

## 불확실성의 Fredholm 적분 수식화를 통한 적응가변구조제어기 설계

### Design of an Adaptive Variable Structure Control using Fredholm Integral Formulae for the Uncertainties

유 동 상\*  
(Dong Sang Yoo)

**Abstract** : In deterministic design of feedback controllers for uncertain dynamic systems, the upper bound of the uncertainty is very important to guarantee the stability of the closed loop system. In this paper, we assume that the upper bound of the uncertainty is formulated using a Fredholm integral equation of the first kind, that is, an integral of the product of a predefined kernel with an unknown influence function. We propose an adaptation law that is capable of estimating this upper bound. Using this adaptive upper bound, we design an adaptive variable structure control (AVSC), which guarantees asymptotic stability/ultimate boundedness of uncertain dynamic systems. The illustrative example shows the proposed AVSC is effective for uncertain dynamic systems.

**Keywords** : variable structure control, parameter adaptation, uncertain dynamic system, Fredholm integral.

#### I. 서론

최근, 불확실 동적 시스템을 제어하기 위해 강건한 제어 알고리즘들이 많은 연구자에 의해 개발되어 오고 있다[1-6]. 그러나 제어기 설계에 있어 불확실성의 크기가 알려져 있다는 가정을 내포하고 있는 경우가 대부분이다. 하지만 불확실성의 경계치는 불확실성 구조의 복잡성 등의 다양한 원인으로 인해 알아내기가 쉽지 않다. 따라서, 불확실성의 경계치를 쉽게 알 수 있는 방법이 요구되고 있으며, 매개변수 적응기법은 이런 문제를 해결하는데 좋은 해법을 제공한다.

최근의 연구에서 불확실성의 경계치를 추정하는 적응기법을 가진 제어 방법이 많은 연구자에 의해 제안되었다. Chen[7]과 Yoo와 Chung[8]은 불확실성의 경계치가 상태벡터의 Norm에 의해 원추 형태로 제한되었다고 가정하였으며, Choi와 Kim[9], Brogliato와 Trofino Neto[10], 그리고 Wu[11] 역시 불확실성의 경계치가 미지의 매개 변수들에 의한 선형 함수로 구성되었다고 가정하였고, 이 미지의 매개 변수들을 추정할 수 있는 적응기법을 제안하였다. 한편, 이들 연구에서는 불확실성에 대한 구조가 부분적으로 알려져 있다는 암시적 가정을 포함하고 있는데, 사실 많은 경우에 불확실성의 구조에 대한 정보를 획득하는 것은 쉽지 않다. 따라서, 불확실성에 대한 가정을 보다 완화시킬 필요가 있다. 적분식 표현법[12]은 불확실성의 구조를 모르는 상태에서 불확실성의 경계치를 수학적으로 표현하는 방법을 제공한다. Messner, et al. [13]은 이런 적분식 표현 가정을 통해 비선형 함수를 표현하고 추정과 제어에 적용할 수 있는 새로운 적응 학습 기법을 제안하였다.

본 논문은 불확실성의 경계치에 대한 가정을 보다 완화했을 경우의 강건한 상태 궤환 제어기를 설계하는데 목적이 있다. 따라서, 불확실성의 경계치를 제 1 종의 Fredholm 적분식[12], 즉 미리 정의된 커널과 미지의 유도 함수의 곱을 적분

하는 형태로 수식화 한다. 그리고 미지의 유도함수를 추정하는 적응기법을 제시함으로써 최종적으로 적응 경계치를 예측하는 방법을 제안한다. 또한, 이렇게 얻은 적응 경계치를 이용하여 Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 불확실 동적 시스템의 점근적 안정도 및 ultimate boundedness를 보장하는 적응가변구조제어기를 설계한다.

#### II. 적응가변구조제어기 설계

다음과 같이 기술되는 불확실 동적 시스템이 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + e(t, x)) \quad (1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$  는 상태 벡터,  $u(t) \in R^m$  는 입력 벡터,  $e(t, x) \in R^m$  는 정합조건 (Matching Condition)을 만족하는 불확실성이며,  $A$ 와  $B$ 는 각각 적절한 차수의 행렬을 나타낸다. 또한  $B$ 의 계수 (Rank)는  $m$ 이다.

