大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 13 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.3, 309-327. August 2003

# '초기대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰

김 성 준*

이 글은 대수 교육과정을 개선하려는 여러 움직임 가운데 초등수학을 중심으로 하는 '초기대수'(early algebra)에 관한 것이다. 초기대수는 중등학교 대수 교육과 관련해서 발생하는 여러 문제를 초등수학의 재음미를 통해 해결하려는 시도로, 이것은 1980년대 '대수적 사고'를 학교대수에서 강조하려는 움직임과 함께 시작한 것이다. 초기대수는 대수를 기호가 아닌 추론 측면에서 논의하는 것으로, 기호 이전에 등장한 대수적 사고와 학생들의 심리적 발달을 고려해서 그 지도 가능성이 제시되고 있다. 이러한 초기대수와 관련된 연구는 1990년대 이후 미국을 비롯해서 네덜란드와 호주 등 각국에서 현재 진행 중에 있다. 한편 이 글은 우리의 초등수학 교과서를 분석하고, 이를 통해 초기대수와의 관련성에 대해 논의하였으며, 대수 교육과정의 개선이 초등수학에서부터 단계적으로 시작될 수 있음을 강조하고 있다.

## Ⅰ. 서론

우리는 일반적으로 산술과 대수를 구분하여, 초등에서는 산술을 학습하고 그리고 중등과정에서는 대수를 학습하는 것으로 생각한다. 그리고 우리 교육과정 역시 이러한 일반적인 구분에 따라 중학교 1학년에서 문자를 도입하는 것을 원칙으로 하고 있다. 교육과정에서 산술과 대수를 구분하는 것은 학생들의 연령별 인지 수준과 산술과 대수라는 영역별 내용상의 난이도를 고려한 것으로, 여기에 덧붙여 우리의 경우는 학생들이 문자(알파벳)를 다루는데 익숙하지 않다는데서 그 이유를 생각해볼 수 있을 것이다.

그러나 한편으로는 현행 대수 교육에서 발생하는 여러 문제를 감안해 본다면, 산술과 대수간의 이러한 엄밀한 이분법적 구분은 재고의 대상이 된다. 기존의 대수 교육은 산술에서 학습한 개념을 어떤 경우는 그대로 받아들이고, 어떤 경우는 새로운 관점에서 대수적인 맥락에 맞추고 있다. 문제는 학생들이 이러한 관점의 변화에서 그 차이를 구분하는 것이 어렵다는데 있으며, 산술과 대수가 초등과 중등으로 구분되어 있는 것은 이러한 문제를 더욱 어렵게 하고 있다. 선행 연구에서 대수 학습에서의 문제점으로 제시된 존재론적 간격(Sfard, 1991), 인지적 차이(Herscovics & Linchevski, 1994), 교수학적 단절(Filloy & Rojano, 1989) 등은 이러한 산술과 대수간의 구분에서 비롯되는 문제점을 지적한 것이다.

학교대수 교육에서 1980년대까지 계속되었던

* 서울대 대학원, joonysk@dreamwiz.com

이러한 산술과 대수의 구분은 1990년대 이후 NCTM의 Standards(1989)를 비롯해서 수학교육자들의 새로운 요구와 직면하게 된다.

이러한 상황에서 등장한 것이 '초기대수' (early algebra)[1]를 학교수학에 도입하려는 움직임이었으며, 이것은 산술과 대수의 엄밀한 구분을 대신하여 산술 학습에서부터 곧, 중등과정 이전에 대수와 관련된 여러 요소를 경험할 수 있는 기회를 제공하기 위한 목적에서 비롯되었다. 여기서 초기 대수는 중등과정에서 학습하는 문자와 기호를 그대로 도입하는 것이 아니며, 중등대수와 관련된 요소를 그 수준에 맞추어 추론 측면에서 강조하는 것을 말한다. 다시 말해 이것은 산술 단계에서 다룰 수 있는 대수적 사고 측면을 산술 학습에서 지도함으로써, 이후 대수 학습에서 학생들이 갑작스럽게 경험하는 어려움을 덜어주며 동시에 산술과 대수간의 연결을 원활하게 하려는 목적에서 비롯되었다.

이 글에서 우리는 대수교육과정을 개선하려는 여러 나라의 노력 가운데 초기대수에 초점을 두고 그 등장에서부터 배경 및 연구 실태를 차례대로 살펴보고, 이와 함께 우리나라 초등교과서에서 초기대수와 관련해서 논의할 수 있는 부분을 살펴볼 것이다.

## II. '초기대수'의 등장

먼저 1980년대까지 네덜란드의 대수 교육에 대한 Kindt의 논의를 살펴보자.

> 학교 대수 지도의 문제는 대수언어(구조)에서 비롯되며, 학생들은 왜 그런지 무엇 때문에 그렇게 되는지 그 이유를 생각하지 않고 교사들로부터 배운 규칙과 조작 기술을 그대로 따라하기를 반복한다. 그들은 수업 시간을 통해 대수의 일반화 측면과 변수의 동적인 측면에는 거의 관심을 가지지 못한다. 이와 함께 (대수의) 형식적 수준으로의 도약은 너무 빨리 진행되며, 학생들은 (대수와 관련된) 자신들의 schema를 개발할 여유를 갖지 못한 상태에서 대수를 학습하게 된다(van Reeuwijk, p.1, 재인용).

여기서 대수 지도와 관련된 Kindt의 문제 제기는 네덜란드에만 국한되어 나타나는 것은 아니다. 이러한 문제는 우리의 경우도 중학교 1학년 '문자와 식' 단원에서, 그리고 학생들이 대수 문제를 해결하는 과정에서 예외 없이 나타나고 있으며, 미국에서도 역시 8, 9학년에서 시작하는 Algebra1의 경우 Pre-algebra를 통해 어느 정도 그 진행 속도를 조정하고 있지만 그러나 일반화 측면이 약한 상태에서 형식적 수준으로의 도약이 이루어지는 문제점을 안고 있다. 일반적으로 대수는 산술과 구분되어 중등과정에서 도입되고 있다. 이러한 구분으로 인해 학생들은 대수를 초등과정에서 학습한 산술과는 다른 것으로 생각하고, 그리고 산술에서의 기초가 완성된 뒤에야 비로소 대수 학습이 가능하다고 생각하게 된다.

실제로 학생들은 초등과정에서 반복적으로 산술 연산을 익힌 다음에야 비로소 대수를 시작하게 되는데, 문제는 완전히 산술에 동화된 schema를 통해 대수를 학습하는 것이 쉽지 않

1) 이 글에서는 'early algebra'를 '초기대수'로 번역하여 사용한다. 이것은 초등대수(elementary school algebra)와 구분되는 것으로, 초등대수는 초등학교에 한정되어 다루어지는 대수를 의미하는 반면, 초기대수는 초등학교라는 장소보다 그 시기에 더욱 초점을 둔다. 곧, 초기대수는 기존의 대수 교육이 이루어지는 시기보다 앞서 이루어지는 대수 교육을 의미하며, 그 주제 역시 중등대수에서 말하는 기호화보다 대수적 사고(추론) 측면을 강조한다.

다는데 있으며 또한 이러한 schema의 조정 또한 쉽게 일어나지 않는다는데 있다. 이를 테면, 대수 학습을 시작하면서 학생들은 동치, 연산, 방정식 등을 해석하는데 있어서 산술과는 다른 전형적인 변화에 부딪히게 된다. 산술에서의 연산은 사건이나 행동을 수학적으로 표현하는 것인데 비해 대수에서의 연산은 하나의 대상이며 동시에 논리적인 관계를 설명하는 것이다. 그리고 산술에서 등호는 방향을 가지고 결과를 나타내기 위해 사용되는데 비해 대수에서는 동치 관계를 의미하게 된다.

이처럼 산술과 대수 사이에서 동일한 학습 대상을 서로 다른 관점에서 해석해야 하는 것은 대수와 관련해서 학생들이 경험하는 많은 어려움 가운데 하나이다.[2] 이처럼 산술과 대수를 구분해서 생각하는 것은 산술에서 강조되는 과정(또는 절차)을 대신하여 대수는 수학적 관계를 표현하고 수학의 형식적인 구조를 파악하는 것이 핵심이라고 보는 데서 비롯되었다. 그러나 이러한 대수 도입과정에서, 학생들은 추론을 대신하여 임의의 기호적 규칙을 조작하는데 초점을 맞추고 있으며, 이것은 대수 학습에서 추론 측면을 간과하는 문제를 낳게 된다. 다시 말해 대수 학습에서 학생들이 경험하는 어려움의 가장 큰 원인은 이러한 산술과 대수간의 엄밀한 이분법적 구분에서 찾을 수 있을 것이다.

