포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 이득 스케듈링 제어기 설계

論 文
52D-9-1

Design of Gain Scheduled Controllers for Linear Systems with Saturating Actuators

宋 龍 熙* · 金 鎭 勳**
(Yong-Heui Song · Jin-Hoon Kim)

Abstract - In this paper, we considered the design of gain scheduled controllers for linear systems with saturating actuators. Our basic idea is to design a control that uses higher control gain when the states are smaller, and lower gain when it is higher. By doing this, we can avoid the saturation and we can improve the performance. First, we derive a control and a reachable set expressed as LMI form, which minimizes not only the L_2 gain from the disturbance to the measured output but also the control is never saturated within this reachable set. Next, the reachable set is divided as nested subsets, and at each nested subset, the control gain is designed to minimize the L_2 gain and it is never saturated. Finally, the control gain is scheduled according to the status of states, i.e., the subset in which the states are located. A numerical example is presented to show that our gain scheduled control significantly improves the performance.

Key Words : Saturating actuators , Gain scheduled control , L_2 gain , LMI

1. 서 론

일반적으로 제어의 목적은 시스템의 입력을 조작하여 출력이 원하는 바가 되도록 제어기를 설계하는 것이다. 이때 제어기의 신호를 받아서 시스템의 입력에 에너지(또는 힘)를 전달하는 것을 구동기(actuator)라 하고 이는 모든 제어시스템에 필수적이며 대부분 전기적(또는 기계적) 장치로 구성되어 있어 물리적으로 입력이 어느 값 이하가 될 때는 출력이 이에 비례하나, 어느 값 이상이 되면 입력의 크기에 무관한 일정한 값의 출력을 갖는다. 이러한 특성을 포화(saturation)라 하며, 포화 특성은 모든 구동기에서 나타나게 된다. 예를 들면 기계적 구동기인 스프링, 댐퍼, 유체 구동기인 밸브, 그리고 전기적 구동기인 모터, 증폭기(amplifier) 등이다. 선형 시스템에 이러한 포화 특성을 가지는 구동기가 장착되면 전체 시스템은 비선형 시스템이 되기에, 이러한 포화 특성을 고려하지 않은 선형 시스템만을 기초로 설계된 제어기는 원하는 성능을 나타내지 않을 뿐만 아니라 종종 안정성까지도 보장하지 못하는 것이 일반적이다. 따라서 이러한 포화 특성을 나타나지 않도록 하기 위해 구동기의 선형 구간을 크게 하는 것이 하나의 방법이나 이는 구동기의 크기 및 중량을 증가시키고 또한 가격도 상승하기에 바람직하지 않다.

* 準 會 員 : 忠北大學 制御計測工學科 博士課程
** 正 會 員 : 忠北大學 電氣電子工學部 副教授 工博
接受日字 : 2003年 2月 7日
最終完了 : 2003年 6月 30日

포화 구동기를 갖는 선형 시스템은 전체적으로 비선형 시스템이 되기에 시스템의 안정성 및 제어기 설계 문제가 선형 시스템만을 다루는 경우에 비해 더욱 복잡하고 어렵게 된다. 따라서 포화 구동기를 갖는 시스템의 안정성 및 성능을 보장하는 제어기의 설계 및 해석에 관한 연구가 매우 활발히 이루어지고 있다[1]-[13].

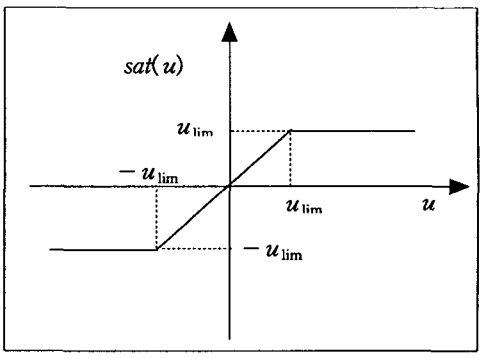

그림 1 포화 비선형 함수 $sat(u)$
Fig. 1 Saturating nonlinear function $sat(u)$

포화 구동기를 갖는 선형 시스템에 관한 이전의 연구를 살펴보면 다음과 같다. 1980년대 초반에는 Popov 안정성 정리[1], 1980년대 중반에는 Lyapunov 안정성 정리[2]-[4], 1980년대 후반에는 Bellman의 정리를 이용한 시스템의 안정성 해석 문제를 각각 다루었다[5]-[7]. 그리고, 1990년대에 들어서는 불확정성이 있는 시스템에 대해서 [8]에서 $sat(u)$ 함수를 합분해와 곱분해를 이용한 방법이 제시되었고, 그 이후에는 선

형 행렬 부등식(linear matrix inequality)을 이용한 시스템의 안정성 문제 및 H_∞ 제어기 설계 문제가 진행되었다[10]~[13]. 또한, 90년대 중반부터 최근에까지 상태에 따라 다른 제어 이득을 사용하도록 하는 스케듈링 제어기에 관한 연구가 활발히 이루어지고 있다[14]-[20].