위와 같이 표현된 불확실 동적 시스템을 위해 다음과 같은 조건들이 성립된다고 가정한다.

**가정 1:**  $(A, B)$  쌍은 완전 제어 가능하다.

**가정 2:** 정합조건을 만족하는 불확실성 함수

$e(\cdot, \cdot) : R \times R^n \rightarrow R^m$  는 모든 독립변수에 대해 연속이다.

**가정 3:** 모든  $(t, x) \in R \times R^n$  에 대해 다음과 같은 조건을 만족하는 연속이며 양의 값을 갖는 스칼라 함수  $\rho(\cdot) : R \rightarrow R_+$  가 존재한다.

$$\|e(t, x)\| \leq \rho(t) \quad (2)$$

먼저 슬라이딩 평면을 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega \equiv \{x : \sigma(x) = Sx(t) = 0\} \quad (3)$$

여기서  $S \in R^{m \times n}$  의 계수는  $m$ 이며,  $SB$ 는 정칙 행렬이다.

Yoo와 Chung[8]이 제안했던 다음과 같은 형태의 상태 궤환 제어기를 생각한다.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2002. 12. 9., 채택확정 : 2003. 5. 27.

유동상 : 한경대학교 전기공학부(dsyo@hankyong.ac.kr)

$$u(t) = u_{eq}(t) - (SB)^{-1}G\sigma(x) + u_N(t) \quad (4)$$

여기서,  $G \in R^{m \times m}$  를 정의 행렬 (Positive Definite Matrix)이며,  $u_N(t)$  는 비선형 제어 입력으로 뒤에서 다시 정의한다.  $u_{eq}(t)$  는 불확실성  $e(t, x)$  가 0이라고 가정했을 때 시스템 (1) 의 공칭 시스템에 대한 등가 제어 입력으로 다음과 같다.

$$u_{eq}(t) = -(SB)^{-1}SAx(t). \quad (5)$$

이 등가 제어 입력은 슬라이딩 평면으로 제한된 공칭 시스템 궤적의 응답 특성을 결정하게 된다. 한편,  $\sigma(x)$  를 시간에 대해 미분한 후 제어입력 (4)를 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{\sigma}(x) = -G\sigma(x) + SB(u_N(t) + e(t, x)). \quad (6)$$

위 식으로부터 적절한 제한 이득  $G$  값을 선택하면  $\sigma(x)$  의 응답 특성을 변경할 수 있다. 따라서, 제어 목적은 어떠한 초기 조건 하에서도 (6)로 기술되는 시스템이 점근적으로 안정화되는 제어 입력  $u_N(t)$  를 설계하는 것으로 귀결된다.

제한 제어기를 설계하는데 있어, 가정 3을 만족하는 불확실성의 경계치  $\rho(t)$  를 찾는 것은 불확실 동적 시스템의 점근적 안정도 등을 보장하기 위한 중요한 요인이 된다. 그러나, 불확실성의 구조적 복잡성, 특히 외란 등으로 인해 경계치를 쉽게 얻을 수 없다. 따라서, 불확실성이 한정되어 있다는 것 이외에는 어떤 정보도 없는 상황에서 불확실성의 경계치를 얻기 위한 추가적인 가정을 다음과 같이 제시한다.

**가정 4 :** 불확실성 경계치 함수  $\rho(\cdot)$  는 제 1 종의 Fredholm 적분식으로 표현할 수 있다. 즉,  $\rho(\cdot)$  는 유한 구간  $[a, b] \subset R$  에 대해 다음과 같이 미리 정의된 커널  $K(\cdot, \cdot) : R \times R \rightarrow R'$  와 미지의 유도 함수  $c(\cdot) : R \rightarrow R'$  의 곱에 대한 적분 형태로 표현할 수 있다.

$$\rho(t) = \int_a^b K^T(t, \tau)c(\tau)d\tau \quad (7)$$

일반적으로 알고 있는  $\rho(t)$  에 대한 위의 적분 방정식 해결의 목적은 해석적 또는 수치해석적으로 미지의  $c(\tau)$  를 찾는 것이 된다. 만약 미리 정의된 커널  $K(t, \tau)$  에 대해 적절한 방법에 의해 미지의  $c(\tau)$  를 추정할 수 있다면 역으로  $\rho(t)$  의 추정치를 얻을 수 있다. 따라서, 불확실성의 적분 수식회로부터 경계치를 추정할 수 있는 다음과 같은 적응 기법을 제안한다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}(t, \tau) = \|B^T S^T \sigma(x)\| \Phi K(t, \tau) \quad (8)$$