이러한 대수 교육의 문제점을 개선하려는 노력은 학교 대수 교육과정을 개선하려는 움직임으로 이어졌는데, 1980년대와 1990년대는 서로 다른 양상으로 그 연구가 진행되었다. 곧, 1980년대 이루어진 여러 연구에서는 산술과 대수를 초등과 중등과정으로 구분해서 학습하는 것이 기본 가정으로 되어 있으며, 따라서 대수 학습과 관련된 어려움은 산술에서 대수로의 원만한 이행을 통해 최소화된다고 보았다. 예를 들어, NCTM의 Standards(1989)에서는 대수는 5학년에서 8학년까지의 산술을 일반화한 다음에 도입할 것을 주장하고 있으며, 이후 9학년에서 12학년까지의 대수 수업의 목표는 논리적인 측면과 일관성을 강조하면서 진행되어야 한다는 입장을 제시하고 있다. 그러나 이러한 견해에 대한 변화는 1990년대 이후 Algebra Working Group(NCTM, 1997)의 논의 등에서 표면화되었으며, NCTM의 새로운 Standards(2000)에서는 앞서 1989년 Standards와 비교해서 분명한 차이를 보여주고 있다. 곧, 새로운 Standards는 아동들의 대수적 추론을 잠재적으로 기를 수 있는 활동을 초등학교 입학과 동시에 시작해야 한다는 입장을 초등 교육과정 권고에서 분명하게 밝힘으로써, 초기대수 학습의 중요성을 강조하고 있다.

한편 초등학교 수학 교육에서부터 대수를 조기에 도입하려는 시도는 1980년대로 거슬러 올라가 '대수적 사고'를 강조하려는 움직임과 함께 시작되었으며,[3] 최근 여러 연구를 통해 이러한 경향은 다양한 형태로 제시되고 있으며,[4] 이러한 논의에서 초점을 두는 것은 초등학생들에게 어떻게 대수적 특징과 연결된 사고

2) 이 글은 이러한 어려움의 원인을 산술과 대수를 엄밀하게 구분한 데서 찾고 있는데 비해, 중등과정에서 대수를 도입하려는 입장에서는 오히려 이러한 어려움 때문에 중등에서 대수를 도입해야 한다는 주장을 한다. 이들의 입장은 산술과 대수에서 비롯되는 해석의 차이를 이해하고 받아들이기 위해서는 학생들의 이해 수준을 고려해야 하는데, 이러한 이해는 중등과정에서야 가능하다는 것이다. 그러나 이 글에서 우리는 사고와 추론 측면에서 접근하는 초기대수를 통해 그 시기를 조정할 수 있다는 입장을 취한다.

3) 대수적 사고에 대한 명시적인 언급은 1984년 ICME 5차 회의에서 처음으로 제기되었는데(Davis, 1985), 이 자리에서 Herscovics는 '대수'를 대신하여 '대수적 사고'를 working group의 명칭으로 사용할 것을 제안하였으며, 이와 함께 초등 수준에서부터 '대수적 사고'를 강조한 대수 학습이 원활하게 이루어질 수 있도록 대수와 관련된 논의를 확대할 것을 주장했다.

(추론)를 가르칠 수 있는가 그리고 대수적 사고가 학생들의 경험과 어떻게 실제적으로 연결될 수 있는가를 보이는데 있다. 이러한 초기대수에 대한 아이디어는 1980년대 대수를 중등과정의 고유한 영역으로 인식하던 가운데에서도, 몇몇 연구자에 의해 대수 지도의 어려움을 해결하고 대수 학습을 개선하기 위해 제시되었다(Davis, 1985). 이러한 주장은 학생들이 중등과정 이전이라 하더라도 수학 문제에서 수학적 관계에 초점을 둘 수 있다는 생각에서 비롯된 것으로, Vergnaud(1988)는 대수 또는 전-대수(pre-algebra)와 관련된 지도를 초등학교 수준에서 시작할 것을 주장하고 있으며, 그의 이러한 주장은 초기대수와 비슷한 관점에서 산술에서 대수로의 이행과 관련된 인식론적 주제를 학생들에게 미리 준비시킴으로써 대수 학습에서의 어려움을 개선하고자 한 것이었다(Carraher, Schliemann, Brizuela, 2000, 재인용). 또한 Bodanskii (1991)는 문장제 해결에서 사용되는 산술적 방법과 대수적 방법 사이의 연관성을 논의하는 가운데 '대수적 방법은 수학에서 방정식이 필요한 문제 해결 상황에서 보다 자연스러우며 효과적인 방법이다'라는 결론을 내렸으며, 따라서 초등학교 1학년에서부터 이러한 대수적 방법이 지도되어야 한다는 입장을 밝혔다.[5] 그리고 1990년대에 들어서 본격적으로 진행된 초기대수에 대한 논의는 이를 뒷받침하기 위한 실험적인 연구로 이어졌으며, 이를 통해 초기대수의 가능성을 검증하는 작업이 계속되었다. 그 예로 Brito Lima(1996)는 브라질의 초등학교 1학년에서 6학년 학생들을 대상으로 한 실험연구에서 학생들이 대수 문제에 대한 표현을 개발할 수 있고, 그리고 다양한 전략을 이용하여 대수 문제를 해결할 수 있다는 것을 보여주었으며, Schifter(1998) 역시 초등학교 수업에서 학생들이 대수적 추론을 할 수 있다는 증거를 제시하고 있다(Carraher et al., 2000, 재인용). 이와 함께 앞서 제시한 Kindt의 반성에서처럼 대수 교육에서 여러 문제를 안고 있었던 네덜란드의 경우도 이러한 대수 도입 방식에 대한 대안으로, 1990년대 이후 RME 교과서의 대중적인 보급과 함께 초등과정에 적합한 대수 지도를 연구해왔으며, 이러한 연구는 어떻게 대수적 추론을 초등수준에서부터 단계적으로 개발할 것인가에 대한 논의를 포함하고 있다.[6] 이와 함께 EARG(Early algebra research group)를 중심으로 초기대수에 관한 다양한 논의가 진행되고 있으며, NCISLA(National center for improving student learning and achievement mathematics and science)가 중심이 된 프로젝트가 진

4) 초기대수(early algebra)와 관련된 연구로는 네덜란드의 Freudenthal 연구소와 미국의 Wisconsin 대학의 교육연구소가 공동으로 진행한 MiC(Mathematics in Context) 연구를 비롯해서, 미국의 SimCalc Project, EARG(Early algebra research group)를 중심으로 이루어진 논의와 TERC and Tufts university에서 진행 중인 EA project, 그리고 NCISLA의 K-12 Education research project 등이 있으며, 호주의 경우 National Mathematics Profile(1993)에서 그리고 Queensland State Curriculum Council(QSCC)의 P-7 대수 교수요목 제안서에서 초기대수의 내용을 살펴볼 수 있으며, 영국의 경우 Mathematics in the National Curriculum(1991)에서 초등과정에서부터 패턴을 강조함으로써 중등과정 대수를 준비시킬 것을 제안하고 있다.

5) 이러한 그의 견해는 1학년부터 4학년을 대상으로 문장제를 대수적 표현으로 지도한 러시아 학생들의 데이터에서 확인할 수 있다. 초등학년에서부터 대수적 표현으로 문제를 학습한 이들은 전통적인 프로그램에 따라 5년 동안 산술 수업을 받고 6학년 때 비로소 대수 수업을 시작한 6, 7학년 학생들과 비교할 때, 대수 문제를 해결하는데 사용한 전략과 결과 면에서 더 좋은 성과를 보여주었다.

6) 그 대표적인 연구가 Amerom(2002)에 의해 진행된 'Reinvention of early algebra'이며, 이것은 현실주의 수학교육과 개발 연구에 근거해서 이루어진 것으로, 대수를 기호화와 추론 측면으로 구분하고, 여기서 핵심적인 요소를 각각 추출하여 초등과정과 연결해서 살펴본 다음, 이 가운데 추론과 관련된 대수 지도가 초등과정에서부터 가능하다는 주장을 하고 있다.

행되고 있다. 그리고 이러한 연구를 통해 초기대수의 가능성과 대수적 사고의 정의 및 그 역할에 대한 논의가 계속되고 있다.

Kaput(2001)은 초기대수와 관련된 대표적인 인물로, 특히 그는 초등수학의 맥락에서 학생들의 능력을 이용해서 대수적 추론을 이끌어내는데 연구의 초점을 두고 있다. 그의 연구를 살펴보면 앞서 제시한 초기대수의 관점을 종합하고 있음을 알 수 있다. Kaput은 초기대수 지도와 관련해서 먼저 초등에서부터 고등과정까지의 모든 학년에서 등장하는 대수적 추론을 정리해서 제시하였으며, 이러한 자료를 통해 대수화된 K-12 교육과정이 학교 수학에서 다양한 아이디어에 접근하는 가장 합리적인 수단임을 강조하고 있다(Kaput & Blanton, 2001). 이와 함께 초등 수준에 적합한 대수적 추론을 개발하는 것은 중등 이후의 수학 학습을 개선하는데 가장 중요한 요소임을 지적하고 있다. 그는 이러한 논의를 바탕으로 대수 교육과정을 초등에서부터 적절하게 개선하는 것은 전체 수학 교육과정에서 핵심이 된다고 보았으며, 특히 초등과정에서부터 대수적 추론을 개발하고 이러한 결과를 초등학교 교사들에게 교육시키는 것은 대수 교육과정 개선에서 무엇보다 먼저 요구된다고 보았다. 이와 함께 그는 산술과 대수를 인위적으로 구분하는 것은 학생들로 하여금 그들이 보다 이른 시기에 수학에 대하여 사고할 수 있는 능력을 제거하는 것으로 보았으며, 동시에 이것은 이후 학생들이 대수를 학습하는 것을 더욱 힘들게 한다는 점을 분명히 하고 있다. 이러한 그의 관점은 학습을 통한 이해는 오랜 시간 동안 점진적으로 형성되기 때문에, 대수적 사고 역시 초등 수준에서 시작하여 중등과정으로 이어지면서 점진적으로 개발되어야 한다는 생각에서 비롯되었다.

