석 및 단순화	
변수를 가진 항의 연산, 식의 값, 다항식의 변환	항의 설정 포함

2. 기하학에서의 작도 (22시간)

교육내용	참고사항
이등변삼각형	
기본적 작도와 그의 서술	구두 및 문장으로 보고 및 설명
거리관계와 수직성	
삼각형에서 각과 변 사이의 관계	
평행선과 그의 작도 (평행선 군, 선분의 이등분)	
평행선과 동위각, 엇각	정리의 역도 성립
삼각형과 사각형의 내각의 합	
Thales의 정리	Thales von Milet (기원전 약 600년경) 그리스의 수학자
자와 컴퍼스를 이용한 작도법: 수직이등분선, 각의 이등분선, 평행선 쌍, Thales 원 등	원의 접선도 포함

3. 실용수학: 퍼센트 계산 (15시간)

교육내용	참고사항
전자계산기	전자계산기의 사용법 및 여러 수학적 기능에 대해 교육 (그러나 기본 연산에 대하여는 수작업으로도 언제나 가능하도록 지도)
퍼센트 계산	1. 사회, 환경, 기후, 교통, 에너지, 물건의 구매, 선거 등 실생활에서의 퍼센트 2. 학교가 소재한 자치단체 관련된 여러 분야에서의 비율 계산

(나) 8학년 과정

1. 일차함수와 일차방정식 (15시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
직교좌표평면	René Descartes(1596-1650)
일차함수와 그래프	
일차방정식과 일차부등식 (등식과 부등식에서의 동치 변환)	계수가 (상수가 아닌) 변수인 경우도 간단한 문제 에 한하여 취급

2. 도형과 도형의 합동 (40시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
	증명과 관련된 내용들 숙지(예: 정의, 가정, 결론, 증명, 정리와 역, 정리의 일반화, 직접 및 간접증명법 등)
합동인 도형과 그의 성질 (평행이동, 선대칭이동, 점대칭이동)	
도형의 합동	
삼각형의 합동조건	직각삼각형의 합동조건 포함
삼각형의 내심과 외심 삼각형의 무게중심, 수심	학생들에게 적절한 증명문제 제시
삼각형의 작도	
사각형, 특별한 사각형 (사각형의 작도)	문제를 통하여 정리와 역, 증명방법 지도
평행사변형, 삼각형, 사다리꼴의 넓이	

3. 다항식, 분수식, 분수방정식 (30시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
다항식의 전개 전개공식	완전제곱꼴 변형 포함
$n>2$일 때의 이항정리 (파스칼삼각형)	
다항식의 인수분해	
분수식과 그의 정의역	
분수방정식(미지수 1개) 동치변환, 정의역과 해집합	간단한 분수부등식 도입

4. 실용수학: 종속성 (15시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
	물리학과의 공동작업
일차함수, 일차방정식, 분수방정식의 활용	문제에 적합한 미지수 설정 방정식 또는 함수의 식의 설정 선형증가, 물체의 운동, 전자제품들의 에너지적 경제성

5. 컴퓨터 교육 (30시간): 별도교재 사용

교 육 내 용	참 고 사 항
기본적 도구	컴퓨터, 주변기기, 프로그램
기초적 이론	하드웨어와 소프트웨어 마이크로프로세서, 메모리, 칩, 디스켓 알고리즘, 프로그램언어, 프로그램, OS-시스템
실제 작업	컴퓨터 시작하기 프로그램 또는 자료 불러내기, 작성하기, 컴파일하기, 저장하기, 인쇄하기 등 디스켓 포맷
주변기기의 기능	키보드, CPU, 메모리, 모니터, 프린터, 디스켓 또는 CD 내장장치, 하드디스크, 마우스
기존 프로그램의 사용법	MS-Word, 게임 등
간단한 프로그램의 작성	수리적 문제와 비수리적 문제 간단한 프로그램 명령어 자료의 INPUT과 OUTPUT
컴퓨터 정보화의 사회적 영향	가정 및 사회의 변화 (개인적, 공동체적, 경제적) 직장 또는 여가생활의 편리성자료보호, 저작권 문제 등

(다) 9학년 과정

1. 일차연립방정식 (25시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
이원일차연립방정식 그래프를 통한 해집합	
이원일차연립부등식	
이원일차연립방정식의 해법-가감법	여러 형태의 연습문제
3원 이상의 간단한 연립방정식	몇 개의 예제로 충분
선형계획법	전자계산기 또는 컴퓨터 이용

2. 실수 (16시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
유리수의 불완전성	수직선 위의 점의 집합과 비교 Richard Dedekind (1831-1916)
실수와 그의 표현	
제곱근	제곱근의 값 분모의 유리화 제곱근의 계산
제곱근의 근사값 구하기 (구간이등분법, Heron의 방법)	관련 프로그램 이용 및 분석

3. 이차함수와 이차방정식 (30시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$와 그래프	실제적 예를 통한 이차함수의 도입 프로그램을 이용하여 그래프 추적 x축, y축으로의 평행이동 완전제곱을 이용하여 꼭지점 찾기
이차방정식의 풀이	다른 방정식에의 활용 포함 (분수방정식, 무리방정식)
이차방정식의 해 (서로 다른 두 실근, 중근, 허근) 판별식	
Viète의 정리	François Viète (1540-1603)
이차식의 인수분해	
무리함수와 그래프	역함수의 개념은 도입 안함
간단한 무리방정식	
무리부등식	그래프를 통한 풀이법
활용	실생활에서의 이차함수와 이차방정식의 활용 최대값 및 최소값

4. 도형의 닮음, 피타고라스의 정리 (38시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
점대칭이동과 닮음이동	
닮음정리 닮음변환과 그의 성질	물리학 문제와 연관
도형의 닮음 삼각형의 닮음조건	
피타고라스의 정리 대각선정리, 높이정리 피타고라스의 정리의 역	Pythagoras(기원전 약 550년) 예각, 직각, 둔각삼각형
평면 및 공간에서의 길이 계산	닮음정리와 피타고라스의 정리 이용
피타고라스의 수	

5. 발견과 증명 (17시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
원주각의 정리	
실험, 추측, 정리, 증명, 정리의 일반화	원에서의 정리 또는 피타고라스의 정리와 관련된 실제적 제반 문제 이용 계산: 컴퓨터 또는 전자계산기 이용
문제풀이 또는 증명을 위한 전략 (황금분할 도입)	

IV. 교과서 내용의 비교 및 분석

1. 수와 연산

정수와 유리수가 7학년에서 도입되고 그의 사칙연산 및 관련 성질은 7-8학년에 걸쳐 다루어지며, 9학년에서는 무리수를 포함한 실수와 그의 연산을 다루고 있는 양국의 교과과정은 대체로 유사하다. 그러나 교과서의 내용을 살펴보면 몇 가지 차이점이 발견된다.

첫 번째는 수학의 전 분야에서 사실상 가장 기초가 되고 있는 집합의 개념에 대한 도입시기이다. 한국의 경우, 집합의 개념 및 연산에 대한 기초적 개념은 7학년에서 배우며 더 심도있는 이론은 10학년 과정에서 다루어지고 있는데 반하여, 독일 중학교 교과과정에서는 집합의 개념 및 연산에 대하여는 거의 언급하지 않고 있으며, 다만 자연수와 정수, 유리수, 실수의 집합이 각각 N, Z, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$로 표기되어 있다는 것이다.

또 다른 하나의 차이점은 예제나 연습문제 등에 나타나고 있는 문제들의 유형에 있다. 교과내용을 도입하는 방법에 있어서는 주로 실생활 속에서의 수학적인 문제들을 통하여 유도되고 있다는 점에서 양국이 별 차이가 없다. 그러나 예제나 연습문제의 경우, 한국 교과서에는 거의 대부분이 이론적인 문제들로 채워져 있는 반면에 독일의 경우에는 실생활 속에서 부딪히는 실제적 응용문제들이 다수를 차지하고 있다. 또 연습문제에 제시된 문항수를 볼 때에도, 독일 교과서가 한국 교과서에 비해 월등히 많다는 점도 큰 차이 중 하나이다. 이러한 차이는, 교과서에 제시된 문제들을 빠뜨림 없이 모두 풀어야 하는 한국의 학교교육에 비해, 담당교사의 재량에 따라 임의로 선택된 문제만 다루어도 무방한 독일의 교육제도에서 이해될 수 있을 것이다.