여기서  $\tilde{c}(t, \tau)$  를  $c(\tau)$  의 추정치이고  $\Phi \in R^{n \times l}$  는 정의 행렬이다. 따라서, 유도 함수의 추정치를 통한 불확실성의 적응 경계치  $\rho(\cdot)$  는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\rho}(t) = \int_a^b K^T(t, \tau) \tilde{c}(t, \tau) d\tau \quad (9)$$

유도 함수값 오차를  $\tilde{c}(t, \tau) = \bar{c}(t, \tau) - c(\tau)$  라 정의하고, (8)와

(9)을 이용하면 유도 함수값 오차 및 불확실성의 경계치 오차  $\tilde{\rho}(t)$  는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}(t, \tau) = \|B^T S^T \sigma(x)\| \Phi K(t, \tau) \quad (10)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \int_a^b K^T(t, \tau) \dot{\tilde{c}}(t, \tau) d\tau = \dot{\bar{\rho}}(t) - \dot{\rho}(t). \quad (11)$$

위의 적응 경계치를 이용하여 다음과 같은 비선형 제어 입력을 생각한다.

$$u_N(t) = \begin{cases} -\frac{B^T S^T \sigma(x)}{\|B^T S^T \sigma(x)\|} \bar{\rho}(t) & \text{if } \sigma(x) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \sigma(x) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

이 비선형 제어 입력은 불확실성의 영향을 억제하면서 시스템 궤적이 슬라이딩 평면에 도달하게 하고 일단 슬라이딩 평면을 만나면 슬라이딩 모드를 일으키도록 하는 역할을 한다.

먼저 제안된 제어 시스템의 안정도를 증명하기 위해 다음과 같은 Barbalat 정리를 증명 없이 도입한다.

**정리 1 :** (Barbalat 정리)

만약  $W(\cdot)$  가 실수 변수  $t$  에 대해 실수 함수로 정의되고  $t \geq 0$  에서 균일 연속적이며, 적분의 극한  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t W(\tau) d\tau$  이 존재하고 유한하다면,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$  이다.

위에서 제안된 불확실성의 경계치 추정을 위한 적응기법과 제어 시스템의 안정도에 대해 다음과 같이 정리할 수 있다.

**정리 2 :** 주어진 시스템 (1)에 대해 만약 가정 1 ~ 4이 유효하고 커널 함수  $K(\cdot, \cdot)$  가 다음과 같은 조건을 만족하면

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \int_a^b K^T(t, \tau) K(t, \tau) d\tau = \kappa < \infty \quad (13)$$

제안된 제어 입력 (4)와 적응 기법 (8)과 (9)에 의해  $\sigma(x) = 0$  는 점근적으로 안정하다.

**증명 :** 정리 2을 증명하기 위해 먼저 다음과 같은 Lyapunov 함수 후보를 선택한다.

$$2V(t, \sigma, \tilde{c}) = \sigma^T \sigma + \int_a^b \tilde{c}^T \Phi^{-1} \tilde{c} d\tau \quad (14)$$

위 식을 시간에 대해 미분하면 다음과 같고

$$\dot{V}(t, \sigma, \tilde{c}) = \sigma^T \dot{\sigma} + \int_a^b \tilde{c}^T \Phi^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{c} d\tau \quad (15)$$

위 식에 (2), (6), (10)과 (11)를 대입하면  $\dot{V}(t, \sigma, \tilde{c})$  는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \sigma, \tilde{c}) &= \sigma^T (-G\sigma + SB(u_N + e)) + \|B^T S^T \sigma\| \int_a^b \tilde{c}^T \Phi^{-1} \Phi K d\tau \\ &= -\sigma^T G\sigma - \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} + \sigma^T SB e + \|B^T S^T \sigma\| \int_a^b \tilde{c}^T K d\tau \\ &\leq -\sigma^T G\sigma - \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} + \|B^T S^T \sigma\| \rho + \|B^T S^T \sigma\| \int_a^b K^T \tilde{c} d\tau \\ &= -\sigma^T G\sigma - \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} + \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} \\ &= -\sigma^T G\sigma < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