일반적으로 제어기 이득이 크도록 설계가 되면 성능은 좋아지나 제어기 출력이 커지기에 포화가 일어나고, 제어기 이득이 적도록 설계가 이루어지면 제어기 출력이 적어지게 되어 포화는 일어나지 않으나 성능이 좋지 않게 된다. 이를 극복하기 위하여 상태(state)의 값에 따라 제어기의 이득을 조절하면, 즉 상태의 값이 적은 경우에는 상대적으로 큰 제어기 이득을 이용하고, 상태의 값이 큰 경우에는 상대적으로 적은 제어기 이득을 이용하면 포화도 이루어지지 않으면서 성능은 향상되는 결과를 얻게 되므로, 상태의 크기에 따라 제어기 이득을 선택하여 이용하는 이득 스케듈링 제어기(gain scheduling controllers)를 설계하는 것이 이 논문의 기본 취지이다. 이를 위하여 N개의 서로 연결된(nested) 타원형 상태 집합 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_N$ 을 생각하자. 제어기는 각 상태 타원형의 집합($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$)에 대하여 각각 N개($K_1, K_2, \ldots, K_N$)를 설계하는데, 각각의 집합에서는 L_2 이득이 최소가 되면서 절대로 포화가 이루어지지 않도록 설계한다. 특히, 집합 ε_N 에서의 제어 이득 K_N이 시스템의 reachable set[21](즉, 시스템 궤적이 절대로 집합 ε_N 의 바깥쪽으로 나가지 않는 집합)이 되도록 설계를 한다. 이렇게 설계가 이루어지고, 임의의 상태 집합 ε_k, $k=1,2,\ldots,N$ 에 상태가 있는 경우에는 제어기 K_k를 이용하는 것이 이득 스케듈링 제어기이다. 각각의 상태 타원형 집합에서 포화가 이루어지지 않으면서 L_2 이득을 최소로 하는 제어기는 행렬 부등식(LMI)으로 표시된 조건에서 쉽게 얻어진다.

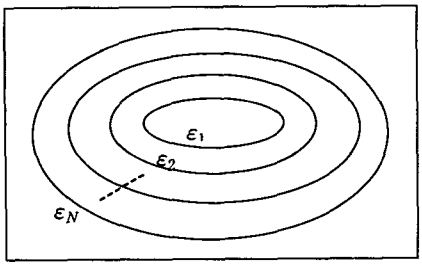

그림 2 N개의 연결된 상태 타원형 집합

Fig. 2 Nested N state ellipsoid set

다음으로 일반적인 제어 시스템 문제는 reference가 있는 regulation 또는 tracking 문제와 disturbance attenuation 문제로 크게 나눌 수가 있게된다. 물론, regulation이나 tracking 문제에서도 disturbance가 있기는 하나 이는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 주지 않는다. 그러나 자동차의 suspension 제어나 빌딩과 같은 구조물에 지진이나 강풍등의 외란이 있는 경우 이에 대한 영향을 최소화하기 위한 disturbance attenuation 문제에서는 disturbance가 시스템의 성능에 절대적인 영향을 주게 된다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위한 이론중의 대표적인 것이 H_∞ 제어 이론으로 본 논문에서는 앞서 말한 포화 구동기를 갖는 선형 시스템에 대하여 외란으로부터 출력까지의 L_2이득이 최소가 되도록 하는 H_∞ 제어기 설계 문제를 다루고자 한다.

이에 본 논문에서는 3장에서 게인 스케듈링 제어기의 설계를 다루기에 앞서 단일 상태 궤환 H_∞ 제어기의 설계를 먼저 다루고, 4장에서는 상태에 따라 제어 이득을 달리 사용하는 게인 스케듈링 제어기의 설계에 대해서 다루고자 한다. 또한, 제시된 결과의 유용성을 보이기 위하여 MATLAB™ [22]을 이용한 모의 실험 결과를 5장에서 다루도록 하겠다.

본 논문에서는 $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 나타내고, 대칭 행렬 $V, W \in R^{n\times n}$ 에 대하여 $V < W$(또는 $V-W<0$)은 행렬 $V-W$가 음 확정행렬(negative definite matrix)임을 의미한다. 끝으로 I 는 적당한 차원의 항등 행렬(identity matrix)이다.

2. 문제 기술

다음으로 기술되는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 sat(u(t)) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x\in R^n$은 상태, $u\in R^m$은 제어, $w\in R^d$는 $w^T w \le w_{\max}^2$을 만족하는 외란이고, $z\in R^p$는 측정 출력이며, A, B_1, B_2, C 는 적당한 차원을 갖는 상수 행렬이다. 또한, 포화 함수 $sat(\cdot)$는 $sat(u)=[sat(u_1), sat(u_2), \ldots, sai(u_m)]^T$ 이고 $sat(u_i)$는 다음과 같다.

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^{\lim}, & \text{if } u > u_i^{\lim} \\ u_i, & \text{if } |u_i| \le u_i^{\lim} \\ -u_i^{\lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{\lim} \end{cases} \tag{2}$$

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요 결과들의 증명에 이용된다.

보조정리 1[21]: 다음의 선형 시스템에서

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw \\ z &= Cx \end{aligned} \tag{3}$$

다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 양 확정행렬 $Q>0$가 존재하면

$$\begin{bmatrix} AQ + QA & QC^T & B \\ CQ & -I & 0 \\ B^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

외란 $w(t)$로부터 측정출력 $z(t)$까지의 L_2이득(즉, $\frac{\int z^T z dt}{\int w^T w dt}$)은 γ보다 크지 않다.

보조정리 2 : 다음의 선형 시스템에서

$$\dot{x} = Ax + Bw \;\; ; \;\; w^T w \le w_{\max}^2 \tag{5}$$

다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 양의 상수 $\alpha, \delta > 0$ 와 양 확정 행렬 $Q > 0$가 존재하면

$$AQ + QA + \alpha Q + \frac{\delta}{\alpha} BB^T < 0 \tag{6}$$

다음의 집합은

$$\Omega = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \le \frac{1}{\delta} w_{\max}^2 \right\} \tag{7}$$

위의 시스템의 reachable set이다(즉, 이 집합 Ω내의 초기 상태를 가지는 시스템 궤적은 모든 $w^T w \le w_{\max}^2$의 외란에 대해서 항상 이 집합 Ω내부에 존재한다).