(1) 정수

한국에서는 7학년에서 자연수의 기본성질이 되는 소수(prime), 소인수 분해, 거듭제곱 등을 먼저 다룬 후에 여러 가지 진법들 중 가장 간단한 십진법과 이진법을 도입하고 있는데 반하여, 독일의 경우에는 먼저 이진법과 오진법, 지수표현 등에 관한 내용들을 5학년에서 간단히 공부한 후에 6학년에 이르러서 소수(prime) 및 소인수분해를 다루고 있다. 이는 자연수와 관련된 내용들이 대체로 한국에 비하여 저학년에서 다루어진다는 것을 의미하고 있으며, 따라서 난이도가 높은 내용은 거의 취급되지 않고 있다.

이제 독일교과서에서 제시하고 있는 최대공약수를 구

하는 3가지 방법을 간략히 소개한다. 이 3가지 중 마지막 3번째는 '유클리드의 알고리즘' 원리를 이용한 방법으로, 한국에서는 다루지 않는 매우 이색적이고도 흥미로운 내용이다.

[예제] 21과 6의 최대공약수를 구하여라.

<풀이> (1) 두 수의 공약수 중 가장 큰 수를 최대공약수로 정하는 방법이다.

이 문제의 경우

21의 약수: 1, 3, 7, 21

6의 약수: 1, 2, 3, 6

이므로, 21과 6의 공약수는 1과 3이 되고 따라서 최대공약수는 3이다. 한편, 한국에서는 초등학교 5학년에서 이와 같은 방법을 설명하고 있다.

(2) 소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구하는 방법이다.

이 문제의 경우

$$\begin{array}{r} 21 = 1 \cdot 3 \cdot 7 \\ 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ \hline 1 \cdot 3 \end{array}$$

따라서 구하는 21과 6의 최대공약수는 $1 \cdot 3 = 3$이 된다. 한편, 한국의 경우에는 중학교 1학년(7-가)에서 이와 같은 내용을 다루고 있다.

(3) 가위와 종이를 이용하여 계속적으로 절단함으로 최대공약수를 구하는 방법인데, 이를 위해서는 우선 가로 21(cm), 세로 6(cm)인 직사각형의 종이를 준비한 후, 다음의 순서를 따른다.

① 한쪽 모서리를 접은 후, 그림과 같이 세로로 접힌 부분을 가위로 오린다. 그러면 가로의 길이가 21-6=15(cm)인 직사각형을 얻는다.

② 가로의 길이가 세로의 길이보다 작아질 때까지 위의 절차 ①을 계속한다. 이 문제의 경우는 이 절차를 모두 세 차례 계속하면

21-6 = 15(cm)

15-6 = 9(cm)

9 -6 = 3(cm)

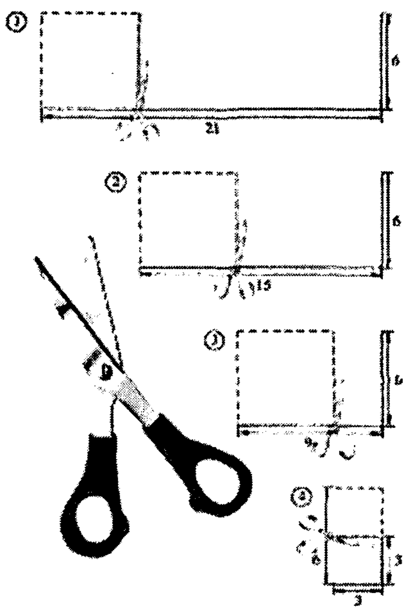
가 된다.

④ 이제는 가로의 길이가 세로의 길이보다 짧으므로 가로와 세로를 바꾸어서 다시 위의 절차를 계속한다. 이 문제의 경우는 모두 두 차례를 시행하면

6-3 = 3(cm)

3-3 = 0(cm)

가 되어 세로가 더 이상 남지 않는다. 그러면 마지막으로 남아있는 3이 21과 6의 최대공약수이다



(2) 유리수

유리수 특히 음수의 도입과 사칙연산에 대한 구체적인 유도과정에서의 차이점들을 설명하기 전에, 먼저 양국교과서에 나타난 표기상의 차이점을 지적하겠다.

소수(Decimal)를 표현할 때는 우리가 쓰는 '점(.)' 대신에 '콤마(,)'를 사용하고 있으며, 반대로 자릿수를 표시하는 '콤마' 대신에는 '점'을 사용하고 있다. 예를 들어 한국의 소수 3.54(=3 point 54)를 독일에서는 3,54(=3 comma 54)로, '백만'의 우리 표현 1,000,000 대신에 1.000.000으로 표기한다. 또 수의 곱셈과 나눗셈을 나타낼 때에도 우리가 흔히 쓰는 표현 3×5, 3÷5 대신에 3·5, 3 : 5로 표기하고 있으며, 다른 한편 순환소수의 표현에 있어서도 약간의 차이를 보이고 있다. 예를 들어 순환소수 0.627627627…의 경우 한국에서는 $0.\dot{6}2\dot{7}$로 표

기하고 있는 반면, 독일에서는 $0.\overline{627}$로 쓰고 있다.

수의 범위를 자연수에서 정수 또는 유리수로 확장시키기 위하여 필요한 것은 음수의 도입과 그의 연산이다. 먼저 음수의 도입의 경우를 보면, 일상생활에서 흔히 볼 수 있는 온도계에서 빙점인 0도를 기준으로 영상온도와 영하온도를 통하여 음수를 설명하는 과정은 양국이 유사하다. 그러나 독일의 경우는 추가로 우주선의 발사 장면을 통하여 음수의 의미를 강조하여 지도하고 있는 것이 이색적이다. 즉, 우주선의 발사장면을 5초 전, 4초 전, 3초 전, 2초 전, 1초 전, 0(발사), 발사 1초 후, 2초 후, 3초 후, 4초 후, 5초 후 등의 실제적 과정을 사진으로 직접 제시, 학생들에게 음수와 양수의 의미를 더욱 분명하게 부각시키고 있는 것이다. 물론, 발사 전의 수 5, 4, 3, 2, 1은 음수 -5, -4, -3, -2, -1로, 발사 후의 수 1, 2, 3, 4, 5, 즉 기존의 자연수는 양수로 정의되었고, 더불어 수의 영역이 정수의 범위로 확장되었다.

이제 음수가 포함된 유리수의 사칙연산을 살펴보면, 우선 덧셈과 뺄셈의 경우는 설명이나 유도방법 등에서 양국 사이에 별 차이를 보이고 있지 않다. 그러나 곱셈의 경우는 방법론적 차원에서 중요한 차이점이 발견된다. 특히 (양수)×(음수) 및 (음수)×(음수)의 경우, 아래의 설명에서 보듯이 한국에서는 귀납적 방법인 '외삽법', 즉 자연수 연산에서 정수 연산에로의 귀납적 확장[우정호(2001), pp. 212-214]을 통해 음수의 곱셈을 지도를 하고 있는 반면, 독일의 경우는 1872년에 Hankel이 주장한 '형식불역의 원리'[6]를 이용하여 설명하고 있는 것이다.

먼저 (음수)×(양수)의 연산방법은 양국이 유사하다. 예를 들어 (-5)×(+3)의 경우, 양국교과서는

$$(-5)\times(+3)=(-5)+(-5)+(-5)=-15$$

의 방법으로 설명하고 있다.