위의 결과로부터  $\sigma(x)$  는 유한하고 안정하며,  $\int_a^b \tilde{c}^T(t, \tau) \tilde{c}(t, \tau) d\tau$  또한 유한함을 알 수 있다. 한편, (11)에 대해 절댓값을 취한 후 Schwarz 부등식 정리 및 (13)을 이용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$|\tilde{\rho}(t)| = \left| \int_a^b K^T \tilde{c} d\tau \right| \leq \left[ \int_a^b K^T K d\tau \right]^{1/2} \cdot \left[ \int_a^b \tilde{c}^T \tilde{c} d\tau \right]^{1/2} < \infty. \tag{17}$$

$\sigma(x)$  및  $\tilde{\rho}(t)$  가 모두 유한이므로 수식 (6)로부터  $\dot{\sigma}(x)$  도 유한함을 알 수 있다. 다음은 Barbalat 정리를 이용하며 점진적 안정도를 증명한다. 먼저  $W(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$W(t) = \sigma^T G \sigma \tag{18}$$

그러면

$$W(t) \leq -\dot{V}(t, \sigma, \tilde{c}) \tag{19}$$

와 같은 부등식이 성립하며 양변에 시간 0에서  $t$ 까지 적분을 하면

$$\int_0^t W(\tau) d\tau \leq V(0, \sigma(x(0)), \tilde{c}(0, \tau)) - V(t, \sigma(x(t)), \tilde{c}(t, \tau)) \tag{20}$$

의 관계식을 얻는다. 여기서  $V(0, \sigma(x(0)), \tilde{c}(0, \tau))$  는 유한하고,  $V(t, \sigma(x(t)), \tilde{c}(t, \tau))$  역시 Lyapunov 안정성에 의해 증가하지 않고 유한하므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t W(\tau) d\tau < \infty \tag{21}$$

가 된다. 또한  $\dot{W}(t) = 2\sigma^T G \dot{\sigma}$  가 유한하므로  $W(t)$ 는 균일 연속적이다. 따라서 Barbalat 정리에 의해  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$  이 된다. 결과적으로  $G$ 가 정의 행렬이므로 시간이 진행함에 따라  $\sigma(x)$  는 0으로 수렴하게 된다. 따라서  $\sigma(x) = 0$  점근적 안정하다. ■

슬라이딩 모드가 일어날 때 이상적인 경우이라면 제어입력은 무한대의 주파수로 스위칭되어야 한다. 그러나, 잘 알려져 있는 바와 같이 실제에 있어서는 스위칭 주파수의 제한으로 인해 슬라이딩 평면상에서 바람직하지 않은 채터링 현상이 일어난다. 이런 채터링 현상을 제거하기 위해 제어입력이 연속적인 값을 갖도록 Wu[11]가 제시한 것과 같이 비선형 제어입력과 적응기법을 각각 다음과 같이 수정하였다.

$$u_N(t) = -\frac{B^T S^T \sigma(x)}{\|B^T S^T \sigma(x)\| \tilde{\rho}(t) + \varepsilon} \tilde{\rho}^2(t) \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}(t, \tau) = -\Phi \Gamma \tilde{c}(t, \tau) + \|B^T S^T \sigma(x)\| \Phi K(t, \tau) \tag{23}$$

여기서  $\Phi \in R^{l \times l}$  와  $\Gamma \in R^{l \times l}$  는 정의 대각행렬이며,  $\varepsilon$  는 양의 값을 갖는다.

**정리 3** : 주어진 시스템 (1)에 대해 만약 가정 1 ~ 4이 유효하고 커널 함수  $K(\cdot, \cdot)$  가 다음과 같은 조건을 만족하면

$$\sup_{t \in [0, \infty]} \int_a^b K^T(t, \tau) K(t, \tau) d\tau = \kappa < \infty \tag{24}$$

비선형 제어 (22)을 가진 제어 입력 (4)와 적응 기법 (23)과 (9)에 의해  $\sigma(x)$  와  $\tilde{\rho}(t)$  는 uniformly ultimately bounded 된다.