한편 Kaput의 논의를 비롯해서 초기대수와 관련된 여러 논의에서 유의할 점은 이러한 초기대수가 중등학교 대수를 초등수준으로 그 내용을 단순화해서 옮겨놓는 것이 아니라는데 있다. 대수의 본질에는 다양한 측면이 있으며, 대수는 단순히 기호 조작 및 규칙을 학습하고 강조하는 것만을 의미하는 것은 아니다. 따라서 초기대수에서 주장하는 것은 초등 단계에서 대수를 가르치는 것은 대수와 관련된 사고(추론) 측면을 개발하려는 것이며, 대수를 알고리즘에 따라 형식적으로 지도하는 것에서부터 벗어나고자 하는 것이다. 또한 초기대수를 통해 산술과 대수를 이어주는 연결 고리를 산술에서부터 찾으려는 것이며, 이러한 논의를 통해 대수학습에서 비롯되는 많은 어려움의 원인을 밝히고 동시에 이러한 문제를 해결하려는 것으로 볼 수 있을 것이다.

## III. '초기대수'의 지도 배경

우리는 앞서 초기대수가 산술과 대수의 엄밀한 구분에서 비롯되는 어려움에 대한 대안으로 등장하였으며, 이는 대수적 사고를 통해 초등수학과 중등대수를 연결하려는 시도로 강조되고 있음을 살펴보았다. 이제 우리는 다음에서 초기대수 지도의 가능성을 논의하기 위해 그 배경을 역사적, 인식론적, 심리적 배경으로 구분하여 살펴보고자 한다.

### 1. 역사적 배경

대수의 기원은 연구자가 대수를 정의하는 관점에 따라 다양하게 제시될 수 있을 것이다. 예를 들어 대수를 기호 조작으로 본다면 이 경우 대수는 16세기 이후의 문헌에서부터 그 기원을 찾아볼 수 있을 것이다. 이에 비해 대수

를 문제해결 측면에서 본다면 대수의 기원은 이보다 훨씬 그 이전으로 거슬러 올라갈 것이다.[7] 곧, 문제해결과 관련된 대수의 기원은 아시리아를 비롯해서 바빌로니아와 이집트에서, 그리고 알렉산드리아 등에서 찾아 볼 수 있으며, 이것은 대수의 역사를 다루는데 있어서 일반적으로 수용되는 관점이다. 따라서 대수의 역사적 기원을 문제해결로 볼 경우, 우리는 문자와 기호가 없는 상태에서 진행된 대수적 사고의 측면이 대수에서 보다 본질적인 측면임을 알 수 있다. 이와 함께 우리는 대수의 어원을 통해서도 대수는 초등수준에서부터 시작되는 기초적인 활동이 중요하다는 것을 알 수 있다. 대수의 어원은 al-jabr와 al-muqabala에서 비롯된 것으로, 이것은 '복원과 축소의 과학'(우정호, 1999, p.226)으로 요약된다. 여기서 대수는 계산 과정에서 서로 구분하고, 비교하고, 생략하는 활동을 그 핵심으로 하고 있으며, 이러한 활동은 실제로 초등수준에서 강조하는 것과 동일한 것이다.

대수의 기원과 어원은 학교 대수가 문자와 식의 학습과 동일한 것이 될 수 없음을 보여주며, 동시에 초등 수준에서의 대수는 기호와는 다른 관점에서 논의될 수 있음을 보여준다. 이것은 '초기대수'에서 강조하는 추론 측면과 연결되며, 우리는 대수의 역사적 배경으로부터 문자 기호를 사용하지 않고 추론을 강조함으로써 초기대수의 지도 가능성을 엿볼 수 있다.

한편 대수의 역사에서 등장하는 사고 측면을 초등수학 교과서에서 살펴보면 다음과 같다. 고대 바빌로니아에서 제시된 문제는 오늘날의 관점에서 보면 문장제의 형태를 띠고 있으며, 그리고 문제 풀이 과정을 살펴보면 이것은 양을 나누고 비교하는 가운데 오늘날의 비례 개념을 이용해서 사고 과정이 진행되었음을 알 수 있다(Radford, 2001). 오늘날 초등수학에서는 수를 중심으로 하는 산술이 주로 다루어지지만, 이와 함께 학생들의 조작 수준에 따라 길이, 넓이, 부피 등의 양을 다루고 있으며, 그리고 6-가에서는 기준량과 비교하는 양의 관계에서부터 비와 비율을 다루고 이를 토대로 비례식을 학습하고 있다. 또한 초등학교 1단계에서부터 '문제 푸는 방법 찾기' 단원을 통해 문장제를 해석하고 다양한 전략을 이용해서 문제를 풀어 나가는 연습을 강조하고 있다. 이러한 관점을 비교해 볼 때, 대수의 역사에서 제시된 여러 형태의 사고는 실제로 초등학교 산술에서부터 지도될 수 있으며, 문자와 기호 없이 대수에서 요구하는 추론을 초등수준에서 반영함으로써 초기대수의 지도 가능성을 살펴볼 수 있을 것이다.

## 2. 인식론적 배경

초등산술에서 수 체계의 본질은 원소들 간의 관계의 집합에 있으며, 이것은 단순히 원소들 또는 결과에 의해 표현되는 것이 아니다. 그러나 대부분의 산술 수업은 후자의 측면을 강조하고 있으며, 그 결과 산술은 계산 과정과 동일한 것으로 다루어지는 것이 보통이다. 일반적으로 산술은 과정이나 절차에 초점을 두는 반면, 대수는 대상과 관계를 강조하고 있다.

우리는 초등학교 학생들의 초기 활동에서 양을 다루고 그 양을 비교하는 활동을 발견할 수

7) 이에 대해 Sfard(1995)는 역사적으로 대수의 기원을 특정한 계산을 반복하는 과정과 일반적인 과정을 대비하면서 일반성이 나타나는 시점으로 보고 있다. 일반성은 대수를 산술과 구분 짓게 하는 중요한 특징 가운데 하나이다. 그러나 이것 또한 '일반성' 개념을 해석하는 관점에 따라 고대에서부터 근대에 이르기까지 다양한 논의가 가능하다는 문제가 있으며, Sfard 역시 대수에서의 일반성을 강조할 뿐 정확한 대수의 기원에 대해서는 언급하지 않고 있다.

있다. 이러한 활동은 주어진 상황에 내재된 수학적 관계를 다룸으로써 가능한 것이다. 그러나 산술에서는 이러한 활동에서 자연스럽게 생각할 수 있는 '관계' 측면을 생략하고 있으며, 오히려 수와 연산을 강조하기 위해 규칙에 따르는 알고리즘을 그 핵심으로 보고 있다. 그 결과 산술에서 대상과 관계는 의미를 갖기 힘들게 되어 있으며, 이러한 학생들의 인식은 대수 학습에서 계속되면서 많은 문제를 일으키게 된다. 초기대수는 이러한 문제를 해결하기 위해, 수와 양을 사고 대상으로 삼고 있으며 그 관계를 추론함으로써 사고하는 것을 강조하며, 이를 통해 초기대수의 지도 가능성을 초등수학에서부터 생각해볼 수 있다.

이러한 관점을 인식론적 측면에서 살펴보면 다음과 같다. 먼저 Piaget는 인식론적 관점에서 구조를 관계 시스템으로 규정하고 있다(Schliemann, Carraher, Brizuela, Jones, 1998, 재인용). 그리고 우리는 무엇보다 현대대수를 통해 이러한 구조를 가장 쉽게 만나게 된다. 학교 대수의 경우 이러한 구조가 직접 다루어지지는 않지만, 산술에서 다루는 수 체계와 그 연산은 사실상 이러한 구조 가운데 놓여 있으며, 중학교에서 다루는 문자와 식의 역할은 이러한 구조를 대상화해서 표현하는 것으로 볼 수 있다. 이것은 양을 다루고 비교하는 것이 지도 과정에서 그 대상을 간직하면서 동시에 양들 사이의 관계를 문제의 조건과 함께 파악할 수 있기 때문이다. 초기대수의 경우 패턴은 이러한 양을 도구로 해서 관계를 다루고 있으며, 패턴을 통해 양을 비교하고 그 관계를 발견함으로써 패턴의 구조를 이해하는 것이며, 따라서 이것은 초등수학에서부터 주어진 대상을 관계와 함께 다룰 수 있는 기반을 마련하는데 도움을 준다.