그러나 (양수)×(음수) 또는 (음수)×(음수)의 경우는 양국이 전혀 다르게 설명하고 있다. 예를 들어 (+5)×(-3)와 (-5)×(-3)의 경우, 먼저 한국교과서의 설명을 보자. (단, 좌측은 (+5)×(-3), 우측은 (-5)×(-3)의 계산절차이다.)

$$\begin{array}{ll} (+5)\times(+3)=+15 & (-5)\times(+3)=-15 \\ (+5)\times(+2)=+10 & (-5)\times(+2)=-10 \\ (+5)\times(+1)=\ +5 & (-5)\times(+1)=\ -5 \end{array}$$

에서 보듯이 곱하는 수가 1씩 작아짐에 따라 왼쪽편의 값도 5씩 작아지므로 (오른쪽은 커지므로), 따라서 곱하는 수가 계속해서 1씩 작아지면 그의 값도 역시 계속해서 5씩 작아지거나 커질 것이다. 즉,

$$\begin{array}{ll} (+5)\times\ 0 =\ 0 & (-5)\times\ 0 =\ 0 \\ (+5)\times(-1)=\ -5 & (-5)\times(-1)=\ +5 \\ (+5)\times(-2)=-10 & (-5)\times(-2)=+10 \\ (+5)\times(-3)=-15 & (-5)\times(-3)=+15 \end{array}$$

가 되고, 이로부터

(양수)×(음수)=(음수), (음수)×(음수)=(양수)

가 유도되는 외삽법의 원리로 설명되어 있다.

이제 독일교과서는 이를 어떻게 설명하는가를 보겠다. 먼저 (양수)×(음수) 예를 들어 (+5)×(-3)의 경우는 (-3)×(+5) =-15임을 이미 알고 있으므로 교환법칙을 이용하여

$$(+5)\times(-3)=(-3)\times(+5)=-15$$

로 설명하고 있다.

이어서 (음수)×0의 경우, 예를 들어 (-5)×0을 보자. 우선 0×0=0이므로 [(+5)+(-5)]×0=0이다. 배분법칙을 이용하면 (+5)×0+(-5)×0=0가 되는데, 우리는 이미 (+5)×0=0이라는 사실을 알고 있으므로 따라서 (-5)×0=0으로 설명되어 있다.

이제 마지막으로 (음수)×(음수), 예를 들어 (-5)×(-3)에 대한 설명을 보자. 먼저 위의 결과 (-5)×0=0으로부터

$$(-5)\times[(+3)+(-3)]=0$$

이 성립한다. 이 식은 배분법칙에 의하여

$$(-5)\times(+3)+(-5)\times(-3)=0$$

이 되는데, 여기서 우리는 (-5)×(+3)=-15 임을 알고 있으므로, 위 식은 -15+(-5)×(-3)=0으로 변환되고, 따라서 덧셈에 대한 역원의 성질에 따라

$$(-5)\times(-3)=+15$$

6) 형식불역의 원리: 수의 연산을 일상의 실제적 모델에서 찾는 대신에, 형식적으로 양수의 연산에서 성립되는 교환법칙, 결합법칙 및 분배법칙을 음수의 연산까지 확장시켜 만든 형식적 수의 연산 원리이다. 한편 Freudenthal은 방정식의 일반해로서 음수를 형식적으로 도입하고 음수의 연산 역시 대수적인 형식불역의 원리를 이용하여 교육할 것을 주장하였다. [우정호(2001), pp.203-207; 우정호(2002), pp.99-101, pp.160-166]

으로 설명하고 있다. 이는 곧, 형식불역의 원리가 적용되고 있음을 볼 수 있다.

(3) 실수

수의 개념이 단지 유리수의 범위로 제한되어 있던 학생들에게 수의 범위를 실수로 확장시키기 위하여 요구되는 무리수의 도입은, 다른 어떤 새로운 교과내용에 비하여도 가장 이해하기가 힘든 개념 중 하나일 것이다. 따라서 이 단원에서 우리는, 제곱근의 사칙연산, 분모의 유리화 등 무리수가 포함된 여러 형태의 연산이나 또는 실수의 대소관계 등의 계산적인 차원보다는 좀 더 근원적인 문제, 즉 무리수, 특히 제곱근을 어떻게 도입할 것인가? $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$ 등의 수들은 왜 유리수가 아닌가? 또 이러한 무리수의 근사값은 어떻게 추적할 수 있는가? 등의 3가지 문제에 비교의 초점을 맞추어 보았다.

먼저 첫 번째 문제인 제곱근의 도입방법, 즉 제곱해서 a가되는 수 중 양수를 $\sqrt{a}$, 음수를 $-\sqrt{a}$로 정의하는 대수적 설명을 비롯하여 정사각형의 대각선의 길이를 통하여 제곱근의 값을 수직선상에 표현하는 기하학적인 설명 등은 양국사이에 큰 차이를 보이지 않고 있다. 그러나 두 번째 문제, 즉 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$ 등의 분수표현의 불가능성 문제와 세 번째의 제곱근의 근사값을 구하는 문제는 한국에 비해 독일교과서에서 훨씬 구체적으로 설명하고 있다.

먼저 $\sqrt{2}$의 분수표현의 불가능성에 대한 설명을 보자. 한국교과서에는 단지 $\sqrt{2}$의 값이

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\cdots$$

인데, 이 소수는 순환하지 않으며, 따라서 $\sqrt{2}$는 분수로 표현할 수 없다고 직관적으로 설명하고 있는 반면, 독일교과서에는 다음과 같이 매우 구체적으로 설명하고 있다.[7)]

여기서 $d=\sqrt{2}$라 놓으면 $d^2=2$이다. 먼저 $1^2=1$이고 $2^2=4$이므로, $1<d<2$임은 분명하다. 이제 d가 $d=\frac{q}{p}$(단, p, q는 양의 정수)인 기약분수로 표현되었다고 가정하자. 그러면 d는 정수가 아니므로 분모 $p\neq1$이다. 이제 양변을 제곱하면

$$d^2=\left(\frac{q}{p}\right)^2=\frac{q^2}{p^2}=\frac{q\cdot q}{p\cdot p}$$

인데, 이 분수 역시 기약이므로 분모는 1이 아니다. 따라서 d^2은 정수, 특히 2가 될 수 없다.

이제 마지막으로 세 번째의 문제, 즉 제곱근의 근사값을 구하는 문제를 보자. 예를 들어 $\sqrt{2}$의 근사값을 얻기 위하여, $1^2=1$, $2^2=4$이므로

$$1<\sqrt{2}<2$$

이다. 또한 $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$이므로

$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$

이다. 계속해서 $1.41^2=1.9881$, $1.42^2=2.0164$이므로

$$1.41<\sqrt{2}<1.42$$

등의 방법을 계속함으로 $\sqrt{2}$의 근사값을 추적하는 방법은 양국이 동일하게 제시하고 있다. 하지만 한국교과서에는 유일하게 이와 같은 한 가지 방법만이 제시되어 있는 반하여, 독일교과서에는 이외에도 '구간이등분법'[8)]과 'Heron의 방법' 등에 대한 설명과 함께 이 두 가지 방법에 대한 알고리즘까지 제시되어 있다. 여기서 독일교과서에 제시된 'Heron의 방법을 요약하면 다음과 같다.

양수 a의 제곱근 $\sqrt{a}$의 값을 구하기 위하여 우선 $x_0^2\geq a$를 만족하는 임의의 근사값 x_0를 선택한 후, $n\geq1$에 대하여 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$에 의하여 $\sqrt{a}$의 값에 수렴하는 수열 $x_0, x_1, x_2, \ldots$이 얻어진다.

참고로 한국에서는 고등학교, 즉 10학년 이후에 다루어지는 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}$와 무리방정식까지도 독일에서는 9학년 교과서에 나타나 있다.

2. 문자와 식

이 영역에 나타난 양국 교과서 사이의 근본적인 차이점을 말한다면, 다른 영역과는 달리 교과의 내용보다

7) 물론 이 정리에 대한 명확한 수학적 증명은 양국이 모두 고등학교의 과정에서 다루고 있다.

8) 구하는 제곱근의 값을 포함하는 임의의 구간을 설정한 후, 그 제곱근이 포함되는 구간을 계속적으로 이등분함으로 제곱근의 값을 압축하는 방법.