**증명** : 정리 3을 증명하기 위해 먼저 다음과 같은 Lyapunov 함수 후보를 선택한다.

$$2V(t, \sigma, \tilde{c}) = \sigma^T \sigma + \int_a^b \tilde{c}^T \Phi^{-1} \tilde{c} d\tau \tag{25}$$

Rayleigh 원리로부터,

$$\lambda_{\min}(\Phi^{-1}) \int_a^b \tilde{c}^T \tilde{c} d\tau \leq \int_a^b \tilde{c}^T \Phi^{-1} \tilde{c} d\tau \leq \lambda_{\max}(\Phi^{-1}) \int_a^b \tilde{c}^T \tilde{c} d\tau \tag{26}$$

여기서  $\lambda_{\min(\max)}(\cdot)$  는 주어진 행렬에 대한 최소(최대) 고유값이다.

정리 2 및 Wu [11]의 결과에 따라  $\dot{V}(t, \sigma, \tilde{c})$  를 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, \sigma, \tilde{c})}{dt} &\leq -\lambda_{\min}(K) \|\sigma(x)\|^2 - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\Gamma) \int_a^b \tilde{c}^T \tilde{c} d\tau + \varepsilon_1 \\ &\leq -\tilde{\mu} (\frac{1}{2} \|\sigma(x)\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Phi^{-1}) \int_a^b \tilde{c}^T \tilde{c} d\tau) + \varepsilon_1 \tag{27} \\ &\leq -\tilde{\mu} V(t, \sigma, \tilde{c}) + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

과 같은 결과를 얻는다. 여기서

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \min\{2\lambda_{\min}(K), \lambda_{\max}^{-1}(\Phi^{-1})\lambda_{\min}(\Gamma)\} \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{2} \int_a^b c^T(\tau) \Gamma c(\tau) d\tau + \varepsilon \end{aligned}$$

(27)로부터  $V(t, \sigma, \tilde{c})$  는 다음과 같은 컴팩트 세트에 도달할 때까지 단조 감소한다.

$$\Omega_f = \{(t, \sigma, \tilde{c}) : V(t, \sigma, \tilde{c}) \leq V_f\} \tag{28}$$

여기서

$$V_f = \tilde{\mu}^{-1} \varepsilon_1$$

따라서,  $\sigma(x)$  와  $\int_a^b \tilde{c}^T(t, \tau) \tilde{c}(t, \tau) d\tau$  는 uniformly ultimately bounded 되며, (17)로부터  $\tilde{\rho}(t)$  역시 uniformly ultimately bounded 된다. ■

Yoo와 Chung[8]은 불확실성의 경계치 함수  $\rho(t)$  를 미지의 상수 파라미터  $c_1$  와  $c_2$  에 의해 다음과 같이 제한되었다고 가정하였다.

$$\rho(t) = c_1 + c_2 \|x(t)\| \tag{29}$$

또한 이런 가정을 토대로 미지의 상수 파라미터  $c_1$  와  $c_2$  를 추정하는 적응기법을 다음과 같이 제안하였다.

$$\begin{aligned} \bar{c}_1(t) &= \bar{c}_{10} + \phi_{11} \int_{t_0}^t \|B^T S^T \sigma\| dt \\ \bar{c}_2(t) &= \bar{c}_{20} + \phi_{22} \int_{t_0}^t \|B^T S^T \sigma\| \|x\| dt \\ \bar{\rho}(t) &= \bar{c}_1(t) + \bar{c}_2(t) \|x(t)\| \end{aligned} \quad (30)$$

여기서  $\bar{c}_1(t)$ 와  $\bar{c}_2(t)$ 는 각각 미지의 상수  $c_1$ 와  $c_2$ 의 추정치이며,  $\bar{c}_{10}$ 와  $\bar{c}_{20}$ 는 초기값,  $\phi_{11}$ 과  $\phi_{22}$ 는 양의 상수로 적응 이득을 나타낸다. 본 논문에서 제안된 제어시스템에서 적절한 커널  $K(t, \tau)$ 를 선택함으로써 Yoo와 Chung[8]의 결과를 포함한다. 이것을 보일 수 있다. 예를 들어 커널  $K(t, \tau)$ 를 독립 변수  $\tau$ 와 무관한 상태 벡터의 Norm으로 선택한다. 즉, 다음과 같이 정의한다.