증명 : 참고 문헌[21]에 의하여 집합 (7)이 시스템 (5)의 reachable set이 되기 위해서는 $V(x) = x^T Q^{-1} x$라 할 때, 다음의 3가지 조건을 동시에 만족하여야한다.

i) $-\frac{d}{dt} V(x) < 0$, ii) $V(x) > \frac{1}{\delta} w_{\max}^2$, iii) $w^T w \le w_{\max}^2$

위의 3가지 조건을 참고문헌 [21]의 S-procedure를 이용하면 임의의 양의 상수 $\alpha, \beta > 0$ 에 대하여 다음이 된다.

$$-\frac{d}{dt} V(x) - \beta \left\{ \frac{1}{\delta} w_{\max}^2 - V(x) \right\} - \alpha (w^T w - w_{\max}^2) < 0 \tag{8}$$

여기서, $\frac{\beta}{\delta} = \alpha$ 라 하면 다음이 된다.

$$-\frac{d}{dt} V(x) + \alpha \delta V(x) - \alpha w^T w < 0$$

$$\Leftrightarrow x^T [A^T Q^{-1} + Q^{-1} A] x + 2 x^T Q^{-1} B w + \alpha \delta x^T Q^{-1} x - \alpha w^T w < 0$$

$$\Leftrightarrow [x^T Q^{-1} \;\; w^T] \begin{bmatrix} AQ + QA^T + \alpha \delta Q & B \\ B^T & -\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} x \\ w \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} AQ + QA^T + \alpha \delta Q & B \\ B^T & -\alpha I \end{bmatrix} < 0$$

끝으로 참고문헌[21]의 Schure-complement를 적용하여 행렬 부등식 (6)을 얻는다. 이것으로 증명을 마친다. ■

보조정리 3 : 다음의 집합 Ω내에 있는 상태에 대하여

$$\Omega = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \le \frac{1}{\delta} w_{\max}^2 \right\} \tag{9}$$

다음의 행렬 부등식을 만족하면

$$\begin{bmatrix} Q & QK_i^T \\ K_i Q & \delta \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

항상 $|u_i| = |K_i x| \le u_i^{\lim}$ 이다. 여기서 K_i 는 행렬 K의 i 번째 열 벡터이다.

증명 : Schure-complement로부터

$$\begin{bmatrix} Q & QK_i^T \\ K_i Q & \delta \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow Q - QK_i^T \left\{ \delta \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \right\}^{-1} K_i Q > 0$$

$$\Leftrightarrow Q^{-1} - K_i^T \left\{ \delta \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \right\}^{-1} K_i > 0$$

$$\Leftrightarrow \delta \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \cdot Q^{-1} - K_i^T K_i > 0$$

$$\Leftrightarrow K_i^T K_i < \delta \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \cdot Q^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x^T K_i^T K_i x < \delta \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \cdot x^T Q^{-1} x$$

여기에 $u = Kx$와 $x^T Q^{-1} x \le \frac{1}{\delta} w_{\max}^2$ 을 적용하면

$$|u_i|^2 = |K_i x|^2 = x^T K_i^T K_i x \le (u_i^{\lim})^2$$

을 얻는다. 이것으로 증명을 마친다. ■

3. 주요 결과

여기에서는 포화 구동기를 갖는 시스템 (1)에 대하여 제어기의 포화는 이루어지지 않으면서 외란 $w(t)$로부터 측정출력 $z(t)$까지의 L_2이득이 최소가 되도록 하는 H_∞제어기의 설계에 관하여 보이도록 하겠다. 다음의 정리 1은 이에 대한 주요결과이다.

정리 1 : 포화 구동기를 갖는 시스템 (1)을 생각하자. 다음 3개의 선형 행렬 부등식(고정된 상수 α에 대하여)을 동시에

만족하는 양 확정 행렬 $Q=Q^T\in R^{n\times n}>0$ 와 행렬 $Y\in R^{m\times n}$ 그리고 양의 상수 $a,\delta>0$ 가 존재한다고 하자.

$$\text{i)}\quad \begin{bmatrix} AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T & QC^T & B_1 \\ CQ & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

$$\text{ii)}\quad \begin{bmatrix} Q & Y^TE_i^T \\ E_iY & \delta\cdot\left(\frac{u_{\lim}}{w_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix} > 0 \quad ,i=1,2,\ldots,m \tag{12}$$

$$\text{iii)}\quad AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T+aQ+\frac{\delta}{a}B_1B_1^T<0 \tag{13}$$

여기에서, $E_i\in R^{1\times m}$는 i번째 원소만 1이고 나머지는 모두 0인 행(row) 벡터이다.

그러면, 다음의 제어기 (14)를

$$u=Kx\,;\ K=YQ^{-1} \tag{14}$$

갖는 폐루프 시스템은 다음을 만족한다.

1) 외란 $w(t)$로부터 측정출력 $z(t)$까지의 L_2 이득은 γ보다 크지 않다.

2) 다음의 집합은 이 시스템의 reachable set 이다.

$$\Omega=\left\{x:\ x^TQ^{-1}x\le\frac{1}{\delta}w_{\max}^2\right\} \tag{15}$$

3) 제어 u는 항상 포화가 되지 않는다. 즉, $|u_i|\le u_i^{\lim}$ 이다.

증명 : 증명은 2 단계로 나뉘어 진행된다. 먼저 식(12)와 (13)을 만족하면, 제어 u는 항상 포화가 되지 않음과 동시에 집합(15)는 이 시스템의 reachable set 임을 보이고, 다음으로 (12)와 (13)하에서 (11)은 이 시스템의 L_2 이득이 γ보다 크지 않음을 보인다.