는 오히려 형식적인 면에서 두드러지게 나타나고 있다. 그 중에서 중요하다고 생각되는 차이점을 보면 다음과 같다.

첫 번째로는 문자와 식에 관한 교과과정의 학년별 배분비율에 관한 것이다. 한국에서는 이 영역에 대하여 7학년, 8학년, 9학년에서 거의 같은 비율로 취급하고 있는데 반하여, 독일의 교과서에는 7, 8, 9학년에서 대체로 1:2:3의 비율로 나타나 있다. 실제로 독일의 7학년 교과서에는 문자와 식에 관한 내용에 대하여 별도의 단원으로 설정되어 있지 않으며, 단지 도형이나 수와 연산, 기타 여러 단원에서 어떤 법칙이나 성질들을 표현하는 과정에서 문자를 사용하여 설명하고 있을 따름이다.

두 번째로 나타난 양국 교과서의 형식적인 차이는 수식을 표현할 때 사용되는 문자 및 기호에 관한 것이다. 한국은 수식의 문자로써 오로지 영어의 대문자와 소문자인 A, B, C, $\cdots$, a, b, c, $\cdots$만을 사용하고 있는 반면, 독일교과서에서는 이외에도 그리스문자 α, β, γ, $\ldots$를 함께 사용하고 있는 것이다. 또 하나의 차이점은 좌표를 표현하는 방식에서 찾을 수 있는데, 예를 들어 한국에서 (x, y)로 표현되는 2차원 평면좌표를 독일의 교과서에서는 $(x \mid y)$와 같이 기호 $(\mid)$를 사용하고 있다. 따라서 한국의 좌표 표현

$$P(a, b) \quad \text{또는} \quad P(x, f(x))$$

대신에 독일교과서에서는

$$P(a \mid b) \quad \text{또는} \quad P(x \mid f(x))$$

로 표기한다. 수식의 표현방법에서 하나만 덧붙인다면, 다음 단원의 함수를 표현할 때, 한국의 대부분의 교과서에서는 x와 y의 관계라는 의미에서

$$y = (\text{변수 } x\text{의 식})$$

와 같은 모양으로 표현하는 반면, 독일의 경우는 함수임을 명시하기 위하여

$$f(x) = (\text{변수 } x\text{의 식})$$

의 형태로 쓰고 있다.

세 번째로 양국의 교과서에 나타난 형식적인 차이는 다항식을 표현하는 변수들의 개수에 관한 것인데, 예제 또는 연습문제에서 제시된 다항식들의 경우, 한국교과서는 2변수 다항식들만을 다루고 있는 반면에 독일의 교과서는 3, 4변수의 다항식까지도 다루고 있다. 이는 독일에서는 한국에 비하여 변수의 폭을 보다 다양하게 사용하고 있음을 볼 수 있다.

(1) 문자식의 계산

문자를 활용한 수와 양의 관계식에 대하여 한국교과서에서는 비례에 의한 일차식의 개념을 도입함으로써 비교적 상세히 설명되어 있으나, 독일교과서는 이러한 내용을 별도로 다루지 않고 있다. 다만 이러한 문자를 사용한 식을 일차함수의 개념에 포함시켜 설명하고 있다고 보아야 할 것 같다. 또한 주어진 문자식에 어떤 값을 대입하여 얻어지는 식의 값 역시 함수의 값을 계산하는 것으로 대체하고 있는 것이다. 이러한 방식은 수와 연산 및 규칙성과 함수 영역에서도 마찬가지이다.

이 단원의 가장 두드러진 차이점은 괄호들로 묶여져 있는 다항식들을 간단한 형태로 정리하는 과정에서 잘 보여주고 있다. 이러한 다항식에 대하여, 한국에서는 주어진 다항식에 포함된 괄호들을 모두 풀어준 다음 이를 동류항끼리 묶어서 계산하는 방법으로 설명하고 있는 반면, 독일교과서에서는, 앞 단원 음수의 곱셈의 도입과정에서와 마찬가지로, 유리수의 대수적 법칙인 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙 등을 사용하는 보다 복잡한 방법으로 설명하고 있다. 예를 들어 다항식 $(2x+4y)+3x$를 간단히 정리하는 문제를 보자. 한국의 경우는

$$\begin{aligned} & (2x+4y)+3x \\ &= 2x+4y+3x \quad \cdots\cdots \text{괄호를 푼다.} \\ &= (2x+3x)+4y \quad \cdots\cdots \text{동류항끼리 정리} \\ &= (2+3)x+4y \quad \cdots\cdots \text{배분법칙} \\ &= 5x+4y \end{aligned}$$

와 같이 수의 몇 가지 기본원리를 숙지한 다음 가급적 신속하게 결과를 얻을 수 있도록 지도하고 있는 반면, 독일교과서에는 아래와 같이 대수학의 기본 법칙들을 적절히 적용하여 식을 간단한 형태로 변환시키는 방법으로 설명되어 있다.

$$\begin{aligned} & (2x+4y)+3x \\ &= 2x+(4y+3x) \quad \cdots\cdots \text{결합법칙} \\ &= 2x+(3x+4y) \quad \cdots\cdots \text{교환법칙} \\ &= (2x+3x)+4y \quad \cdots\cdots \text{결합법칙} \\ &= (2+3)x+4y \quad \cdots\cdots \text{배분법칙} \\ &= 5x+4y \end{aligned}$$

이는 계산의 신속성보다는 대수적 사고력 배양에 더 비중을 두고 있음을 입증해주고 있다.

한편 다변수식의 연산에 나타난 9학년까지의 교과내용을 보면, 한국의 경우는 2변수 1차 다항식들의 덧셈과 뺄셈 및 1변수 2차 다항식들의 덧셈법에 대하여만 다루어지고 있는데 반하여, 독일교과서에서는 이 외에도 2변수 3차 다항식들의 덧셈과 뺄셈까지 취급하고 있다. 또 곱셈의 경우도, 한국교과서에는 단지 2변수 1차 또는 3변수 2차 다항식과 1변수 단항식과의 곱셈문제들만이 나타나 있는 반면에, 독일교과서에서는 2변수 4차 다항식들의 곱셈문제까지도 다루어지고 있다. 이러한 양국의 수준차이는 나눗셈 계산에서도 유사한데, 이는 <표 2>에서 보듯이 독일 김나지움의 학생비율(약 30%)과 한국 중학교의 학생비율(95% 이상)간의 현저한 차이에서 이해될 수 있을 것이다.

(2) 방정식과 부등식

방정식과 함수는 도입하는 순서로 볼 때 양국이 서로 반대이다. 일차함수와 일차방정식의 경우만 보더라도, 한국에서는 일차방정식과 부등식, 일차연립방정식 등을 먼저 배운 후 일차함수를 다루는 반면, 독일교과서에서는 정반대로 일차함수 및 그래프가 먼저 나타나고 이어서 일차방정식 및 부등식을 다루고 있다. 이러한 상반된 도입순서로 인하여 방정식을 접근하는 과정에서 한국은 대체로 이론적 또는 계산적인데 반하여, 독일은 주로 그래프를 통한 개념의 이해에 초점을 맞추고 있다. 따라서 한국교과서는 대체로 이해가 쉽고 주로 단순 명료한 장점이 있는 반면에 좀 더 본질적인 문제, 예를 들어 해의 존재 여부 또는 해의 개수 등의 문제를 파악하는 데는 사실상 한계가 있다. 한편 독일교과서는 두 함수의 그래프의 교점을 통하여 해의 존재성을 파악할 수 있다는 점에서 수학적인 사고 및 판단력에는 큰 역할을 하고 있는 반면에, 방정식을 처음 접하는 학생들에게는 다소 난해한 단점이 있다. 예를 들어보자. 방정식

$$3x+1=3x-4$$

의 경우, 두 함수 $f(x)=3x+1$과 $g(x)=3x-4$의 그래프는 서로 평행하므로 이 방정식의 해가 존재하지 않는다는 설명은 수학적으로 명료하고 설득력이 있는 반면, 이를 단지 등식의 성질을 이용하여 양변에서 $3x$를 빼면

$$1=4$$

가 되어 모순이 생기므로 해가 존재하지 않는다는 이론은 수학적으로 다소 무리가 있기 때문이다.