$$K(t, \tau) = K(t) = [1 \|x(t)\|]^T \quad (31)$$

따라서,  $\bar{c}(t, \tau)$ 도  $\tau$ 에 무관하게 되므로  $\bar{c}(t, \tau) = \bar{c}(t)$ 로 다시 정의할 수 있으며,  $\bar{c}_0 = [\bar{c}_{10} \ \bar{c}_{20}]^T$ 를  $\bar{c}(t)$ 의 임의의 초기치 벡터라 하면  $\bar{c}(t)$ 는 다음과 같이 추정된다.

$$\bar{c}(t) = \bar{c}_0 + \int_0^t \|B^T S^T \sigma\| \Phi [1 \|x\|]^T dt \quad (32)$$

$\Phi = \text{diag}[\phi_{ii}]$ 로 선택하고 적분구간  $[a \ b]$ 를  $[0 \ 1]$ 로 잡은 후, (31)과 (32)을 (9)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t) &= \int_0^t [1 \|x\|] \{\bar{c}_0 + \int_0^t \|B^T S^T \sigma\| \Phi [1 \|x\|]^T dt\} d\tau \\ &= \int_0^t [1 \|x\|] \bar{c}_0 + [1 \|x\|] \int_0^t \|B^T S^T \sigma\| \Phi [1 \|x\|]^T dt \int_0^t d\tau \\ &= [1 \|x\|] \bar{c}_0 + [1 \|x\|] \int_0^t \|B^T S^T \sigma\| \Phi [1 \|x\|]^T dt \\ &= \{\bar{c}_{10} + \phi_{11} \int_0^t \|B^T S^T \sigma\| dt\} + \{\bar{c}_{20} + \phi_{22} \int_0^t \|B^T S^T \sigma\| \|x\| dt\} \|x\| \\ &= \bar{c}_1(t) + \bar{c}_2(t) \|x\| \end{aligned} \quad (33)$$

위의 결과로부터 본 논문에서 제안된 제어 시스템이 Yoo와 Chung[8]의 결과를 포함하고 있음을 알 수 있다.

### III. 시뮬레이션 예제

본 논문에서 제안된 제어 시스템의 성능을 확인하기 위해 Yoo와 Chung[8]이 제안한 다음과 같이 표현되는 가변 길이 구조를 갖는 펜달럼을 대상으로 시뮬레이션을 수행한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + e(t, x)) \\ e(t, x) &= \frac{-10(1 + \cos x_1) \sin x_1 + 0.5(1 + 0.5 \cos x_1) \sin x_1 \cdot x_2^2}{\Delta(x_1)} \\ &\quad + \frac{(1 - \Delta(x_1))u}{\Delta(x_1)} + v(t) \cos x_1 \end{aligned}$$

여기서  $\Delta(x_1) = 0.25(\cos x_1 + 2)^2$ 이고  $v(t) = 2 \cos(3t)$ 로 외란을 나타낸다.

설계순서에 의해 슬라이딩 평면을  $\sigma(x) = 7x_1 + x_2 = 0$ 으로 설계하고  $G = 0.1$ 로 선택하면 제안된 적응가변구조 제어기는

다음과 같이 기술된다.

$$u_{eq} = -7x_2, \quad u_s = -0.1\sigma(x), \quad u_N = -\sigma(x) / \|\sigma(x)\| \bar{\rho}.$$

불확실성의 경계치 추정을 위해 (13)의 조건을 만족하는 커널  $K(t, \tau)$ , 파라미터  $\Phi$  및 적분 구간은 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= [1 f(t-\tau)], \quad f(t) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(t/0.5)^2}, \\ \Phi &= \text{diag}[10 \ 100], \quad [a \ b] = [0 \ 0.5] \end{aligned}$$