다음으로 Sfard와 Linchevski(1994)는 수학에서 구조적 개념을 받아들이는 어려움을 기술하면서, 대수 역시 역사적으로나 존재론의 입장에서나 처음에는 과정으로 인식되었다는 사실에 주목하였다. 그리고 대수는 실재화(reification)를 통해 대상으로 인식되었으며, 결과적으로 구조를 가질 수 있게 되었다. 그들은 대수 학습에 있어서 실재화의 가치를 언급하면서, 학생들이 대수에서 경험하는 어려움의 원인을 대수의 도입에서 급진적으로 이루어지는 구조적 접근에서 찾고 있다. 그리고 이러한 접근에서는 대수에 본질적으로 내재된 과정-대상의 차이점을 구분할 수 없다고 보았으며, 이것을 기존의 대수 학습에서 비롯되는 인식론적 문제로 논의하고 있다.

결론적으로 대수 학습에서 비롯되는 과정-대상의 인식에서의 어려움은 산술 학습과 직접적으로 관련되어 있으며,[8] 따라서 산술 학습에서부터 '초기대수'를 통해 문제가 되는 부분을 개선함으로써 대수 도입에서 이와 같은 인식론적 문제를 개선할 수 있을 것으로 기대된다.

### 3. 심리적인 배경

산술과 대수를 초등과 중등과정으로 구분하는 심리학적 근거에는 Piaget의 발달단계이론이 놓여 있다(Schliemann et al., 1998). 그에 따르면 구체적 조작기까지의 아동은 자신의 생각을 하나의 대상으로 표현할 필요성을 느끼지 않으며, 형식적 조작기에야 비로소 가설-연역적 사고와 함께 과정과 대상을 구분할 수 있게 된다

8) 산술에서 사용하는 기호는 문제를 표현하기보다 계산을 위한 도구로 강조되고 있으며, 변화하는 수(또는 양) 사이의 관계를 찾는 문제에서도 특정한 값을 계산하는 것과 같은 질문에 제한되어 있으며, 이러한 제한된 산술 학습은 대수에서 인식론적 문제를 낳는 원인이 된다.

고 하였다. 이러한 이유에서 문자와 식의 학습은 형식적 조작기에 접어드는 중등과정(11~12세)에서야 가능한 것으로 여겨졌으며, 실제로 우리의 경우도 중학교 1학년에서 문자를 처음으로 도입하고 있다. 그러나 우리는 Piaget의 이론에 근거해서 문자와 식의 지도시기를 논의하는 것은 적절하지 않다는 입장을 취한다. 대수에는 다양한 측면이 있다. 따라서 대수를 특정 연령에 완수해야 하는 기술들의 집합으로만 보는 것은, 그리고 산술에 대한 규칙을 확장해서 어떤 조건에 따르는 표기로만 보는 것은 심각한 문제를 일으키게 된다. 그리고 무엇보다 학생들의 발달단계를 고려해서 현재와 같은 방식으로 중학교에서 문자를 지도한다고 해서 대수 학습에서 발생하는 어려움이 해결된다고 볼 수도 없다. 이는 곧 대수 교육은 대수를 지도하는 방법의 문제이며, 결코 지도시기에 따라 결정될 수 있는 성격의 것이 아님을 의미한다.

학생들은 초등수준에서부터 대수와 관련된 다양한 능력을 발달시킬 수 있다. 무언가에 있어서 어떤 부분은 무시하고 어떤 부분에는 집중하거나, 그것을 상상하고 표현하는 능력과 눈에 보이는 것을 추상화하고 일반화하는 능력 등은 초등학교에서 다루어지는 다양한 활동에서 나타난다. 예를 들어 일반적인 카테고리로 봐서 의자라고 할 수 있는 것도 아동이 특정한 형태로 자신의 앞에 있는 것만을 보아 왔다면 결코 그것을 의자라고 말할 수 없을 것이다. 그러나 아동은 자신이 보는 것과 함께 다른 상황에서도 그와 같은 형태를 분별하는 능력을 가지고 있으며 이것을 일반화해서 생각하는 것은 아동들의 심리 과정에게 자연스럽게 일어나게 된다. 이처럼 초등수준에 놓여 있는 학생들의 심리적인 발달 과정은 (대수적 추론과 관련해서) 다양한 능력을 포함하고 있으며, 이것은 산술에서부터 대수적인 요소를 발견하는 밑바탕이 된다. 따라서 '초기대수'는 이러한 요소를 초등과정에서부터 이끌어내고, 학생들에게서 발견되는 자연스러운 심리적인 과정을 일련의 사고와 추론으로 발달시키는 것을 목적으로 하고 있으며, 이것은 학생들의 심리적인 발달단계를 고려해서 초등학교 초기에 대수를 대수적인 사고에서부터 이끌어내기 위한 것으로 볼 수 있다.

요약하면 초기대수는 역사적인 배경에서 보면 문제해결이라는 측면에서 초등수학에서의 지도 가능성을 엿볼 수 있으며, 인식론적으로는 과정 중심적인 산술에서 대상과 그 조작을 강조할 수 있는 초기대수의 논의를 살펴볼 수 있었다. 그리고 심리적으로는 대수의 기호 측면이 아닌 추론을 강조한다고 할 때 피아제의 심리발달단계가 대수 학습에서의 결정적인 조건이 아님을 알 수 있다. 이러한 초기대수의 배경을 근거로 하여 다음 장에서 우리는 현재 진행 중인 초기대수의 연구 실태를 살펴보고자 한다.

## Ⅳ. '초기대수'의 연구 실태

'초기대수'(early algebra)와 관련된 논의는 네덜란드와 미국을 비롯해서 영국, 호주 등에서 광범위하게 진행되고 있다. 이것은 대수 교육 과정에서의 문제점을 지적하고 이를 개선하려는 움직임과 함께 하고 있으며, 이를 통해 어떻게 초등수준에서부터 중등과정에 등장하는 대수적인 요소를 사고와 추론 측면에서 이끌어낼 것인가 하는 문제를 다루고 있다.

다음에서 우리는 초기대수의 연구 실태로 세 가지 연구에 대하여 살펴보고자 한다.

먼저 네덜란드의 Freudenthal 연구소와 미국의 Wisconsin 대학 교육 연구소 간의 공동 연

구로 이루어진 MiC(Mathematics in Context) 프로젝트를 간략하게 살펴보고, 다음으로 호주의 Queensland State Curriculum Council(QSCC)에서 제안한 P-7 대수 교수요목 제안서를 살펴볼 것이다. 그리고 마지막으로 미국의 NCISLA의 K-12 Education research project에서 다루고 있는 초기대수 프로젝트를 살펴볼 것이다.

### 1. 네덜란드-미국, MiC 프로젝트

먼저 네덜란드의 초등과 중등과정 대수를 MiC에서 제시한 교과서를 중심으로 살펴보고자 한다. Freudenthal 연구소는 대수 학습에서의 문제점으로 앞서 Kindt가 분석한 세 가지를 들고 있는데 곧, 추론과 일반화에 관심을 가지지 않으며, 너무 빨리 형식적인 수준으로의 도약이 이루어지며, 그리고 대수의 유용성이 학교 수학에서 제시되지 않는다는 문제를 지적하고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Freudenthal 연구소는 1980년대와 90년대에 학교 대수 지도와 학습에서 그 이론과 실제를 개발하는데 많은 노력을 쏟았다. 네덜란드에서 중등 교육 과정을 개선하려는 노력은 80년대 upper secondary(16~18세) 과정을 개선하려는 움직임과 함께 시작되었다(W12-16 교육과정). 80년대 말과 90년대 초 lower secondary(12~16세)를 위한 새로운 수학 교육과정이 개발되었으며, 1990년부터 Freudenthal 연구소는 10~14세를 위한 MiC 프로젝트를 미국의 연구진과 함께 개발하였다. 최근에는 네덜란드에서 보다 어린 학생들을 위한 대수 지도와 학습에 대한 연구가 시작되었다.

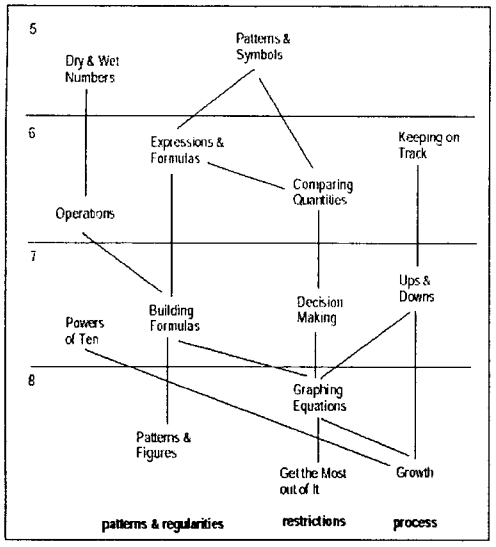
이 가운데 MiC의 대수 영역은 대수적 추론을 초기에 개발하는데 초점을 두고 있으며, 이것은 초기대수와 관련해서 최근의 네덜란드 연구를 함축적으로 포함하고 있다. MiC 프로젝트는 Freudenthal 연구소와 Wisconsin 대학간의 공동 연구로 진행되었으며, 그 대상은 5학년부터 8학년까지로 하며, 그 영역은 수, 대수, 기하, 통계와 확률로 구분된다. 이 가운데 대수 영역은 다음과 같은 특징을 가진다.