그밖에는 대부분 영역의 공통적인 차이점, 예를 들면 연습문제의 개수 또는 난이도의 차이, 교과내용의 학년별 배치의 차이 등 몇 가지를 제외하면 양국 교과서의 방정식과 부등식에 관련된 내용은 전반적으로 유사하다.

3. 규칙성과 함수

우선 한국의 경우, 함수가 7학년에서 도입되어 8학년에서는 일차함수, 9학년에서는 이차함수를 다루고 있는 반면, 독일의 경우는 8학년에서 함수의 도입 및 일차함수를 배우고 이차함수는 한국과 마찬가지로 9학년에서 공부한다. 이 영역에서는 양국 교과서 사이의 내용상의 중요한 차이점 2가지만을 지적하겠다.

첫 번째 차이는 함수 영역에서뿐만 아니라 전체 교과서에서 나타나는 공통적인 경향으로, 한국의 경우는 대체로 이론적인 설명이나 풀이가 주가 되는 반면, 독일에서는 일상생활 속의 여러 가지 문제들을 수학의 문제로 이끌어내는 방법, 즉 Hankel의 '재현의 원리'[9]에 입각하여 설명하고 있는 것이다.

예를 들어 함수를 도입하는 과정의 경우, 독일교과서에는 하루의 날씨의 변화, 어떤 사람의 나이와 키와의 관계, 돌을 지상에서 수직으로 던졌을 때의 시간과 지상으로부터의 높이의 관계 등 여러 실제적인 문제들을 실험을 통하여 그래프로 표현함과 더불어, 이를 통하여 직선, 포물선, 쌍곡선 또는 임의의 여러 형태의 곡선의 유형 및 상태를 주지시키고 있는 반면에, 한국에서는 단지 비례관계와 반비례관계의 설명 및 그의 관계식 $y=ax$와 $y=\frac{a}{x}$를 유도하는 문제와 그 외에 몇 개의 관련된 응용문제들을 다루는 것에 그치고 있다.

두 번째의 중요한 차이점은 컴퓨터를 통한 수학관련

9) 재현의 원리: 다윈의 생물학적 발달이론을 근거로 19세기말에 Hankel이 형식화한 교육학의 기본 이론[우정호(2001), pp. 53-66]. 이 이론은 수학교육에 있어서 기존의 경험 분석적 지도방법이나 Euclid적인 논리적 지도방법을 비판하고, 그 대안으로 함수의 개념을 비례관계, 종속변수, 특수한 대응관계 등의 점진적 절차에 따라 지도해 나가는 것이 보다 바람직한 방법이라고 주장하는 교육이론이다.

소프트웨어의 이용 여부이다. 즉, 어떤 관계식이 그래프로는 어떤 형태를 갖는가를 조사함에 있어서, 주어진 식을 만족하는 몇 개의 점들을 찾아 그 점을 좌표평면상에 표시하여 그래프의 형태를 추정하는 방법은 양국이 동일하나, 독일의 경우는 수학관련 소프트웨어를 한 가지 선정하여 그 프로그램을 이용하여 실제로 그래프를 그려보도록 교육한다는 것이다. 특히 이러한 소프트웨어의 사용은 그래프 군(群)의 변화를 파악하는데 큰 도움을 주는데, 예를 들어 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 경우, b와 c는 고정시키고 a의 값에 1부터 2까지 0.1의 간격으로 대입했을 때의 그래프들은 어떻게 움직이는지의 여부, 또는 a와 c는 고정시키고 b만 일정 비율로 변화할 때, 마찬가지로 a와 b는 고정하고 c가 일정비율로 변화할 때의 그래프 군(群)을 시각적으로 볼 수 있는 방법은 단지 컴퓨터를 이용해야만 가능하기 때문이다.

(1) 함수의 도입

먼저 도입하는 과정을 살펴볼 때, 한국에서는 단지 비례관계와 반비례관계만을 예로 설명하였고 또 그의 관계식을 유도하는 과정과 그 외에 여러 가지 관련성질들만을 중점적으로 다루고 있는 반하여 독일의 경우는 훨씬 다양하다. 즉, 비례나 반비례뿐 아니라 여러 형태의 실질적인 문제들을 그래프로 나타내는 표현하는 방법을 비롯하여 그래프의 증가와 감소상태, 증가하는 경우에도 얼마나 빨리 또는 천천히 증가하는가의 여부, 나아가서는 매끄럽게 변화하는가 그렇지 않은가의 여부 등, 그 그래프와 관련된 여러 수학적 성질들에 대하여 다각적으로 관찰하는 문제들이 나타나고 있다. 또 한국에서는 어느 한 지점 x_0에서의 함수값 $f(x_0)$를 얻는 방법에 있어서 그의 관계식 $y=f(x)$를 먼저 구한 후에 그 함수 식에 x_0를 대입하여 구하는 반면, 독일에서는 주어진 관계식보다는 관찰이나 실험 등을 통하여 얻어진 두 관계의 그래프를 통하여 x_0에서의 함수값 $f(x_0)$를 얻는다. 예를 들어보자.

[문제] 어느 용수철에 10g, 15g, 20g, 30g의 추를 달았더니 용수철의 길이가 각각 2cm, 3cm, 4cm, 6cm가 늘어났다고 하자. 이 용수철에 40g의 추를 달면 용수철은 얼마나 늘어나는가?

<풀이> 추의 무게를 xg, 용수철이 늘어난 길이를 $y$cm라 놓자. 독일의 경우는 먼저 주어진 값 (10, 2), (15, 3), (20, 4), (30, 6)을 그래프 위에 점으로 나타낸다. 이 몇 개의 점들을 통하여 이 그래프는 원점을 지나는 직선이 될 것으로 추정한 후, 추의 무게가 40g일 때의 늘어난 길이는 그래프 위에 실제로 직선을 그어 $x=40$에 대응하는 y의 값을 그래프에서 읽음으로 구하는 값 8을 얻는다. 물론 차후에 이 관계는 비례관계는 식 $y=\frac{1}{5}x$를 만족함을 확인하게 된다.

한편, 한국의 경우는 우선 '용수철이 늘어나는 길이는 추의 무게에 비례한다'는 사실을 전제로 하여 관계식을 $y=ax$로 설정하고, 이 식에 주어진 네 개의 값들 중 어느 하나, 예를 들어 (10, 2)를 대입함으로 식 $y=\frac{1}{5}x$를 얻는다. 이어서 이 식에 $x=40$을 대입함으로 $y=8$을 얻게된다.

이제 함수 및 관련 용어에 대해 살펴보자. 먼저 한국 교과서에는 함수가 다음과 같이 정의되어 있다.

> 변화하는 두 개의 양 x, y에서 한 쪽의 양 x가 정해지면 이에 따라서 다른 쪽의 양 y가 하나만 정해질 때, y를 x의 함수라 한다.

더불어 함수와 관련된 여러 가지 용어, 예를 들면 변수나 함수값, 정의역과 치역, 공역 등도 여러 함수의 예와 함께 자세히 정의 또는 설명되어 있다. 한국에서는 이와 같이 수학적으로 함수에 대하여 상당히 명확하게 정의되어 있는 반면, 독일에서는 함수에 대한 일반적인 정의없이 일차함수나 이차함수, 대응관계, 함수값 등에 대하여만 설명되어 있다. 이는 곧, 함수에 대한 명확한 정의가 중등과정의 학생들에게는 다소 무리가 따른다고 판단되었으리라 추측된다.

(2) 일차함수

독일 교과서에 나타나는 일차함수는 내용면에서 볼 때, 한국에 비해 현저히 적게 다루어지고 있다. 이 단원은 크게 그래프, 함수의 식, 활용의 세 부분으로 나눌 수 있는데, 활용부분의 경우는 양국 교과서가 문제만 다를

뿐 유형적인 면에서는 큰 차이가 없으므로 나머지 두 부분에 대하여 양국의 교과서를 비교한다.