먼저, Schure complement를 이용하면 (12)로부터 다음을 만족하는 $\varepsilon>0$이 존재함을 알 수 있다.

$$Q^{-1/2}Y^TYQ^{-1/2}\le\frac{\delta}{1+\varepsilon}\left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}}\right)^2<\delta\left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}}\right)^2$$

그리고, $V(x)=x^TQ^{-1}x$라하고, 다음의 집합 Ω_1을 정의하자.

$$\Omega_1:=\left\{x:\ x^TQ^{-1}x\le(1+\varepsilon)\frac{1}{\delta}w_{\max}^2\right\} \tag{16}$$

그러면, 모든 $x\in\Omega_1$에 대하여 다음을 얻으므로

$$|u_i|^2=|K_ix|^2=x^TK_i^TK_ix=x^TQ^{-1}QK_i^TK_iQQ^{-1}x$$

$$=x^TQ^{-1}Y^TYQ^{-1}x\le\frac{\delta}{1+\varepsilon}\left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}}\right)^2x^TQ^{-1}x$$

$$\le\frac{\delta}{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)\frac{1}{\delta}w_{\max}^2\le(u_i^{\lim})^2$$

이는 $x\in\Omega_1$이면 항상 $|K_ix|\le u_i^{\lim}$ 임을 의미한다. 즉, $x\in\Omega_1$이면 시스템 (1)은 비선형성이 없는 다음의 선형 시스템이 된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(A+B_2K)x(t)+B_1w(t)\\ z(t)&=Cx(t)\end{aligned} \tag{17}$$

그리고, $x\in\{\Omega_1-\Omega_0\}$하에서는, LMI (12)로부터 다음을 얻는다

$$\frac{d}{dt}V(x)$$

$$=x^TQ^{-1}\left[(A+B_2K)Q+Q(A+B_2K)^T\right]Q^{-1}x$$

$$+2x^TQ^{-1}B_1w$$

$$=x^TQ^{-1}\left[(A+B_2K)Q+Q(A+B_2K)^T\right]Q^{-1}x$$

$$+2x^TQ^{-1}B_1w+ax^TQ^{-1}x-\frac{a}{\delta}w^Tw-ax^TQ^{-1}x+\frac{a}{\delta}w^Tw$$

$$=x^TQ^{-1}\left[AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T+aQ\right]Q^{-1}x$$

$$+2x^TQ^{-1}B_1w-\frac{a}{\delta}w^Tw-ax^TQ^{-1}x+\frac{a}{\delta}w^Tw$$

$$=\begin{bmatrix}x^TQ^{-1} & w^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T+aQ & B_1\\ B_1^T & -\frac{a}{\delta}I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Q^{-1}x\\ w\end{bmatrix}-ax^TQ^{-1}x+\frac{a}{\delta}w^Tw$$

$$\le-ax^TQ^{-1}x+\frac{a}{\delta}w^Tw$$

$$\le-a\frac{1}{\delta}w_{\max}^2+\frac{a}{\delta}w_{\max}^2=0$$

따라서, 집합 Ω_1은 집합 Ω_0의 외곽이고, Ω_1에서 $\frac{d}{dt}V(x)<0$이고 시스템의 궤적은 연속이므로 집합 Ω_0내의 상태는 집합 Ω_0밖으로 나갈 수 없다. 즉, Ω_0는 시스템 (1)의 reachable set이다.

다음으로, $x\in\Omega_0$하에서는 시스템은 (17)로 동작하므로

$$\frac{d}{dt}V(x)+z^Tz-\gamma^2w^Tw$$

$$=x^TQ^{-1}\left[(A+B_2K)Q+Q(A+B_2K)^T\right]Q^{-1}x$$
$$+2x^TQ^{-1}B_1w+x^TC^TCx-\gamma^2w^Tw$$

$$=x^TQ^{-1}\left[(A+B_2K)Q+Q(A+B_2K)^T+QC^TCQ\right]Q^{-1}x$$
$$+2x^TQ^{-1}B_1w-\gamma^2w^Tw$$

$$= x^T Q^{-1}[AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T+QC^TCQ]Q^{-1}x + 2x^TQ^{-1}B_1w-\gamma^2w^Tw$$

$$= [x^TQ^{-1}\ \ w^T]\begin{bmatrix} AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T+QC^TCQ & B_1 \\ B_1^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q^{-1}x \\ w \end{bmatrix} \le 0$$

여기에서 다음의 동치 관계가 이용되었다.

$$\begin{bmatrix} AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T & QC^T & B_1 \\ CQ & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T+QC^TCQ & B_1 \\ B_1^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

따라서, 외란 $w(t)$로부터 측정출력 $z(t)$까지의 L_2이득은 γ보다 크지 않다. 끝으로 LMI (11),(12),(13)을 만족하면 위의 3가지 성질 1), 2), 3)을 동시에 만족한다. 이것으로 증명을 마친다. ■

4. 게인 스케듈링 제어기 설계

이 장에서는 게인 스케듈링 제어기의 설계를 위해 정리 1의 선형 행렬 부등식 (11)과(12)를 사용하여 Reachable set 내의 각 sub-set에 대한 각각의 제어 이득을 구하는 방법과 게인 스케듈링 제어기의 설계를 위한 설계 순서를 제시하였다.

게인 스케듈링 제어기 설계 순서

순서 1. 스케듈링 제어에 사용될 제어 이득의 개수(N)을 결정한다.

순서 2. 다음의 성질을 갖는 양의 스칼라 δ_k 를 결정한다.

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots > \delta_{N-1} > 1 \tag{18}$$

순서 3. 다음의 LMI (19),(20),(21)에 대하여 γ를 최소화하는 스칼라 δ와 행렬 Q, Y를 구한다.

minimize γ^2
subject to

$$\text{i)} \begin{bmatrix} AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T & QC^T & B_1 \\ CQ & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} Q & Y^TE_i^T \\ E_iY_i & \delta \cdot \left(\frac{u_{\lim}}{w_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix} > 0,\ i=1,2,\ldots,m \tag{20}$$

$$\text{iii)}\ AQ+QA^T+B_2Y+Y^TB_2^T+\alpha Q+\frac{\delta}{\alpha}B_1B_1^T < 0 \tag{21}$$

여기에서, $E_i \in R^{1\times m}$는 i번째 원소만 1이고 나머지는 모두 0인 행(row) 벡터이다.