> 학생들은 다양한 표현과 함께 관계를 기술하는 방법을 배우고, 그리고 이러한 표현들을 연결시키는 방법을 배운다. 대수는 문제 해결에 사용되는데, 학생들은 대수를 이용하는 적절한 방법에 대하여 생각한다. 그리고 문제 해결은 대수적 표현을 선택하고 판단하는 것을 포함한다. 그러나 대수는 그 구조와 기호를 목적으로 하는 것은 아니다. 대수는 문제를 해결하기 위한 수단이다. 실세계 또는 맥락에서 시작한 문제는 실제적인 문제와 동일한 방법으로 해결된다(van Reeuwijk, p.20).

MiC 대수 영역은 식과 공식, 방정식과 부등식, 그래프를 주제로 하고 있으며, 이들 주제는 서로 유기적으로 얽혀서 제시되며 이 가운데 대수적 사고는 대수적 조작보다 더 중요하게 다루어진다. 그리고 7학년이 끝나고 8학년이 되면서 대수는 조금씩 형식화된다.

각각의 주제는 아래 <그림Ⅳ-1>에서 보듯이 패턴과 규칙성, 제한 조건, 과정으로 표현되어 전체적으로 하나의 흐름을 구성한다.[9]

9) <그림Ⅳ-1>은 van Reeuwijk(p.22)에서 인용한 것으로, 대수 교육과정에 해당하는 교과서는 3개 주제 총 11권으로 구성되어 있다. 각각은 MiC 교과서의 제목으로, 이 글에서는 그 내용과 의미를 살리기 위해 이를 한글로 번역하는 것을 생략했다.




[그림Ⅳ-1] MiC의 대수 교육과정

[그림 Ⅳ-1]에서 제시된 대수 영역을 주제별로 살펴보면 다음과 같다.

먼저 식과 공식은 패턴과 규칙성으로 표현되고 있으며, 이 주제는 기하와 수치적 패턴에서 규칙성을 발견하고 그리고 기술하는 것을 포함한다. 대수에서 패턴과 규칙성을 추론하는데 필요한 중심 개념은 변수, 식, 방정식, 부등식이다. 이 주제는 식과 공식을 사용해서 상황을 기술하는데 초점을 두고 있다. 초등수준에 해당하는 5학년에서부터 규칙성과 패턴을 관찰하고 기술하면서 대수 연산을 위한 비형식적인 언어가 개발된다. 그리고 6학년에서 식과 공식에 대한 전-형식적인(pre-formal) 형태로 arrow language, arithmetic tree 등을 탐구하기 시작한다. 이러한 비형식적인 언어는 먼저 간단한 대수 공식과 연결된다. 중등수준에 해당하는 7학년이 되면서 Building Formulas에서 학생들은 앞서 학습한 내용을 대수적 언어를 사용해서 나타낸다. 그리고 8학년에서는 다양한 패턴을 형식적인 문자를 사용해서 나타내는 것을 학습한다. 이 과정에서 초등수준에서 학습한 다양한 시각적 패턴은 규칙을 발견하고 그 속에서 관계를 학습하기 위해 중등 이후에도 계속해서 다루어진다.

방정식과 부등식을 살펴보면, 먼저 문제 상황이 주어지고 여기서 제한 조건 등을 생각하면서 문제를 해결하기 위한 전략으로 다루어진다. MiC에서는 주로 일차방정식과 부등식을 다루고 있는데, 학생들은 문제 상황을 수학적 맥락에 비추어 풀이를 해석하고 그것이 타당한지를 검토한다. 이 주제는 6학년 Comparing Quantities에서 시작되며, 어떠한 형식적인 알고리즘도 도입되지 않은 상태에서 전-형식적인 방법에 초점을 두면서 진행된다. 여기서 중요한 것은 양을 대상으로 다루는 연습을 충분히 하는 것이며, 이러한 개념은 이후 7, 8학년 Decision Making과 Get out of It에서 형식화된다. 마지막으로 그래프는 동적인 과정을 주로 다룬다. 동적인 과정은 변화 특히 시간에 따르는 변화에 초점을 맞추고 있다. 이것은 비례와 반비례에서 비롯되는 함수적 관계를 인식하고 사용하는 것을 포함한다. 이 주제는 6학년에서 직선의 그래프를 구성하고 해석하면서 시작한다. 7학년에서부터 문제 상황은 증가와 감소를 다루면서 특정한 형태의 그래프를 학습하게 되고, 8학년 이후부터는 다양한 증가 형태를 보다 깊이 있게 다루게 되며, 이것은 통계 영역과도 연결된다.

MiC를 통해 학생들은 실세계에서부터 많은 변형된 문제를 탐구함으로써 문제 상황을 표현하고, 기호적 표현과 그래프 표현의 힘을 이해하게 된다. 이 과정에서 학생들은 일반화하고 형식화하며 공식을 구성하며 그리고 자신들이 만들어낸 일반화와 형식화를 기술하는 것을 배우게 된다. 그리고 이러한 문제 상황은 초등수준에서부터 표, 그래프, 문장, 그림, 기호와 공식 등 다양한 표현 형태로 제시되며, 학생들은

5, 6학년에서부터 수와 기호 패턴을 분석하고 기술하는 방법을 배우게 된다. MiC 교육과정에서 대수는 점진적인 형식화 과정을 통해 진행된다. 초등수준의 비형식적인(informal) 지식에서 시작한 학생들은 이러한 비형식적인 전략에서부터 전-형식적인(pre-formal) 전략으로 나아가기 위해 적절한 문제 상황을 다루게 된다. 학생들은 5, 6학년(초등)에서 7, 8학년(중등)으로 가면서, 그 관심을 전-형식적인 대수에서 형식적인(formal) 대수를 학습할 수 있게 된다. 이러한 비형식적인 것에서부터 전-형식적인 것으로, 그리고 형식적인 수준으로 옮겨가는 것은 어떤 선형성을 띠기보다는, 학생들 스스로 이들 사이에서 자신들의 필요에 따라 서로 이동할 수 있도록 하는데 더 큰 의미가 있다. 이것은 결코 모든 학생들이 모든 상황을 형식적인 수준에서 해결하는 것을 요구하는 것이 아니며, 초등수준에서부터 대수적 요소를 이끌어냄으로써 문제 상황에서 학생들의 사고와 추론을 다양한 형태로 적용하기 위한 교육과정이다.

## 2. 호주, Queensland의 새로운 대수 요목

호주의 P-7 대수 교수요목은 Queensland State Curriculum Council(QSCC)의 제안을 발달시킨 것으로 이것은 QSCC가 제시한 내용들을 그대로 수용하고 있다. QSCC 교수요목은 7단계에 걸쳐 디자인되었으며, 그리고 그 핵심으로 모든 학생들이 의무 교육기간 동안 성취할 수 있는 요소를 강조하고 있다. P-7 대수 교수요목은 수준 1부터 4까지 되어 있으며, 각 수준은 2년씩(수준1은 P, 1학년, 수준2는 2, 3학년에서, 수준3은 4, 5학년, 수준4는 6, 7학년에서) 구성되어 있다(Warren & Cooper, 2001, pp. 644-645). 이처럼 대수를 P-7학년 수학 교수요목에 도입하려는 움직임은 초기대수가 중등 이후 대수를 학습하는데 도움이 된다는 생각에서 비롯되었다. P-7 대수 교수요목은 대수 도입을 위해 미지수, 패턴, 그리고 관계에 초점을 맞추고 있으며, 이를 위해 구조와 연결, 전-대수적 사고, 풍부한 schema를 강조한다. 대수는 미지수를 이용해서 문제를 푸는 절차와, 산술적 패턴을 일반화하고, 그리고 양들 사이의 관계를 표현하는 것이다. 이들 세 가지는 이 글에서 제시한 P-7 대수 교수요목의 뼈대를 제공하는 것으로, 1학년에서부터 패턴에서 이해를 구성하고, 이러한 아이디어의 일반화가 대수로 연결될 수 있도록 미지수와 관계를 구성하는 것을 목적으로 한다.

P-7 대수 교수요목은 학생들이 대수에서 경험하는 어려움을 그들의 대수적 구조에 관한 지식이 제한되어 있다는 데서 찾고 있다. 따라서 P-7 대수 교수요목은 구조와의 연결을 개발하는데 초점을 맞춘다. 산술 법칙은 수 strand에서 다루어지고 있으며, 여기서 초점을 두는 것은 동치와 방정식의 개발에 있다. 대수 strand는 동치와 비동치 상황을 탐구하면서 시작되며 그리고 연산과 '균형'을 통해 동치 사이의 역관계를 확인하게 된다. 그리고 동치와 연산, 산술 법칙을 연결하려는 흐름은 연산과 그 역을 강조하고, 동치를 변화, 함수, 그래프와 연결하면서 진행된다. 여기서 전-대수적 사고는 미지수와 산술적 절차를 통해 강조되며, 이것은 산술적 사고(수와 산술적 절차)에서부터 대수적 사고(변수와 대수적 절차)로의 이행을 이어주는 역할을 한다. 이와 함께 수학적 아이디어와 문제를 모델링하기 위해 적절한 표현을 선택하는 문제가 주어지고, 대수적 아이디어에서 풍부한 schema를 형성하도록 한다. 따라서 P-7 대수 교수요목은 구조와 연결, 전-대수적 사고와 풍부한 schema를 기본 원칙으로 해서 다음과 같이 제시된다(Warren & Cooper,

2001, p.644).