먼저 일차함수의 그래프에 대하여 살펴보자. 한국 교과서를 보면, 일차함수 $y=ax+b$는 기울기가 a이고 y절편은 b가 되는데, 특히 기울기는

$$a=\frac{(\text{수직거리})}{(\text{수평거리})}=\frac{(y\text{값의 증가량})}{(x\text{값의 증가량})}$$

로 설명하였다. 아울러 x절편에 대해서도 여러 예제를 통하여 매우 구체적으로 다루고 있다. 또 일차함수의 성질에서는 함수의 증가와 감소, 즉 $a>0$이면 이 함수는 증가하며 $a<0$이면 감소한다는 것과, 또한 두 직선의 기울기가 같으면 서로 평행하고 또 그 역도 성립한다는 사실이 기록되어 있다.

한편 독일의 경우는 단지 기울기와 y절편, 함수값을 구하는 정도로 비교적 기본적인 내용만을 다루고 있다. 물론 기울기에 대하여는 한국과 마찬가지로

$$(\text{기울기})=\frac{(y\text{값의 증가량})}{(x\text{값의 증가량})}$$

로 설명되어 있으나, 시작의 기준점을 한국의 교과서와 같이 일반적인 임의의 점을 선택하지 않고 단지 y축과의 교점, 즉 y절편에서만 취급하였다.

이제 일차함수의 식을 구하는 문제에 대하여 검토해보자. 먼저 한국의 경우, 일반적인 일차방정식 $ax+by+c=0$(단, $a\neq0$, $b\neq0$)의 해집합은 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프 위의 점과 같음을 설명하고 있으며, 더욱이 $a=0$ 또는 $b=0$인 경우의 해집합인 x축 또는 y축에 평행한 그래프까지도 다루어진다. 또 일차함수의 식을 구하는 문제에 있어서도

(a) 기울기와 y절편이 주어지는 경우,
(b) 기울기와 직선 위의 한 점이 주어지는 경우,
(c) x절편과 y절편이 주어지는 경우,
(d) 직선 위의 서로 다른 두 점이 주어지는 경우,
(e) 그래프로 주어지는 경우

등 함수의 식을 여러 각도에서 분석하고 해결할 수 있는 능력을 요구하고 있다. 반면에 독일의 경우는 훨씬 간단한 편이다. 일차방정식 $ax+by+c=0$에서 $a=0$이거나 $b=0$인 경우의 그래프는 전혀 다루지 않으며, 또한 일차함수의 식의 경우, 위의 (a), (b), (d), (e)만을 다루며, (c)의 경우는 전혀 언급조차 하지 않고 있다. (d)의 경우에도 임의의 두 점이 아니고, 다음의 예제와 같이 적어도 한 점은 y축 위에 있는 경우에 한하여 제한적으로 다루고 있다.

[예제] 일차함수 $f(x)=mx+c$에서 $x=0$에서의 함수값 $f(0)$과 $x=a$(단, $a\neq0$)에서의 함수값 $f(a)$가 주어져 있을 때의 함수식은

$$f(x)=\frac{f(a)-f(0)}{a}\cdot x+f(0)$$

이다. 예를 들어 $f(0)=-4$, $f(3)=5$일 때의 일차함수의 식은

$$f(x)=\frac{5-(-4)}{3}\cdot x+(-4)$$
$$f(x)=3x-4$$

가 된다.

(3) 이차함수

독일과 한국교과서에서의 이차함수 단원에서 나타나는 뚜렷한 차이점을 한마디로 표현한다면 '내용은 유사, 전개과정은 상이'라 할 수 있을 것 같다. 그 이유는 먼저 내용면에서 볼 때, 이차함수의 정의에서 시작하여 일반적인 이차방정식 $y=ax^2+bx+c$(단, $a\neq0$)을 $y=a(x-\alpha)^2+\beta$인 형태로 변환시키는 절차에 이르기까지 독일과 한국의 교과서는 전반적으로 대동소이하다. 여기서 한 가지 다른 점을 말한다면, 독일에서는 최대 최소값과 관련된 여러 응용문제가 많이 나타나고 있는 반면에 한국은 거의 다루지 않는다는 사실이다. 한편 이러한 내용을 유도 및 전개시키는 과정에서는 현저한 차이를 보여주고 있는데, 이를 구체적으로 설명하면 다음과 같다.

다른 모든 함수와 마찬가지로, 이차함수 역시 그 함수의 그래프의 개형, 특히 포물선의 경우는 꼭지점, 대칭관계, 위 또는 아래로의 오목 여부, 그래프의 폭의 크기 등 그래프의 전반을 조사해야하는 것은 기본이고 이는 가장 간단한 이차식인 $y=x^2$의 그래프[10]에서 출발하는 것은 양국이 동일하다. 그러나 계속 전개되는 과정을 볼

10) 독일에서는 $y=x^2$의 그래프와 폭이 같은 포물선을 일반적으로 정규포물선(Normalparabel)이라 부른다.

때, 한국의 경우는 $y=x^2$의 그래프와 꼭지점이 원점에 있는 그래프, 즉 $y=ax^2$의 그래프의 성질에 대해 공부한 후에 점차로 꼭지점의 위치가 일반적인 경우로 확대시키는 반면, 독일에서는 정규포물선이며 꼭지점이 원점에 있는 $y=x^2$의 그래프를 평행이동 함으로써 정규포물선의 일반적인 그래프를 습득한 후에 정규가 아닌 일반적 이차함수로 유도하고 있다. 이 절차를 다시 정리하면 다음과 같다. 먼저 독일의 경우: (수식기호는 독일 교과서의 표기를 그대로 따른다.)

$$f(x)=x^2 \Rightarrow f(x)=x^2+e \Rightarrow f(x)=(x-d)^2$$
$$\Rightarrow\ f(x)=(x-d)^2+e$$

의 순으로 정규포물선의 꼭지점의 변화를 공부한 후,

$$f(x)=(x-d)^2+e \Rightarrow f(x)=a(x-d)^2+e$$
$$\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$$

의 순서로 일반적인 이차함수가 유도된다. 한편 한국의 경우는 먼저

$$y=x^2 \ \Rightarrow\ y=ax^2$$

를 유도한 후, 이어서 평행이동을 통하여

$$y=ax^2+q \Rightarrow y=a(x-p)^2 \Rightarrow$$
$$y=a(x-p)^2+q \Rightarrow y=ax^2+bx+c$$

의 순서로 일반화하고 있다. 즉, 독일은 포물선의 평행이동을 먼저 다룬 후에 폭과 위 또는 아래로의 오목 여부를 다루는 반면, 한국에서는 독일과는 반대로 포물선의 폭 및 위 또는 아래로의 오목 여부를 먼저 설명하고 그 이후에 평행이동을 다룸을 볼 수 있다.

일반적인 이차함수의 식 $y=ax^2+bx+c$를 완전제곱형인 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변환시키는 과정에서는 양국의 차이가 별로 없다. 다만 독일교과서에서는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 완전제곱의 과정을 거치지 않고도 꼭지점을 찾는 방법을 제시하고 있는데, 예를 들어 함수 $f(x)=x^2-3x+1$의 경우를 설명하면 다음과 같다.

먼저 주어진 함수 $f(x)$에서 상수를 제거한 식을 $g(x)=x^2-3x$라 놓고, $g(x)$와 x축과의 교점의 x좌표를 구하면

$$x^2-3x=0 \quad 또는 \quad x(x-3)=0$$

이므로 $x=0$ 또는 3이 된다. 그런데 모든 포물선은 그의 축에 대칭이므로 $g(x)$의 꼭지점의 x좌표는 0과 3의 중점인 $x=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$이 될 것이다. 한편 주어진 함수 $f(x)$는 $g(x)$를 y축의 방향으로 평행이동한 것이므로, $f(x)$의 꼭지점의 x좌표 역시 $g(x)$와 같이 $\frac{3}{2}$이다. 이로부터 $f(x)$의 꼭지점의 y좌표는 $f(\frac{3}{2})=-\frac{5}{4}$가 되고, 따라서 구하는 꼭지점 $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$를 얻는다.