순서 4. 순서 3에서 얻은 δ, Y, Q를 δ_N, Y_N, Q_N으로 놓고, Q_N을 이용하여 각각의 $k=1,2,..,N-1$에 대하여 다음의 식을 만족하는 γ_k, Y_k를 구한다.

minimize γ_k^2
subject to

$$\begin{bmatrix} AQ_N+Q_NA^T+B_2Y_k+Y_k^TB_2^T & Q_NC^T & B_1 \\ CQ_N & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma_k^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} Q_N & Y_k^TE_i^T \\ E_iY_k & \delta_k \cdot \left(\delta_N \frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix} > 0,\ i=1,2,\ldots,m \tag{23}$$

여기에서 E_i는 순서 3과 같다.

순서 5. 순서 3과4에서 얻은 Q_N, Y_k를 이용하여 다음의 제어 이득을 구한다.

$$K_k = Y_kQ_N^{-1},\ k=1,2,\ldots,N \tag{24}$$

순서 6. 위에서 구한 제어기들을 이용하여 제어 입력을 다음과 같이 하고,

$$u(t) = K(x(t))x(t) \tag{25}$$

제어 이득 행렬 $K(x(t))$는 상태 $x(t)$의 궤적에 따라 다음의 조건 식 (26)에 따라 제어 이득 K_k를 사용한다.

$$K(x(t)) = \begin{cases} K_1, & \text{if } \left\{x : x^TQ^{-1}x \le \frac{1}{\delta_1}\cdot\left(\frac{1}{\delta_N}w_{\max}^2\right)\right\} \\ K_k, & \text{if } \left\{x : \frac{1}{\delta_{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{\delta_N}w_{\max}^2\right) < x^TQ^{-1}x \le \frac{1}{\delta_k}\cdot\left(\frac{1}{\delta_N}w_{\max}^2\right)\right\} \end{cases} \tag{26}$$

■

위의 방법에 따라 설계된 이득 스케듈링 제어기는 reachable set 내에서 상태 $x(t)$가 작을 경우 큰 제어 이득을 사용하고, 상태 $x(t)$가 커짐에 따라 작은 제어 이득을 사용함으로써 L_2이득이 최소가 되며, 제어 입력은 절대로 포화

가 일어나지 않는다.

일반적으로 사용될 제어 이득의 수 N, 즉 sub-set의 수를 증가 시키게되면 사용할 제어 이득의 수가 증가하게 되어 적은 수의 제어기를 사용하는 경우보다는 성능이 좋아지겠지만, 너무 많은 수의 제어 이득을 사용하는 것은 현실적으로 구현하기가 어렵게 된다.

Remark 1 : Reachable set (7)을 N개의 nested sub-set으로 나누게 되면 각각의 sub-set은 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon_k=\left\{x:\frac{1}{\delta_{k-1}}\cdot\frac{1}{\delta_N}w_{\max}^2<x^TQ^{-1}x\le\frac{1}{\delta_k}\cdot\frac{1}{\delta_N}w_{\max}^2\right\},\ k=1,2,\ldots,N \tag{25}$$

Remark 2 : 제안된 게인 스케듈링 제어기 설계방법으로부터 다음과 같음을 알 수 있다.

1. Reachable set 내에 존재하는 각 sub-set에서의 외란 $w(t)$로부터 출력 $z(t)$ 까지의 L_2이득은 LMI 조건 (22)에 의하여 다음과 같다.

$$\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{N-1}<\gamma_N \tag{26}$$

2. $x(t)\in\Omega_k$이면 제어는 $u(t)=K_kx(t)$가 사용되며, LMI 조건 (23)에 의하여 절대로 포화가 일어나지 않는다.

3. 상태 $x(t)$는 어떠한 경우에도 LMI 조건 (13)에 의하여 reachable set (7)을 벗어나지 않는다.

5. 수치 예제

본 논문에서 제시한 제어기 설계방법의 유용성을 보이기 위하여 다음의 2-DOF 댐퍼 시스템을 고려해보자.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\frac{k_1+k_2}{m_1}&\frac{k_2}{m_1}&-\frac{c_1+c_2}{m_1}&\frac{c_2}{m_1}\\\frac{k_2}{m_2}&-\frac{k_2}{m_2}&\frac{c_2}{m_2}&-\frac{c_2}{m_2}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{m_1}\\0\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{m_2}\end{bmatrix}u \tag{27}$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}x$$

$$z=[\,1\ 0\ 0\ 0\,]x$$

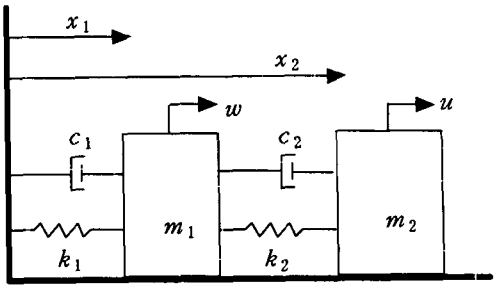

그림 3 2 자유도 댐퍼 시스템
Fig. 3 2-DOF Damper system

여기에서 상태 $x=[\,x_1\ x_2\ \dot{x}_1\ \dot{x}_2\,]^T$이고, 사용된 parameter들은 다음과 같다.

$$k_1=k_2=1\cdot10^3[N/m],\ c_1=c_2=1\cdot10^3[Ns/m]$$

$$m_1=m_2=100[Kg],\ u_i^{\lim}=1\cdot10^3[N],\ w_{\max}=1[m/s^2]$$

또한, 제어 입력 $u(t)$의 단위는 $[N]$이고 출력 $z(t)$의 단위는 $[m]$이며, 사용된 외란으로는 El Centro 지진 데이터 [12]로써 다음의 그림 4에 나타내었다.