일반적으로 초기에 많은 에러가 발생되고 안정되면서 에러가 줄어들기 때문에 초기에 파라미터 적응을 크게 하기 위해 커널 함수는 Messner, et al. [13]가 사용한 Gaussian 함수를 사용하였다. 그림 1과 2는 초기값  $x(0) = [\pi/2 \ 0]^T$ 에 대해 각각  $x_1(t)$ 의 응답 특성 및 제어 입력을 보여준다. 그림에서 볼 수 있듯이 제안된 제어기에 의해 대상 시스템이 점진적으로 안정화되는 것을 볼 수 있다. 그림 3은 각각 불확실성의 실제 경계치와 적응 경계치의 시간에 대한 궤적을 보여 주고 있으며, 적응과정이 진행됨에 따라 적응 경계치가 실제 경계치를 감싸게 됨으로써 시스템 궤적을 슬라이딩 평면에 도달하게 하고 이후 그 평면을 따라 원점으로 점진적으로 수렴하도록 하는데 기여함을 알 수 있다. 다음은 제어입력과 적응기법이 연속적인 값을 갖도록 수정한 경우에 대해 살펴 본다.

그림 4, 5와 6은  $\varepsilon = 0.3$ 이고  $\Gamma = \text{diag}[0.02 \ 0.03]$ 이라 설정했을 때 각각  $x_1(t)$ 의 응답 특성, 제어입력  $u(t)$  및 파라

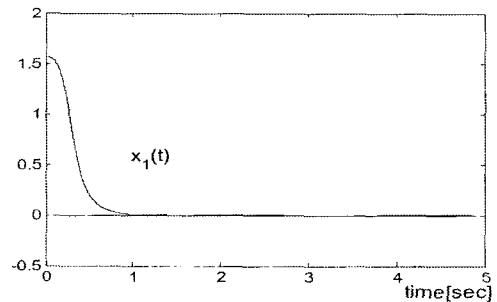


그림 1.  $x_1(t)$ 의 시간응답.  
Fig. 1. Time response of  $x_1(t)$ .

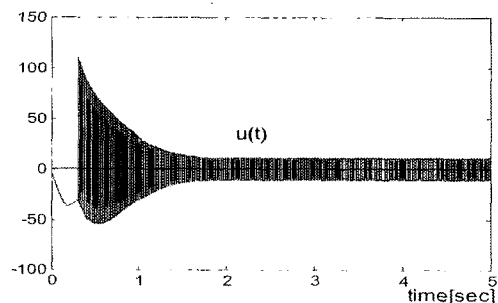


그림 2. 제어입력  $u(t)$ .  
Fig. 2. Control input  $u(t)$ .

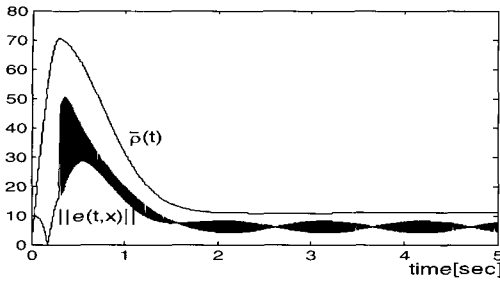


그림 3.  $\bar{\rho}(t)$  와  $\|e(t,x)\|$  의 시간계적.

Fig. 3. The histories of  $\bar{\rho}(t)$  and  $\|e(t,x)\|$ .

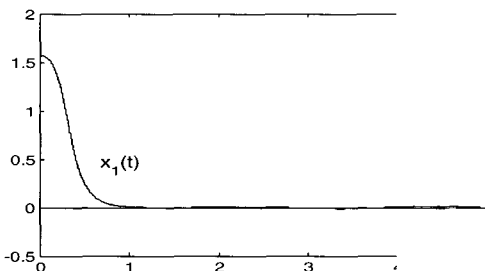


그림 4. 연속 제어입력 경우의  $x_1(t)$  시간응답.

Fig. 4. Time response of  $x_1(t)$  in case of continuous control.

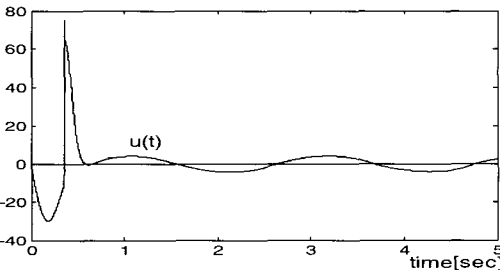


그림 5. 연속 제어입력  $u(t)$ .

Fig. 5. Continuous control input  $u(t)$ .