V. 결 론

먼저 양국의 교육제도가 크게 초등, 중등, 고등교육의 3단계로 나뉘어져 있다는 점에서는 외형적으로 큰 차이가 없어 보인다. 그러나 그의 내면을 들여다보면 매우 중요한 2가지 차이점이 발견된다. 두 차이점은 모두 인문계와 실업계와 관련된 것으로, 하나는 이를 선택하는 시기이며 다른 하나는 진학하는 비율이다. 중학교, 즉 9학년을 이수한 후에야 인문계 또는 실업계학교로의 선택이 가능한 한국과는 달리, 독일은 빠르면 4학년, 늦어도 6학년을 이수함과 동시에 인문계나 실업계 학교 중 어느 하나를 선택하고 있다. 이는 인문계와 실업계를 결정하는 연령에서 독일의 학생들이 한국의 학생들에 비하여 약 3-5년 정도 빠르다는 것을 의미하고 있는 것이다. 또 인문계 진학률 면에서 보면, 한국에서는 사실상 대다수의 학생들이 인문계 학교를 선택하고 있는데 비하여, 독일의 경우는 불과 30% 정도의 학생들만이 인문계 중등학교인 김나지움에 진학하고 있다. 이러한 진학률의 차이를 달리 표현하면, 독일의 김나지움은 한국의 상위 30%의 학생들과 대체로 비슷한 수준의 학생들로만 구성되어 있다는 것을 의미하고 있으며, 따라서 교육과정이나 교육내용, 특히 교과서 역시 그에 상응한 수준에 맞추어 편성되어 있다는 것을 전제해야할 것이다.

수와 연산, 문자와 식 그리고 규칙성과 함수 등의 대수영역에 관하여 독일의 인문계 중학교과정인 김나지움의 7-9학년과 한국 중학교 7-9학년의 수학교과서를 비교 분석한 본 논문은, 위에서 지적한 학생들의 학력수준

의 차이와 그에 따른 교과내용의 학년별 편성이나 교재의 난이도 등을 감안하더라도 양국 교과서사이의 중요한 차이점은 다음과 같이 요약된다.

첫 번째로는 교재에 제시된 문제들의 유형에서 차이를 보이고 있다. 어떤 새로운 내용을 도입하기 위하여 실제 생활 속의 문제로부터 수학적 문제로 유도하는 방법에서는 양국사이에 별 차이가 없다. 그러나 예제 또는 연습문제 등에 제시된 문제의 유형을 볼 때, 독일교과서에는 한국에 비해 실제적 또는 실용적 문제들이 상대적으로 많이 포함되어 있다는 것이다. 이에 따라 교재에 제시된 수치들 역시, 주로 정수 또는 간단한 소수나 분수들로 이루어진 한국교과서에 비해, 독일에서는 실제 측량한 값으로 추정되는 간단하지 않은 소수나 분수들이 많이 제시되어 있다. 이러한 단순하지 않은 수치들은, 우리 주변의 실제 생활과 직결된 문제들로 구성되어 있다는 점에서는 매우 긍정적인 면이 있는 반면, 사칙연산 등의 실제 계산과정에서는 지나치게 많은 시간적 소모와 또한 계산상의 오류가 발생할 가능성이 매우 높다는 단점을 가지고 있다. 참고로 독일에서는 이러한 단점을 보완하기 위하여 8-9학년부터 이미 간단한 컴퓨터나 전자계산기의 사용을 부분적으로 허용하고 있다.

두 번째 차이점은 $\sqrt{2}$나 $\sqrt{3}$과 같은 제곱근수의 유리수 여부 또는 방정식의 근의 존재 여부 등 수학의 기초론적 이론에 대한 도입 및 전개과정에서 보여주고 있다. 독일에서는 이러한 이론들에 대하여 명확한 수학적 증명 또는 논리적 근거를 제시함으로 학생들에게 수학적으로 납득할 수 있도록 설명되어 있는데 반하여, 한국교과서의 경우는 대체로 직관적인 추정이나 또는 이러한 이론에 대한 경험적 또는 상황적 설명을 통하여 학생들에게 이해시키고 있는 것이다. 물론 이러한 차이점의 바탕에는 기본적으로 양국 교과서의 난이도 문제, 즉 수학의 모든 원리는 오로지 논리적 근거를 바탕으로 설명되어야만 한다고 주장하는 이론과 중학교 과정으로는 지나치게 난해한 수학기초론적 이론의 조기도입을 반대하는 주장이 서로 비교되는 부분이다. 한편 이 차이점에는 학생들의 수준에서도 이해가 될 수 있는데, 학업성적이 단지 상위 30%의 학생들로 구성된 독일의 김나지움에 비해, 한국의 중학교에서는 거의 100%에 가까운 학생들이 공부하고 있다.

세 번째 차이점은 수의 연산이나 식을 정리 또는 계산하는 과정에서 나타나 있다. 먼저 수의 연산을 도입하는 과정을 볼 때, 독일은 형식불역의 원리, 즉 기존의 알려진 수의 기본 공리 또는 성질들을 찾은 후 이를 새로운 수의 체계로 확대하여 도입하고 있는 반면, 한국에서는 기존의 연산절차를 새로운 수의 체계로 유추함으로써 연산의 확장을 유도하는 원리, 즉 귀납적 방법으로 교육하고 있는 것이다. 또 계산의 과정에서도 여러 가지 대수적 기본법칙이나 성질들이 각 절차마다 어떻게 적용되고 있는지에 초점이 맞추어져 있는 독일에 비해, 한국에서는 몇 가지 계산원리 및 기술적인 계산요령들을 습득하여 빠른 시간에 정확한 답을 얻을 수 있는 방법을 제시하고 있다. 이러한 차이점 역시 부분적으로는 교재의 난이도나 학생들의 수준 등에서 이해될 수 있을 것이다.

따라서 위에서 비교 제시된 문제, 즉 수학과 실생활과 밀접한 유대관계를 갖는 실용적 문제의 확충 및 문제에 제시되는 수치들의 현실성을 확보하는 방안, 수학의 기초이론에 공감할 수 있는 설명 또는 이론적 근거를 어떤 방식으로 유도하고 제시하는 것이 바람직할 것인가의 문제, 마지막으로는 수식의 연산이나 변형, 또는 그의 계산과정 등에서 사용되고 있는 대수적 법칙이나 성질들의 도입시기 및 방법론의 문제 등 세 가지 항목에 관하여, 이에 대한 종합적인 검토와 더불어 독일과 한국사이의 지리적, 역사적, 문화적인 여러 요소들을 감안하여 우리의 수학과 교과과정의 설정이나 교과서 개발 등의 전 분야의 연구과제로 삼아야할 것이다.

이미 통일을 이룬 독일은 우리에게는 좋은 모델이다. 이는 즉, 그들은 통일에 대비하여 어떤 준비하였으며, 준비한 내용들이 실제 적용하는 과정에서 어떤 문제점이 있었는지? 또 이를 위하여 보완해야할 것은 무엇인지? 등의 여러 가지 문제들을 연구 검토하는 것은 우리에게는 매우 중요한 과제라 하겠다. 이러한 점에서, 독일의 통일교과서와 우리의 교과서를 비교 연구한 본 논문은 단지 이러한 과제의 시작단계에 불과하다고 생각한다. 앞으로 구동서독, 특히 동독의 교과서를 비롯하여 북한의 교과서까지도 심도있게 비교 연구함은 물론, 독일 통일과정에서의 교과서 통합작업과 그와 관련된 제반 연구활동 및 문제점 등을 조사 분석하는 것은, 앞으로 우리에게 부딪힐 통일의 날을 위하여 매우 중요하다고 하겠다.

참 고 문 헌

교육부 (1999). 중학교 교육과정 해설(III)-수학, 과학, 기술・가정-, 서울: 대한교과서 주식회사.

김연미 (1999). 한국과 미국의 초등학교 저학년 수학 교과서 및 교육과정의 비교와 분석, 수학교육학연구, **9(1)**, pp.121-132.