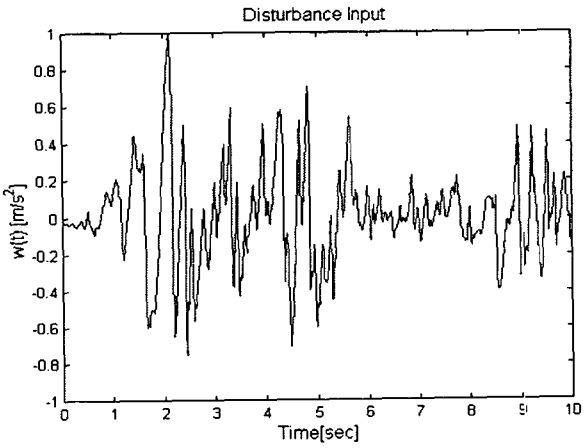

그림 4 외란 입력 (Elcentro 지진)
Fig. 4 Disturbance Input (Elcentro earthquake)

본 모의 실험은 그림 4의 외란이 시스템 (27)에 가해진 경우에 대하여 외란 $w(t)$로부터 출력 $z(t)$까지의 L_2이득 γ가 최소가 되도록 하며, 제어 입력에 대해 포화가 일어나지 않도록 하는 제어기의 설계에 대하여 다루었다. 여기에서는 실험 1과 실험 2로 나누어 정리 1을 사용한 static control과 4장의 게인 스케듈링 제어기 설계 방법을 이용한 gain scheduled control에 대하여 다루었으며, 참고문헌[20]과의 비교를 통해 본 논문에서 제시한 결과의 우수성을 보이도록 하겠다.

실험 1: Static Control Case

실험 1은 정리 1의 LMI 조건 (11),(12),(13) 을 만족하도록 하는 δ, Q, Y를 구하고, 이를 이용하여 얻은 제어 이득 K만을 이용한 모의 실험을 다루었다. 여기에서 $\delta=1$인 경우에는 참고문헌[20]의 결과와 동일하게 된다.

다음의 그림 5는 본 논문의 정리 1에서 제시한 새로운 변수 δ를 이용함으로써 $\delta=1$로 사용하여 γ를 구한 결과보다는 더 좋은 결과를 찾을 수 있음을 보여주며 본 실험에서는 최적의 γ에 대해 $\delta=26.69$를 찾을 수가 있었다.

다음의 그림 6에서는 본 논문의 정리 1과 참고문헌[20]을 사용하여 설계된 제어기를 시스템(27)에 적용하였을 때의 출력 $x_1(t)$을 나타내며, 여기에서 실선은 본 논문의 정리 1을 이용한 결과이며 점선은 참고문헌[20]을 이용한 결과를 나타내고 있다.

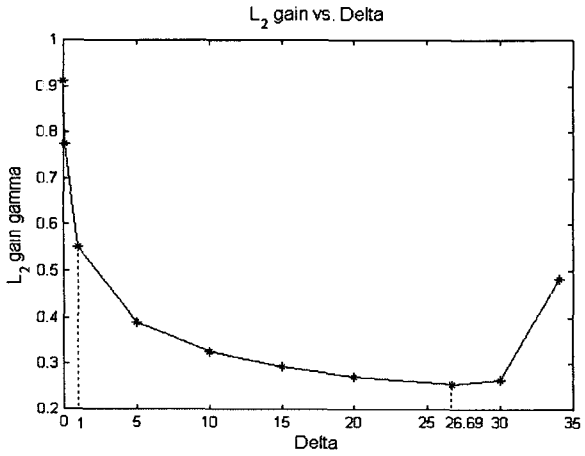

그림 5 δ 에 따른 L_2 이득 γ

Fig. 5 L_2 gain γ (y-axis) vs. δ (x-axis)

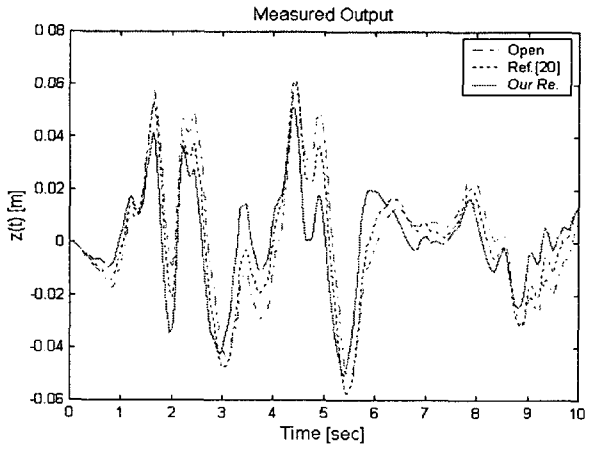

그림 6 측정 출력(실선: 정리 1. , 점선: 참고문헌[20])

Fig. 6 Measured Output(Solid line: Theorem 1., Dotted line: Ref.[20])

다음으로 표 1에서는 L_2 이득 γ와 그 때의 제어 이득 K를 나타내고 있으며 본 논문의 정리 1을 이용한 경우, 참고문헌[20]의 결과 보다 γ가 46.5% 정도 개선되었음을 알 수가 있다.

표 1 δ에 따른 제어 이득 K 및 L_2 이득 γ

Table 1 Control gain K and L_2 gain γ vs. δ

	δ	K	L_2 gain γ
Our Result	26.69	[−3.36 −0.20 −0.31 −0.31]	0.2572
Ref.[20]	1	[−0.83 −0.02 −0.08 −0.08]	0.5529

실험 2: Gain Scheduling Control Case

본 실험에서는 4장에서 제시한 방법에 따라 설계된 게인 스케듈링 제어기를 사용하여 모의 실험한 결과에 대하여 보이도록 하겠다. 여기에서는 제어 이득의 수를 $N=5$로 하였으며, 다음의 표 2는 각각의 sub-set을 위해 사용된 δ_i를 나타낸다.