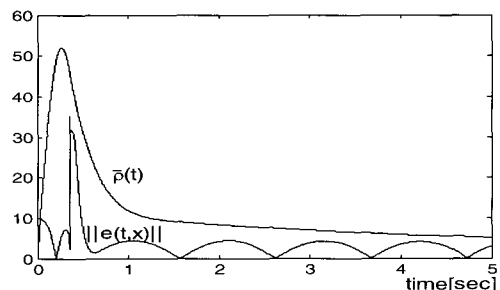


그림 6. 연속 제어입력 경우의  $\bar{\rho}(t)$  와  $\|e(t,x)\|$  의 시간계적.

Fig. 6. The histories of  $\bar{\rho}(t)$  and  $\|e(t,x)\|$  in case of continuous control.

미터 적응과정을 보여준다. 그림 5에서 보듯이 채터링 현상이 거의 사라짐을 볼 수 있다.

IV. 결론

본 논문은 불확실성에 대한 가정을 보다 완화했을 때의 경우 즉, 불확실성의 구조 정보를 전혀 알 수 없는 경우의 강건한 가변구조 제어기를 설계하는데 목적이 있다. 이를 위해 불확실성의 경계치를 제 1 종의 Fredholm 적분식 즉, 미리 정의된 커널과 미지의 유도 함수의 곱을 적분하는 형태로 수식화하였고, 미지의 유도함수를 추정하는 적응기법을 제시하였으며, 이로부터 적응 경계치를 예측하는 방법을 제안하였다. 이렇게 얻은 적응 경계치를 이용하여 Lyapunov 안정성 이론을 기초로 불확실 동적 시스템의 점근적 안정도 및 ultimate boundedness를 보장하는 적응가변구조제어기를 설계하였다. 또한, 제안된 제어 시스템에서 적절한 커널 함수를 선택하면 Yoo와 Chung[8]의 결과를 포함한다는 것을 보임으로써 불확실성의 경계치를 추정하는데 있어서 보다 확장된 개념임을 증명하였다. 예제 시뮬레이션을 통해 제안된 제어 시스템이 불확실성을 가진 동적 시스템을 효과적으로 제어한다는 것을 보였다.

참고문헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, February, 1977.
- [2] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial", *IEEE Proceedings*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [3] S. Gutman, "Uncertain dynamical systems - A Lyapunov min-max approach", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 24, no. 3, pp. 437-443, March 1979.
- [4] S. Gutman and Z. Palmor, "Properties of min-max controllers in uncertain dynamical systems", *SIAM J. on Control and Optimization*, vol. 20, no. 6, pp. 850-861, 1982.
- [5] B. R. Barmish, M. J. Corless, and G. Leitmann, "A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems", *SIAM J. on Control and Optimization*, vol. 21, no. 2, pp. 246-255, 1983.
- [6] M. J. Corless and G. Leitman, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 26, no. 5, pp. 1139-1144, May 1981.
- [7] Y. H. Chen, "Robust control system design: non-adaptive and adaptive", *International Journal of Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1457-1477, 1990.
- [8] D. S. Yoo and M. J. Chung, "A Variable structure control with simple adaptation laws for upper bounds on the norm of the uncertainties", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 6, pp. 860-865, June 1992.
- [9] C.-H. Choi and H.-S. Kim, "Adaptive regulation for a Class of Uncertain Systems with Partial Knowledge of Uncertainty Bounds", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 38, no. 8, pp. 1246-1250, August 1993.
- [10] B. Brogliato and A. Trofino Neto, "Practical stabilization of a class of nonlinear systems with partially known uncertainties", *Automatica*, vol. 31, no. 1, pp. 145-150, 1995.
- [11] H. Wu, "Continuous adaptive robust controllers guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain nonlinear system", *International Journal of Control*, vol. 72, no. 2, pp. 115-122,

January 1999.

[12] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Academic Press, New York, 1970.

[13] W. Messner, R. Horowitz, W.-W. Kao, and M. Boals, "A New Adaptive Learning Rule", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, no. 2, pp. 188-197, February 1991.



**유 동 상**

1962년 4월 12일생. 1985년 서울대학교 공과대학 전기공학과 졸업. 1987년, 1992년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업 (석사, 박사). 1992년~2000년 LG생산기술원 책임연구원. 2000년~현재 국립한경대학교 전기공학과 조교수. 관심분

야는 강인제어, 로봇틱스, 자동화.