· 산술과의 연결 및 방정식에서의 구조적인 이해를 개발하기 위해, 대수 교수요목은 다음 두 부분으로 구분된다.

(a) 패턴, 변화 그리고 일반화

(b) 미지수, 동치와 관계.

· 전-대수적 사고의 중요성을 확인하기 위해, 교수요목은 산술 개념을 개발하고 산술에서 전-대수로의 이행에 포함된 전략과 절차를 개발한다.

· 풍부한 schema의 개발을 위해, 대수 교수요목은 실제 문제 상황과 연결된 폭넓은 활동 과제를 제시하고, 패턴을 통한 일반화를 조기에 시작한다.

P-7 대수 교수요목은 수준1에서부터 풍부한 활동들의 집합을 뼈대로 해서 디자인되었다. 특히 수준1은 산술에서부터 전대수적 사고로의 이행을 4가지 측면으로 나누어 이후 수준에서 수학적 구조를 논의하기 위한 비형식적인 탐구를 강조하고 있다. 이것은 비형식적인 발달 단계에 있는 초등학생들을 위해 대수적인 아이디어를 접근 가능한 형태로 바꾸어 제시함으로써 초기대수의 가능성을 보이려는 시도로 볼 수 있다. 다시 말해 새로운 P-7 대수 교수요목은 초등 산술에서 배운 아이디어를 대수 학습과 연결시키기 위해 제안된 것으로, 이를 통해 초기대수를 실제 교육과정에 반영하면서 그 지도의 가능성을 구체화하고 있다.

### 3. 미국, NCISLA Early Algebra 프로젝트

NCISLA의 EARP(early algebra research project)는 Carpenter 와 Levi, 그리고 12명의 Madison Metropolitan School District 교사들과 함께 진행되고 있다(Carpenter & Levi, 2000). 15년간의 CGI(Cognitively Guided Instruction) 연구에 근거해서, 그들은 전문 교사 개발을 위한 프로그램을 개발하고 그리고 1, 2학년 학생들의 수학적 사고 특히 학생들이 산술에서 일반화를 이끌어내고, 표현하고, 그리고 정당화하는 것에 초점을 맞추고 있다. 그리고 지금까지의 연구 결과는 어린 학생들이 산술의 기본적인 구조와 성질들을 일반화하고 정당화하는 것을 학습할 수 있으며, 이러한 것들이 대수의 기초를 형성하는데 도움이 될 수 있음을 보여주고 있다.[10] 이것은 NCTM의 Standards(2000)에서 개략적으로 제시한 대수 학습의 목표와 일치하는 것으로, 이 NCISLA의 연구는 전통적인 교육과정보다 더 일찍 대수에 대한 기초를 형성하는 것이 가능하다는 것을 보여준다. 그리고 이 프로젝트는 어린 학생들에게 대수 학습의 기초를 마련하는 방식으로 산술을 지도할 수 있다는 것을 보여준다. 이와 함께 대수에 대한 보다 넓은 개념들이 초등 수학의 일부분이 될 수 있으며 그리고 암묵적으로 수학적 지식을 확립하고 문제 해결을 하는 동안 이해하고 추론하는 능력이 향상될 수 있음을 보여준다.

다음은 프로젝트를 진행하는 가운데 초등학교 1, 2학년 학생들을 대상으로 이루어진 수업의 예이다. 수업의 목적은 학생들에게 어떤 수에 0을 더하면 어떻게 되는가를 일반화하여 표현하는 것이었다. 학생들은 일반화를 이끌어낼 뿐 만 아니라 수학적으로 보다 높은 수준에서 이것에 대하여 논의할 수 있었다. 먼저 교사는

10) Bastable & Schifter와 함께 공동 연구한 교사들은 많은 수업을 통해 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 기본적인 수 연산에 관한 일반화가 자발적으로 이루어졌다는 사실을 설명하고 있다(Carpenter & Levi, 2000, 재인용). 학생들은 수의 패턴에서 나타나는 규칙성과 문제 해결 전략에서의 관련성을 스스로 구성함으로써 수의 성질에 대한 일반화를 만들어낼 수 있었다.

78-49=78이 참인지 거짓인지를 물어본다. 학생들은 즉각적으로 다음과 같이 반응한다(Carpenter & Levi, 2000, pp.5-6 중에서 인용).

학생들: 거짓! 절대 그럴 수 없어요!
교사: 왜 거짓이지?
Jenny: 왜냐하면 처음이랑 같은 수가 나오니까요, 근데 이미 어떤 수를 빼버렸거든요, 따라서 처음 수보다 작은 수가 나와야 하니까요.
Mike: 만약 78-0=78이라면 맞아요.
교사: 그건 참이니? 왜 참이니? 우리는 무언가를 빼주었잖아.
Steve: 그러나 그 무언가(something)는 없는 거(nothing)나 마찬가지죠. 0은 아무 것도 아니잖아요.
교사: 이것이 항상 그렇다고 할 수 있을까?
Lynn: 만약 처음 수와 같은 수를 결과로 얻고 싶다면, 항상 빼주는 자리엔 0을 놓아야만 해요. 그러니까 78-49=78에서 49대신 0을 쓴다면 이것은 78을 얻을 수 있어요. 왜냐하면 처음과 마지막 수에서 같은 답이 나오려면 그 둘 사이엔 0이 되거든요.
교사: 그러니까 너희들은 0에 대해서 항상 이러한 성질이 성립한다 이거지?
Mike: 그래요. 그리고 78에서 49를 빼고, 그리고 무언가를 더하면 되요.
ellen: 더하기 49.
Mike: 그래. 49. 78-49+49=78이 되죠.
교사: 와. 너희 모두 이것이 참이라고 생각하니.
(한 학생을 제외한 모두가 그렇다고 대답했다.)
Jenny: 그래요, 49를 가져왔으니까 다시 그것을 돌려놓으면 같은 것이 되요.

논의가 계속되면서, 이 수업은 점점 '어떤 수에 0을 더하면 그 수와 같다.'는 일반화에 도달했다. 그들은 또한 '어떤 수에 0을 빼면 그 수와 같다.', '어떤 수에 같은 수를 빼면 0이 된다.'는 일반화에도 도달했다.

학생들은 이러한 일반화를 0을 포함한 문제를 푸는 데만 아니라 보다 복잡한 아이디어인 78-49+49=78이라는 명제에까지 도달할 수 있었다. 이 연구는 1, 2학년 학생들도 수학적 개념을 논의할 수 있으며, 그리고 그들이 보통 다루지 않는 연산까지도 실제로 할 수 있음을 보여준다. 그들은 산술 연산에서 일반화를 표현하고 그것들에 대하여 추론할 수 있었다.

우리는 이러한 수업을 통해 초등학생들이 산술의 기본적인 구조와 성질을 추측하고 표현하며, 그리고 자신의 추측을 정당화하는 활동에 참여할 수 있음을 살펴보았다. 이처럼 NCISLA의 EARP는 전문적인 교사 교육과 함께 산술에서 학생들의 분명한 사고를 개발하고 그리고 이러한 사고에서 대수와의 관련성을 찾음으로써 '초기대수'의 지도 가능성을 주장한다.

위에서 제시한 '초기대수'의 연구 실태에 덧붙여, 최근 연구에서는 초등학교 수준과 중등학교 수준에서의 대수적 추론이 체계적으로 검토되고 있으며, 그 가운데 가장 주목할 만한 것은 Early Algebra Research Group을 중심으로 한 Kaput(in preparation)의 연구이다. 그는 초등수학의 맥락에서 학생들의 능력을 어떻게 대수적 추론으로 이끌 수 있는가 하는 문제를 여러 연구자와 함께 종합하였으며, 이러한 연구는 수학 교육자들에게 산술과 초기대수가 교육과정의 개선을 통해 지도 가능하며 그리고 대수 교육과정의 개선으로 이어질 수 있다는 공감대를 통해 초기대수를 교육과정에서 구체화시켜 나가고 있다.

## Ⅴ. 우리나라 초등수학과 '초기대수'와의 관련성

우리나라의 경우 7차 교육과정에서 수학은 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와

식, 규칙성과 함수 영역으로 구분되어 있으며, 여기서 대수에 해당하는 내용은 주로 문자와 식, 규칙성과 함수에서 다루어지고 있다. 그리고 초등 수학 교과서의 경우 이 두 영역은 1단계에서부터 6단계에 이르기까지 주로 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 다루어지고 있다.

우리는 초등학교 수학 교과서 가운데 4-가부터 6-나까지의 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 여러 형태의 문제를 해결하면서 대수적 사고가 어떻게 표현되는가를 살펴보고자 한다. 이 단원에서 제시된 많은 문제들은 만약 대수를 학습한 상태에서 다루어진다면 문자와 식으로 해결하려 할 것이다. 이러한 사실은 초등수학 교과서에 제시된 문제들이 실제로는 대수에서의 문제 맥락과 동일하게 제시되어 있음을 보여주는 것이다. 따라서 초등학생들이 '문제 푸는 방법 찾기'에 제시된 이러한 문제를 해결한다고 할 때, 교사는 단순히 산술에서의 문제 해결 전략만을 지도할 것이 아니라 대수 학습과의 연결을 염두에 두면서 교과서에 제시된 과정이나 학생들이 해결하는 여러 가지 전략에서 대수적인 요소를 이끌어내기 위해 노력해야 한다. 앞서 논의한 '초기대수'를 가정하고 분석한 내용들을 종합하면 우리나라 초등수학 교과서에는 다음과 같은 특징들이 있음을 알 수 있다.