표 2 게인 스케듈링 제어에 사용된 δ_i

Table 2 Used δ_i for gain scheduling control

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
Ref.[20]	100,000	80,000	50,000	30,000	1
Our Result	100,000	80,000	50,000	30,000	26.69

다음의 그림 7은 참고문헌[20]과 4장의 결과를 이용하여 설계한 스케듈링 제어기를 시스템(27)에 사용하였을 때의 출력 $x_1(t)$ 을 나타내며, 그림 8은 사용된 제어 $u(t)$를 나타낸다.

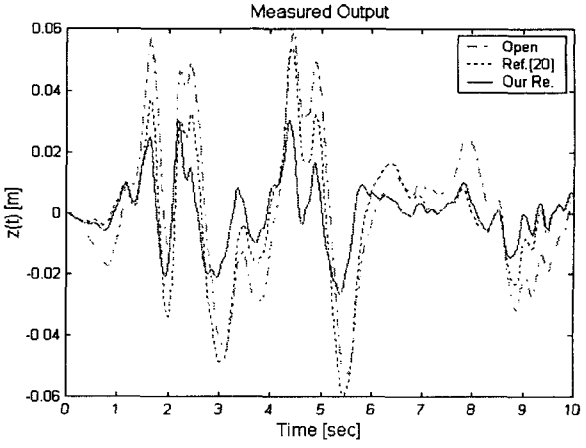

그림 7 측정 출력(실선: 정리 1. , 점선: 참고문헌[20])

Fig. 7 Measured Output(Solid line: Theorem 1., Dotted line: Ref.[20])

4장의 결과를 이용한 그림 7의 경우, 그림 6과 비교하여 더 좋은 성능을 갖는다는 것을 알 수가 있다. 특히, 실험 1에서의 결과와 비교했을 때 L_2 이득에 대해서 70%정도의 성능이 향상되었고, 게인 스케듈링 제어기에 대해서는 참고문헌[20]보다 74%정도의 성능이 향상되었다.

다음의 그림 8은 제어 입력 $u(t)$가 1을 넘지 않으므로 제어 입력에 절대로 포화가 일어나지 않고 있음을 보여 주고 있으며, 그림 9는 시간에 따라 사용된 제어 이득 K_i를 나타낸다. 그림 9에서 약 2.2초와 4.2~4.3 초 동안은 상태 $x(t)$가 외란으로 인해 커짐에 따라 K_3와 K_2제어 이득을 사용하고, 다른 시간 동안은 K_1제어 이득을 사용하고 있음을 알 수 있다. 따라서 설계된 게인 스케듈링 제어기를 사용함으로써 성능을 향상시킬 수가 있다.

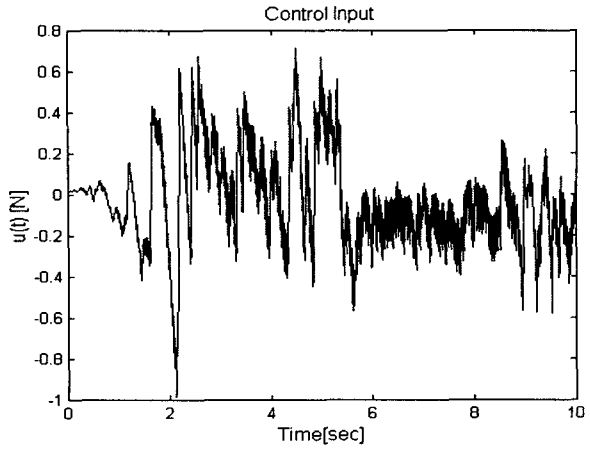

그림 8 제어 입력
Fig. 8 Control Input

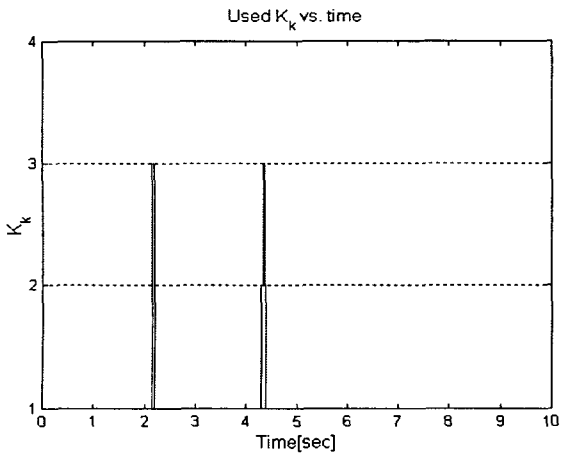

그림 9 시간에 따라 사용된 제어 이득 K_k
Fig. 9 Used control gain K_k vs. time

다음의 표 3은 실험 1과 실험 2의 결과에 대하여 외란으로부터 출력까지의 L_2 이득에 해당하는 $\dfrac{\int z(t)^T z(t)dt}{\int w(t)^T w(t)dt}$ 를 나타내며, 표 4에서는 각 제어 방법에 따른 결과를 Open-loop에 대해 개선된 성능의 백분율[%]로 나타내었다.

표 3 제어 방법에 따른 L_2
Table 3 L_2 as a control method

$(\times 10^{-3})$	Open-loop	Static Control		Scheduling Control	
		Ref.[20]	Our Result	Ref. [20]	Our Result
$\dfrac{\int z(t)^T z(t)dt}{\int w(t)^T w(t)dt}$	10.0	8.79	5.91	6.89	1.79

표 4 제어 방법에 따른 성능 개선도 [%]
Table 4 Improved Performance vs. Control Method [%]

	Static Control		Scheduling Control	
	Ref. [20]	Our Result	Ref. [20]	Our Result
개선도[%]	12.1	40.9	31.1	82.1

위의 표 3과 4에서 보듯이 본 논문의 주요 결과를 이용한 경우, 참고문헌[20]의 결과보다 static control의 경우 32.8%, scheduling control의 경우 74% 정도의 성능이 향상되었다.