박규홍 외 7인 (2002). 중학교 수학 7-가, 8-가, 9-가, 서울: 두레교육(주).

서보억・신현용・진평국 (1995), 한・소 수학교육과정 비교 연구-중학교 대수영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **34(2)**, pp.265-283.

우정호 (2001), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

우정호 (2002), 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

임재훈 (1999). 한・일 초등학교 중학교 수학과 교육과정 내용 비교, 한국일본교육학회 국제학술심포지움 자료집, pp.175-216.

황혜정・신항균 (2002). 영국과 우리나라의 수학과 교육과정 비교 분석 연구-수와 대수 영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(3)**, pp.233-256.

A. Schmid (ed.) (1994). *Mathematisches Unterrichtswerk* **7**, Stuttgart : Ernst Klett Verlag.

A. Schmid (ed.) (1995). *Mathematisches Unterrichtswerk* **8**, Stuttgart : Ernst Klett Verlag.

A. Schmid (ed.) (1997). *Mathematisches Unterrichtswerk* **9**, Stuttgart : Ernst Klett Verlag.

Burscheid, Hans Joachim (1984) Eine Schul- bildung unter den Gymnasial- didaktikern des ausgehenden 19.Jahr- hunderts. *ZDM* **16** H.6, 191-195.

Internet

1. http://www.gbg.wn.schule-bw.de/strutafl.htm
2. http://www.bildungsserver.de/index.html
3. http://container.zkm.de/lfh/pdf/DSCHOOLL.PDE
4. http://www.leu.bw.schule.de/allg.lp/bpg9.pdf

A Study on the Comparison of Middle School Mathematics Textbooks in Korea and Germany
-Focused on the Area of Algebra-

Lau, Jeung-Hark
Department of Mathematics, Hanshin University, Osan, Gyeonggi Do, Korea, 447-791.
E-mail : jhlau@hanshin.ac.kr

Yang, Chun-Woo
Department of Mathematics, Hanshin University, Osan, Gyeonggi Do, Korea, 447-791.
E-mail : chyang@hanshin.ac.kr

Jung, Hwan-Ok
Department of Mathematics, Hanshin University, Osan, Gyeonggi Do, Korea, 447-791.
E-mail : jungok@hanshin.ac.kr

In this paper we compared and analyzed the Korean and German mathematics textbooks for the middle school students. For the research we investigated only the area of algebra, which is consisted of the three sections-section of numbers and arithmetic operations, section of letters and expressions, and section of rules and functions.

We expect that this paper would contribute on the development of the whole area in our nation's mathematical educations, including the organization and exploitation of the curriculums for the middle school students.

* ZDM classification : D13
* 2000 Mathematics Classification : 97D10, 97U20
* key word : German curriculum and system of education, comparison and analysis, area of algebra.

영역	한국 학년	한국 단원		한국 지도내용	독일 학년	독일 단원	독일 지도내용
수와 연산	7-가	집합과 자연수	집합	집합과원소 원소나열법과 조건제시법 유한집합과 무한집합 공집합과 부분집합 벤다이어그램 합집합과 교집합 전체집합, 여집합과 차집합	7		없음
			자연수의 성질	소수, 소인수와 소인수분해 거듭제곱, 밑과 지수 최대공약수와 최소공배수	6	약수	소수 최대공약수와 최소공배수
			십진법과 이진법	십진법과 그의 전개식 이진법과 그의 전개식	5	자연수	이진법 오진법
		정수와 유리수	정수와 유리수	정수와 유리수 양수와 음수 절대값 수의 대소 관계	7	유리수	양수와 음수 유리수의 순서관계 절대값 유리수의 덧셈과 뺄셈 간단한 표현법 교환법칙과 결합법칙 유리수의 곱셈과 나눗셈 교환법칙과 결합법칙 분배법칙
			덧셈과 뺄셈	유리수의 덧셈과 뺄셈 교환법칙과 결합법칙			
			곱셈과 나눗셈	유리수의 곱셈과 나눗셈 교환법칙과 결합법칙 분배법칙			
	8-가	유리수	유리수	유한소수와 무한소수 순환고수와 순환마디	8		없음
	9-가	수와 연산	제곱근과 실수	제곱근과 근호 제곱근의 대소관계 무리수와 실수 실수의 소수표현 실수의 대소관계	9	실수	무리수의 존재 비순환소수 실수 제곱근 무리함수
			근호를 포함하는 식의계산	제곱근의 곱셈과 나눗셈 분모의 유리화 제곱근의 근사값 제곱근의 덧셈과 뺄셈		제곱근의 계산	제곱근의 곱셈과 나눗셈 제곱근의 덧셈과 뺄셈 분모의 유리화 무리방정식 제곱근의 근사값의 계산
문자와 식	7-가	문자와 식	문자의 사용	문자를 사용한 식 식의 값	7	유리수	항들의 계산 (일차식의 계산)
			일차식의 계산	단항식, 다항식, 상수항 계수, 차수, 일차식, 동류항 일차식의 덧셈과 뺄셈			
		일차 방정식	일차방정식	등식, 항등식, x에 관한 방정식, 미지수, 해, 근 이항, 일차방정식	8	이차방정식	일차방정식 동치관계를 이용한 풀이법
			일차방정식의 활용	일차방정식의 활용 응용문제			

영역	한국				독일		
	학년	단원		지도내용	학년	단원	지도내용
문자와식	8-가	식의 계산	식의계산	다항식의 덧셈과 뻴셈 지수법칙 (단항식)×(다항식)의 계산 (다항식)÷(단항식)의 계산 전개, 전개식, 등식의 변형	8	다항식의 계산	다변수 다항식 합과 곱의 계산 다항식의 합 곱과 지수의 법칙 다항식의 전개, 전개공식 여러 가지 다항식의 계산
		방정식과 부등식	연립방정식과 그 활용	이원일차연립방정식 직선의 방정식 연립일차방정식의 풀이 연립일차방정식의 활용	9	연립방정식	이변수일차방정식 이원일차연립방정식 연립방정식의 동치표현 삼원일차연립방정식 일차연립방정식의 해의 존재성
			부등식과 그활용	부등식, 부등식의 성질 일차부등식 연립일차 부등식	7	유리수	합과 곱의 대소관계 (간단한 일차부등식)
					8	이차방정식	일차부등식 일차방정식과 이차부등식의 활용
					9	연립방정식	이변수 일차부등식 최대최소문제
						이차방정식	이차부등식과 응용문제
	9-가	식의 계산	다항식의 곱셈	다항식의 곱셈과 그 공식 곱셈공식의 활용	9	이차방정식	이차식의 인수분해
			인수분해	인수, 인수 분해 완전제곱식			
		이차 방정식	이차방정식	이차방정식과 그 풀이 근의 공식			순이차방정식 그래프를 이용한 이차방정식의 풀이 계산을 통한 이차방정식의 풀이 여러 가지 방정식의 풀이
			이차방정식의 활용	이차방정식의 활용			
규칙성과 함수	7-가	비례 관계와 함수	함수와 그 그래프	정비례, 반비례, 함수, 변수 정의역, 공역, 함수값, 치역 좌표축, 순서쌍, 좌표평면, 함수의 그래프	7	일차함수	관계와 그래프 좌표평면에서의 그래프 비례관계
			함수의 활용	실생활의 문제에 함수를 이용하기			
	8-가	일차 함수	일차함수와 그 그래프	일차함수, 기울기, x절편 y절편, 평행이동	8	일차함수	직선의 그래프 일차함수 일차함수의 식 혼합문제
			일차함수의 활용	일차방정식과 일차함수 일차함수의 식과 그 활용 일차함수의 그래프와 연립방정식의 해			
	9-가	이차 함수	이차함수와 그 그래프	이차함수의 그래프, 포물선 축, 꼭지점	9	이차함수	포물선 이차함수의 그래프
			이차함수 그래프의 성질	일반적인 이차함수의 그래프, 최대값과 최소값			일반적인 이차함수의 그래프 최대값과 최소값