1. 초등수학 교과서에 제시된 여러 가지 문제 해결 전략은 그 이름은 같지만 학년이 올라감에 따라 서로 다른 형태와 수준으로 제시되고 있다. 이것은 이 글에서 목표로 하는 것처럼 산술에서부터 추론을 통해 대수적 능력을 이끌어내고 이것을 대수와 연결시키려는 것과 같은 맥락으로 보인다. 곧, 산술에서부터 대수적인 요소를 단계적으로 이끌어내고 그리고 이러한 요소를 7-가 단계와 연결시키려는 시도를 살펴볼 수 있는데, 예를 들어 식 만들기 전략의 경우 5-나(129쪽), 6-가(124쪽), 6-나(125쪽), 6-나(129쪽)에서 동일한 명칭으로 제시되어 있지만, 각각은 학년이 올라감에 따라 그 수준이 상승하고 있음을 알 수 있다. 그리고 그 수준은 6-나에 가서는 대수와 직접적으로 연결될 수 있도록 되어 있다. 다시 말해, 5-나와 6-가의 경우는 식을 세우기는 하지만 그 과정은 주로 산술적인 계산에 의해 진행되는 반면, 6-나에 제시된 두 형태의 식 만들기는 산술적인 전략으로 소개되어 있지만 사실 그 과정은 임시값으로 '1'을 두는 것과 비례적 추론을 이용하고 있으며, 그리고 순차적인 연산 순서에 따라 미지수 □의 값을 구하는 등 분명한 대수적인 특징을 가지고 있다.[11] 문제는 이러한 초등수학의 문제해결에서 등장하는 대수적인 특징들이 어떻게 중학교 1학년 과정의 대수식과 방정식으로 연결되는가 하는 것인데, 이것은 초등수학에서 제시된 여러 문제에서 대수적인 요소를 보다 세밀하게 분석하고 그 맥락을 중학교 수학으로 연결하려는 시도 가운데 찾을 수 있으며, 이것은 '초기대수'에서 강조하는 중요한 주제 가운데 하나이다.

2. 초등학교 교과서에 제시된 다양한 문제 해결 전략에서 우리는 산술과 대수 사이에 존재하는 간격을 생각해 볼 수 있다. 이것은 산술에서 나타나는 비형식적인 추론과 대수에서의 형식적인 추론과 일반화 사이에서 비롯되는 것으로, 특히 예상과 확인 전략을 사용하는 문

11) 산술적 맥락에서 문장제를 해결할 때 그 연산순서는 일반적으로 거꾸로 풀기(backward operation)가 사용되는데 비해, 대수에서의 연산은 문자를 이용해서 식을 직접 나타내고 풀어나가기 때문에 순차적인 연산(forward operation)을 그 특징으로 한다.

제 상황은 이러한 산술과 대수간의 차이를 분명하게 보여준다. 그리고 동시에 이러한 차이는 '초기대수'의 지도가 왜 요구되는지를 보여주는 것이다.

초등학교 교과서에서 가장 많이 등장하는 문제해결 전략은 예상과 확인으로 4-나(110쪽, 117쪽), 5-가(130쪽, 136쪽), 5-1나(126쪽), 6-가(122쪽), 6-나(126쪽) 등에서 여러 문제 상황과 함께 제시되어 있다. 먼저 교과서에 제시된 각각의 질문을 살펴보면, 5-나까지 예상과 확인은 반성이나 조정 없이 계산에 의존하여 이루어지는데 비해, 6-가 이후에는 예상이 잘못될 경우 어떤 값을 늘리고 어떤 값을 줄여야 하는지에 대한 조정의 단계가 등장한다. 그러나 어떤 식으로 예상과 확인 전략이 전개되든지 이 과정은 비형식적으로 다루어진다. 한편 이러한 유형의 문제에서 핵심은 미지수가 두 개인 연립방정식을 해결하는 데 있으며, 연립방정식을 해결하는 과정은 산술적인 계산과 달리 문자와 식으로 표현하고 조작하는 대수적 능력을 요구한다. 따라서 연립방정식을 통한 문제 해결 전략과 예상과 확인을 통한 산술적인 전략 사이에는 간격이 존재할 수밖에 없으며, 이것은 대수 학습에서의 어려움으로 이어진다. 실제로 중학교 2학년 학생들의 경우 연립방정식을 학습하면서, 그들은 그것들이 이미 초등학교에서 다루었던 내용이라는 것을 전혀 의식하지 못한 상태에서 연립방정식을 해결하려 한다. 결국 학생들은 이전에 다루었던 여러 전략과 사고 과정을 생략한 상태에서 형식적으로 문자를 조작함으로써 방정식 문제를 해결하는 데만 집중하게 된다. 이러한 산술과 대수간의 간격을 줄이기 위한 노력으로 예상과 확인 전략으로 문제를 해결한 다음, 문제를 일련의 (양적인) 추론으로 해결하고, 이러한 추론에 근거해서 연립방정식을 제시한다면 산술과 대수를 보다 분명하게 하면서 그 연결을 시도할 수 있을 것이다.[12] 여기서 '초기대수'는 이러한 양적인 추론을 강조함으로써 산술과 대수 간에 존재하는 간격을 연결하는 것을 그 목적으로 한다.

3. 초등학교 산술은 수의 산술에 집중되어 있으며, 이것은 주로 과정을 강조하면서 진행된다. 이것은 문자를 대상으로 다루어야 하는 대수 학습과는 많은 차이를 보인다. 따라서 산술 학습에서 새로운 대안으로 양의 산술이 제시될 수 있으며, 이를 통해 대상을 인식하고 그 대상에서부터 조작을 시작함으로써, 산술과 대수간의 연결을 구성하고 형식적인 대수 학습에 의미를 부여할 수 있을 것이다. 4-가부터 6-나까지 제시된 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 제시된 그림 그리기 전략은 이러한 양의 산술을 효과적으로 지도하는데 도움을 준다. 그림 그리기 전략은 4-나(109쪽), 5-가(126쪽), 5-나(124쪽), 6-가(125쪽), 6-나(124쪽)에 여러 문제 상황으로 제시되어 있다. 5-가 126쪽에 제시된 물고기 문제에서는 그림 그리기를 통해 주어진 조건 사이의 비를 이해하는데 도움을 구할 수 있으며, 그리고 그림에서 제시된 양을 통해 비에서 제시된 수를 대상과 관련지어 생각할 수

12) Amerom(2002)은 연립방정식 맥락에서 제시된 문제를 해결하는 전략으로, 산술, 전-대수, 대수 전략으로 구분해서 제시한다. 먼저 산술 전략으로 시행착오전략, 시행조정전략을 들고 있으며, 다음 단계인 전-대수 단계에서는 추론시행전략, 규칙발견전략을 대표적인 문제 해결 전략으로 보고 있으며, 대수 학습에서는 일반적인 알고리즘 전략과 미지수 소거 전략을 통한 문제 해결 전략을 소개하고 있다. 여기서 우리는 전-대수 단계에서 양적인 추론을 강조할 수 있을 것이다. 이와 비교해서 우리의 경우는 이러한 여섯 단계에서 중간에 놓여 있는 단계들이 제시되지 않은 상태에서 산술과 대수라는 전혀 다른 맥락에서 문제를 제시하고 있다.

있을 것이다. 5-나 124쪽의 문제 역시 넓이를 수식으로 계산하고 있는데 그림 그리기 전략은 이것을 그림으로 나타냄으로써 넓이를 양으로 다루면서 이를 통해 수를 하나의 대상으로 파악하고 이해하는데 도움이 된다. 이처럼 구체적인 그림을 통한 문제 해결 전략은 그 자체로 사용되기도 하며 경우에 따라서는 다른 전략을 효과적으로 설명하는데 도움을 주기도 하는데, 이것은 수의 산술과 양의 산술을 동시에 이해하도록 한다. 그리고 이러한 맥락에서 '초기대수'의 지도는 양의 산술을 통해 과정과 대상을 함께 생각함으로써, 대수와의 연결을 위해 효과적으로 사용될 수 있을 것이다.

4. 하나의 문제에서 서로 다른 해결 전략을 제시하는 것은 산술과 대수를 비교해서 생각하는데 효과적이다. 초등수학은 5-가 단계까지 단순화하기, 예상과 확인, 그림 그리기, 표 만들기, 식 세우기, 규칙 찾기 등 여러 가지 문제 해결 전략을 제시한 다음, 5-나 단계부터는 하나의 문제에서 둘 이상의 전략을 사용함으로써 어떤 것이 보다 효과적인 전략인지를 학생들 스스로 결정하도록 하고 있다. 5-나의 124쪽 문제는 식 세우기와 그림 그리기를 서로 비교하고 있으며, 126쪽은 예상과 확인 전략과 표를 만드는 전략을 비교하고 있다. 6-가의 경우 126쪽에서 예상과 확인 전략과 거꾸로 풀기를 사용하고 있으며, 128쪽 문제에서는 그림 그리기와 단순화하기 전략을 비교하고 있다. 그리고 6-나 124쪽의 문제는 그림 그리기와 식 만들기를 통해 해결하고 있으며, 128쪽 문제는 거꾸로 생각하기와 식 세우기를 비교함으로써 하나의 문제를 둘 이상의 방법으로 해결하고 있다. 이처럼 하나의 문제를 다양한 방법으로 해결하면서 보다 효과적인 방법을 찾는 것은 산술과 대수를 연결하는데 도움을 준다. 곧, 산술에서의 방법과 대수에서의 방법을 비교함으로써 대수의 장점을 확인하고, 대수 학습에 동기를 부여할 수 있게 된다. 또한 문제 풀이 전략에 있어서도 하나의 전략이 산술적인 맥락이라면 다른 전략은 이와 차별화해서 제시함으로써 대수적 능력을 산술 단계에서부터 이끌어낼 수 있을 것이다. 예를 들어 거꾸로 생각하기와 식 세우기는 산술과 대수에서의 연산 순서를 비교하는데 효과적이며, 예상과 확인과 그림 그리기 전략은 수의 산술과 양의 산술을 비교함으로써 주어진 조건을 대상으로 파악하는데 효과적이다. 또한 이러한 전략을 보다 다양한 문제 상황에서 해결하고 적용하기 위해서 일반화를 필요로 하게 된다. 따라서 이러한 다양한 표현을 비교하고 그리고 일반화의 필요성을 이끌어내면서 우리는 '초기대수'와 같은 맥락을 발견할 수 있으며, 그리고 산술과 대수가 초등수준에서부터 사고 측면에서 함께 지도될 수 있는 가능성을 엿볼 수 있을 것이다.

## Ⅵ. 요약 및 결론

중등과정에서 대수를 도입하려는 주장은 학습을 가능하게 하기 위해서는 그에 따르는 조건이 있어야 된다는 점을 강조한 것이다. 그러나 이 글은 이러한 조건의 문제에 있어서 대수를 보는 관점과 그 지도방법에 따라 그 시기가 결정되어야 한다는 점을 강조한다. 이것은 대수를 기호 측면이 아닌 다른 차원에서 분석한 것으로, 대수는 기호화 못지않게 추론 측면이 중요한 본질이 되어야 한다는데 주목한 것이다. 이 글에서 우리는 대수 학습에서 산술과 대수간의 엄밀한 구분에 의해 그 어려움이 더욱 가중되었음을 살펴보았다. 실제로 이러한 구분으로 인해, 1980년대 산술에서 대수로의

이행을 완화시키는 여러 프로그램은 그 효과를 거두지 못했으며, 따라서 1990년대 이후 가능하다면 처음 출발부터 이들을 통합하려는 시도가 이루어지기 시작했는데, 이것은 2장에서 다루었던 '초기대수'(early algebra)의 등장으로 이어졌다. 초기대수에서의 핵심은 대수적 사고(추론)를 통해 초등수학에서부터 대수 지도의 가능성을 마련하는 것으로 곧, 초기대수의 목적은 산술 영역에서 제시된 보편적인 문제들에서부터 어떻게 대수적인 요소들을 이끌어내고 이를 통해 산술에서부터 대수 교육을 준비시킬 수 있는가 하는데 있다. 그러나 이것은 새로운 주제로 교육과정을 교체하려는 것이 아니며 중등대수에서 다루는 내용을 초등과정에 그대로 도입하려는 것도 아니다. 이것은 산술을 가르치고 학습하는 방법을 새로운 시각에서 제시하는 것이며, 새로운 시각과 태도를 통해 예전의 산술에서 다루었던 주제를 재해석하려는 시도에서 비롯된 것이다.[13)]

3장에서는 초기대수의 지도 배경에 대해 살펴보았다. 대수의 역사적 기원에서, 그리고 학생들의 인식을 개선하기 위해서, 그들의 심리적인 성숙에 있어서 초기대수의 지도가 실제로 초등수학에서 가능함을 살펴보았다. 대수를 기호화가 아닌 추론이라는 측면에서 강조함으로써, 역사에서 등장한 대수적 사고에서, 그리고 학생들의 인식을 개선하려는 시도에서 초기대수가 요구되어야 하며 또한 그 지도가 가능하다는 것을 살펴보았다.

이러한 초기대수의 등장과 배경은 1990년대 이후 많은 연구를 통해 대수 교육과정의 개선으로 이어지고 있으며, 4장에서 우리는 이러한 연구 가운데 네덜란드와 호주, 미국을 중심으로 진행되었던 혹은 진행 중인 몇몇 프로젝트와 연구를 살펴보았다.

5장은 우리나라 초등수학 교과서를 분석하면서 이러한 초기대수와의 관련성을 논의하고 있다. 실제로 우리의 초등수학에서는 다양한 패턴을 다루고 그리고 양의 산술을 제시함으로써 초기대수의 지도 가능성을 포함하고 있다. 또한 1단계부터 6단계까지 '문제 푸는 방법 찾기' 단원을 통해 제시된 다양한 문제는 실제로는 대수적 맥락에서 제시되는 문제와 차이가 없으며, 따라서 여기서 제시된 문제 해결 전략은 대수적 추론과 연결해서 생각해볼 수 있을 것이다.

이 글은 초등수학의 재음미를 통해, 중등대수에서 발생하는 문제를 해결하기 위해 초등수학에서부터 그 원인을 분석해야 한다는 주장을 하고 있다. 그리고 이와 같은 관점에서 대수 교육과정의 개선을 요구하기 위해 대수 교육에서 현재 진행 중인 논의로 '초기대수'(early algebra)를 소개하고 있으며, 각국에서 진행 중인 연구 실태를 살펴보고 있다. 우리의 경우 초등수학 교과서는 실제로 이러한 초기대수의 지도 가능성을 비교적 많이 포함하고 있지만, 그러나 아직은 초등수학은 산술이라는 인식이 강하며 따라서 산술에서부터 대수적 사고와의 연결을 찾는 것은 쉽지 않아 보인다. 따라서 차후 연구에서는 이러한 초기대수의 다양한 측면들을 초등수학에서 보다 구체화시키고, 이를 통해 산술과 대수와의 연결을 원활하게 하면서 동시에 대수 학습에서의 어려움을 개선하는데 그 초점이 맞추어져야 할 것이다.

---

13) 한 예로 Kaput & Blanton(1999)이 제시한 '대수화된 산술 교육과정'(algebrafied arithmetic curriculum)은 초기대수를 강조한 교육과정으로 볼 수 있다.

## 참고문헌


교육인적자원부(2001). **초등학교 교사용 지도서 수학 4-가**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2001). **초등학교 교사용 지도서 수학 4-나**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-가**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-나**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 6-가**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 6-나**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

우정호(1999). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra*. Freudenthal Institute.

Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school children. In V. Davydov (Ed.). *Soviet studies in mathematics education, vol. 6; Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (pp.275-338). Reston, VA, NCTM.

Carpenter, T. & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Report No. 00-2). Research report of NCISLA(National center for improving student learning and achievement in mathematics and science).

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Plenary address of XXII Meeting of the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Tucson, AZ, October, 2000.

Davis, R. B. (1985). ICME-5 report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior, 4,* 195-208.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics, 9*(2), 19-25.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience Part I: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 344-351). The University of Melbourne, Australia.

National council fo teachers of mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM, Reston, VA.

National council fo teachers of mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, Reston, VA.

Radford, L. (2001). The Historical Origin of Algebraic Thinking. In R. Sutherland, et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp.13-36). Kluwer Academic Publishers.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B. & Jones. W. (1998). Solving algebra problems before algebra instruction. Paper presented

at Second Early Algebra Meeting. University of Massachusetts at Dartmouth/ Tufts University.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the fitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A Spreadsheet approach to solving algebra Problems. *Journal of mathematical behavior*, *12*, 353-383.

van Reeuwijk, M. Early School Algebra: A Dutch Perspective. In J. Kaput (Ed.), *Employing children's natural powers to build algebraic reasoning in the content of elementary mathematics*. (in preparation).

Warren, E., & Cooper. T. (2001). Develop theory and practice: Developing an algebra syllabus for years P-7. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conf-erence: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 641-648). The University of Melbourne, Australia.

# A study on elementary school algebra -focusing on 'early algebra'-

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)

In this paper, we deal with the teaching of algebra in the elementary school mathematics, and call this algebra teaching method as 'early algebra'. Early algebra is appeared in the 1980's with the discussion of 'algebraic thinking'. And many studies about early algebra is in progress since 1990's. These studies aims at reducing difficulties in the teaching of algebra and the development of algebra curriculum. We investigate the background of early algebra, and justify teaching of early algebra. Also we examine the projects and studies in progress around the world. Finally through these discussions, we compare our elementary textbooks with early algebra, and verify the characters of early algebra from our arithmetic curriculum.

핵심어: elementary school mathematics(초등수학), early algebra(초기대수), algebraic thinking(대수적 사고)