또한, 참고문헌[20]의 결과를 사용한 scheduling control은 static control을 했을 때 보다 21.6% 정도 향상되었지만, 본 논문에서 제시한 결과를 이용한 scheduling control은 static control에 비해 70% 정도의 성능이 향상되어 매우 좋은 결과를 얻을 수가 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 포화 구동기를 갖는 시스템에 대하여 제어 입력에 포화가 이루어지지 않으면서, 외란 w로부터 출력 z까지의 L_2이득 γ가 최소가 되도록 하는 제어기를 먼저 설계하고, reachable set내에 N개의 sub-set을 정하여 상태 $x(t)$가 머무는 영역에 따라 N개의 서로 다른 제어 이득을 이용하도록 하는 상태에 종속적인 게인 스케듈링 제어기 설계 방법을 제시하였다. 각각의 sub-set에서 사용될 제어 이득은 sub-set내에서 절대로 포화가 이루어지지 않으며, L_2이득이 최소가 되도록 선형 행렬 부등식의 형태로 주어진 충분조건을 만족시킴으로써 얻어 질 수가 있다.

끝으로 *MATLAB*™ [26]을 이용한 모의 실험을 통해 정리 1을 이용한 static control과 4장의 게인 스케듈링 제어에 대해 참고문헌[20]과의 비교를 보임으로써 본 논문에서 제시한 결과의 유용성과 우수성을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] R. L. Kosut, "Design of linear systems with saturatin-g linear control and bounded states," *IEEE Trans. A-utomat. Contr.*, vol.28, No. 1, pp. 121-124, 1983

[2] P. -O. Gutman and P. Hagander, "A new design of

constrained controllers for linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, No. 1, pp. 22-33, 1985.
[3] P. -O. Gutman and S. Gutman, "A note on the control of uncertain linear dynamical systems with constrained control input," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, No.5, pp. 484-486, 1985.
[4] P. -O. Gutman and M. Cwikel, "Admissible sets and feedback control for discrete time linear dynamical systems with bounded controls and states," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31, No. 4, pp.373-376, 1986.
[5] W. J. Wang and B. S. Chen, "Stability of large-scale systems with saturating actuators," *Int. J. Contr.*, vol. 47, No. 3, pp. 827-850, 1988.
[6] B. S. Chen and S. S. Wang,"The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator: Time domain approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, No. 5, pp. 483-487, 1988.
[7] J. H. Chou, I. R. Horng and B. S. Chen, "Dynamical feedback compensator for uncertain time-delay systems containing saturating actuator," *Int. J. Contr.*, vol. 49, No. 3, pp. 961-968, 1989.
[8] J. H. Kim and Z. Bien, "Robust Stability of uncertain systems with saturating actuators", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, No. 1, pp. 225-229, 1994.
[9] S. I. Niculescu, J. M. Dion and L. Dugard, "Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, No. 5, pp. 742- 747, 1996.
[10] J. G. Chase and H. A. Smith, "Robust H_∞ control considering actuator saturation. I : Theory," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, No.10, pp. 976-983, 1996.
[11] T. Nguyen, F. Jabbari and S. de Miguel, "Applicaton of active control to buildings under seismic excitation: Actuator saturation," *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, Trieste, Italy, September 1998.
[12] Nguyen. T. and Jabbari. F., "Disturbance Attenuation for Systems with Input Saturation:an LMI Approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, No. 4, April 99, pp. 852-858.
[13] J. G. Chase, S. E. Breneman and H. A. Smith, "Robust H_∞ static output feedback control with actuator saturation," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, No. 2, pp. 225- 233, 1999.
[14] Teel, A. R., "Linear Systems with Input Nonlinearities : Global Stabilization by Scheduling a Family of H_∞-Type Controllers," *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 5, pp. 399-411, August 1995.
[15] P. Apkarian and P. Gahinet, "A Convex Characterization of Gain-Scheduled H_∞ Controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, pp. 853-864 and p.1681, May 1995.
[16] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker, "Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems : A design example," *Automatica*, vol.31, pp.1251-1261, Sept. 1995.
[17] P. Apkarian and Richard J. Adams, "Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 6, No. 1, 1998.
[18] Wu, F., Grigoriadis, K., Packard, A. "Anti-windup controller synthesis via linear parameter varying control design method," *Proc. 1998-ACC*, Phil., PA, pp. 3545-3549.
[19] F. Wang and V. Balakrishnan, "Robustness analysis and gain-scheduled controller synthesis for rational parameter-dependent systems using pararameter-dependent Lyapunov function," *Proc. 38th CDC.*, Phoenix, AZ, Dec. 1999.
[20] Srivatava, S., Jabbari, F. "Scheduled Controllers for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Input," *Proc. ACC-00*, Chicago, IL, June 2000, pp. 735-739.
[21] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 1994.
[22] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide with MATLAB*, The MathWork. Inc, 1995.

저 자 소 개

송 용 희(宋 龍 熙)

1976년 10월 22일생. 2000년 충북대학교 전기전자공학부 졸업. 2000년~2002년 충북대 대학원 제어계측공학과 졸업(석사). 2002년~현재 동 대학원 제어계측공학과 박사과정.

Tel : 043-235-2468
E-mail : yhsong@just.chungbuk.ac.kr

김 진 훈(金 鎭 勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공박). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 1998년~1999년 미국 UCI 방문교수. 현재 충북대 공대 전기전자및컴퓨터공학부 부교수.

Tel : 043-261-2387, Fax : 043-268-2386
E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr