응용통계연구 제 **16**권 2호, 2003년, pp. 455-467

소표본에서 차이측도 통계량의 비교연구

홍종선[1] 정동빈[2] 박용석[3]

요 약

소표본 분할표 자료에서 적합도 검정통계량들의 카이제곱 근사 적용 가능에 대하여 많은 연구가 진행되었다. 소표본에서 세 가지 검정 통계량(피어슨 카이제곱 X^2, 일반화 가능도비 G^2, 그리고 역발산 $I(2/3)$ 검정통계량)에 관하여 비교한 Rudas(1986)의 연구를 확장하여, 최근에 제안된 차이측도($BWHD(1/9)$, $BWCS(1/3)$, $NED(4/3)$ 검정통계량)를 포함시켜 비교 분석하였다. 독립모형의 이차원 분할표, 조건부 독립모형과 한 변수 독립 모형을 따르는 삼차원 분할표에 대한 모의실험을 통하여 생성된 90과 95 백분위수와 이에 대응하는 95% 신뢰구간을 살펴보고 실제 백분위수와 비교하였다. 그 결과 X^2, $I(2/3)$, 그리고 $BWHD(1/9)$ 검정통계량이 유사한 결과를 나타내었고 이 통계량들이 기존에 제안된 검정통계량들보다 적은 표본크기에서도 카이제곱 근사방법에 적용 가능함을 발견하였다.

주요용어 : 가중 카이제곱 통계량, 가중 헬링거거리 통계량, 로그선형모형, 모의실험, 백분위수, 일반화 가능도비 통계량, 역발산 통계량, 음의 지수차이 통계량, 피어슨 카이제곱 통계량.

1. 서론

범주형 자료에 관하여 가설 검정하는 것은 카이제곱분포의 가장 중요한 응용방법중 하나이다. 분할표 자료를 설명하는 확률분포가 귀무가설 모형에 적합하는지를 검정하는 통계량으로는 피어슨 카이제곱 검정통계량과 일반화 가능도비 검정통계량이 잘 알려져 있다. 분할표를 이차원으로 가정하는 경우, 귀무가설 하에서 (i,j)칸에 대응하는 빈도수 x_{ij}와 기대도수의 최고가능도추정량(MLE)을 $\hat{m}_{ij}$라고 하면, 모두 근사적으로 자유도 $(I-1)(J-1)$을 갖는 카이제곱 분포를 따르는 피어슨 카이제곱 X^2 검정통계량과 일반화 가능도비 G^2 검정통계량은 다음과 같이 정의한다.

$$X^2 = \sum_{i,j} \frac{(x_{ij} - \hat{m}_{ij})^2}{\hat{m}_{ij}}, \tag{1.1}$$

1) (110-745) 서울특별시 종로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 경제학부 통계학전공, 교수
E-mail : cshong@skku.ac.kr
2) (210-702) 강원도 강릉시 지변동 123, 강릉대학교 자연과학대학 정보통계학과, 부교수
E-mail : dj@kangnung.ac.kr
3) (110-745) 서울특별시 종로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 통계학과, 대학원
E-mail : park9457@hanmail.net

$$G^2 \;=\; 2\sum_{i,j} x_{ij} log \frac{x_{ij}}{\hat{m}_{ij}}. \tag{1.2}$$

또한 근사적으로 카이제곱분포를 따르는 역발산(power divergence) 검정통계량 $I(\lambda)$는 Cressie와 Read(1984)에 의하여 다음과 같이 정의되었다.

$$I(\lambda) \;=\; \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i,j} x_{ij} \left(\frac{x_{ij}^{\lambda}}{\hat{m}_{ij}^{\lambda}} - 1 \right), \tag{1.3}$$

여기서 $\lambda \in R$ 이다. 이 통계량은 위에서 언급한 X^2과 G^2 통계량을 모두 포함하고 있으며(즉, $I(1) = X^2$, $\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = G^2$), 기대도수의 최고가능도추정량 $\hat{m}_{ij}$이 1 이상이고 전체 표본크기가 10 이상이면 $\lambda = 2/3$인 경우인 역발산 검정통계량 $I(2/3)$는 X^2과 G^2 통계량의 대안적인 추정량으로 사용될 수 있다고 제안하였다.

주어진 분할표 자료와 모형에 대하여 카이제곱 근사방법을 X^2과 G^2 통계량의 분포에 응용할 수 있는가에 관한 몇 가지 기준은 여러 문헌에서 연구되었다. X^2 검정통계량에 대하여 Fisher(1941)는 최소 칸기대값(minimum cell expectation : MCE)이 5이상 되어야 한다고 제안하였으며, Cramér(1946)는 MCE가 10 그리고 Kendall(1948)은 MCE가 20을 요구하였다. Cohran(1954)은 칸기대값이 5 미만인 칸의 수가 전체 칸 수의 1/5을 초과하지 않으면 MCE는 1만큼 작을수도 있다는 규칙을 만들었다. 가장 보편적인 규칙으로는 Lantz(1978)의 결과를 토대로 Yarnold(1970)와 Fienberg(1979)가 연구하였는데, Yarnold(1970)는 분할표 자료의 칸의 수가 3보다 크면 칸기대값이 $5t_5/t$ 보다 커야 검정통계량이 카이제곱분포에 근사한다고 제시하였다. 여기서 t_5는 기대도수가 5보다 작은 칸의 수이고, t는 분할표의 칸 수이다. Fienberg(1979)는 표본크기가 분할표의 칸의 수의 4배 또는 5배 이상 되어야 한다고 제안하였다. 이런 연구는 삼차원으로 확대하여 로그선형모형을 적용하여 $2 \times 2 \times 2$ 분할표인 경우와 $3 \times 2 \times 2$ 분할표인 경우에는 Odoroff(1970)가 그리고 $3 \times 3 \times 3$ 분할표인 경우에는 Larntz(1978)가 비교 연구를 하였다.

Rudas(1986)는 위에서 언급한 카이제곱 근사방법을 검정통계량의 분포에 응용시킬 수 있는 기준을 만족하지 않은 소표본인 경우에 로그선형모형(log-linear model)에 적합한 17개의 분할표 자료를 고려하여 X^2과 G^2 통계량 외에 Cressie와 Read(1984)가 제안한 $I(2/3)$ 검정통계량에 대하여 카이제곱 분포에 근사함을 연구하였다. 이 연구를 통해 Rudas(1986)는 소표본인 경우에 G^2 통계량보다는 X^2 통계량이 90과 95백분위수 수준에서 더욱 적용이 가능하며, $I(2/3)$ 통계량은 X^2 통계량과 매우 유사하게 카이제곱분포에 근사함을 발견하였다.

Cressie와 Read(1984)의 $I(\lambda)$ 검정통계량의 개발 이후에 이 통계량이 큰 집합에 포함된 하나의 원소로 존재하는 차이측도(disparity measure)들이 많이 연구되었다(Lindsay(1994) 참조). 우선 Basu와 Sarkar(1994)가 제안한 차이측도 중의 하나인 가중 헬링거거리(Blended Weight Hellinger Distance : $BWHD(\lambda)$)통계량은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$BWHD(\lambda) = N\sum_{i,j}\left\{\frac{x_{ij}/N - \hat{m}_{ij}/N}{\lambda\,(x_{ij}/N)^{1/2} + (1-\lambda)\,(\hat{m}_{ij}/N)^{1/2}}\right\}^2, \tag{1.4}$$

여기서 $\lambda \in R$이고 N은 표본크기이다. $BWHD(1/9)$는 $I(2/3)$와 마찬가지로 X^2과 G^2 통계량의 좋은 대안으로 사용될 수 있음을 제안하였다.

가중 카이제곱(Blended Weight Chi-Square : $BWCS(\lambda)$)통계량은 Shin, Basu와 Sarkar (1996)가 제안한 차이측도중의 하나이며 다음과 같이 정의된다.

$$BWCS(\lambda) = N\sum_{i,j}\left\{\frac{(x_{ij}/N - \hat{m}_{ij}/N)^2}{\lambda\,(x_{ij}/N) + (1-\lambda)\,(\hat{m}_{ij}/N)}\right\}, \tag{1.5}$$

여기서 $0 \le \lambda \le 1$이고 N은 표본크기이다. X^2 통계량은 $\lambda = 0$의 특별한 경우이다. $BWCS(1/3)$은 X^2과 G^2 통계량의 좋은 대안임을 발표하였다.

마지막으로 Jeong과 Sarkar(2000)가 제안한 음의 지수차이(Negative Exponential Disparity : $NED(\lambda)$)통계량은 다음과 같이 정의된다.

$$NED(\lambda) = 2N\sum_{i,j}\left(\frac{\hat{m}_{ij}}{N}\right)\left\{\frac{exp\left[-\lambda\,(x_{ij}/\hat{m}_{ij} - 1)\right] - 1 + \lambda\,(x_{ij}/\hat{m}_{ij} - 1)}{\lambda^2}\right\}, \tag{1.6}$$

여기서 $\lambda \in R$이다. $NED(4/3)$통계량도 X^2과 G^2 통계량의 좋은 대안으로 사용될 수 있음을 보였다.

본 연구에서는 Rudas(1986)의 연구를 발전시켜 X^2, G^2, $I(2/3)$ 통계량 뿐만아니라 $BWHD(1/9)$, $BWCS(1/3)$, 그리고 $NED(4/3)$ 통계량이 카이제곱분포에 근사함을 살펴보기 위하여 몬테칼로 방법의 반복실험을 이용하여 비교 연구하고자 한다. Rudas(1986)가 연구한 방법과 동일하게 7종류의 이차원 분할표와 6종류의 삼차원 분할표를 사용하였는데 이차원 분할표는 독립모형([A][B]모형)을 그리고 삼차원 분할표에서는 세번째 변수가 주어질 때 첫번째 변수와 두번째 변수가 독립인 조건부 독립모형([AC][BC]모형)을 고려하였다. 본 연구에서는 삼차원 분할표 자료에서 조건부 독립모형 외에 한 변수 독립모형([AB][C]모형)에 적합한 4가지 경우의 분할표를 추가적으로 고려하였다. 그리고 각 분할표 자료의 크기가 전체 칸의 수의 2배 또는 3배에 해당하는 소표본에 대하여, 카이제곱분포의 90과 95 백분위수와 모의실험한 90과 95 백분위수 그리고 이에 대응하는 각각의 95% 신뢰구간과의 관계를 살펴보면서 카이제곱분포의 90과 95 백분위수 수준에서 검정통계량의 적용 가능성을 살펴본다.

논문의 2절에서는 연구방법을 기술하고 있는데 독립적인 이차원 분할표 및 조건부 독립모형을 따르는 삼차원 분할표 그리고 한 변수 독립모형을 따르는 삼차원 분할표에 대한 모의실험에 관한 표본의 크기 및 반복 횟수 등을 서술하였으며, 본 연구에서 사용하는 검정통계량들의 분포에서 90과 95 백분위수와 모의실험한 90과 95 백분위수 그리고 이에 대

응하는 각각의 95% 신뢰구간을 구하는 과정도 명확하게 정리하였다. 이런 과정을 통하여 얻은 모의실험 결과를 3절에서 요약하여 표로 나열하였으며, 4절에서는 본 연구의 결과에 대한 신뢰성을 논의하였다.

2. 몬테칼로 연구

앞에서 언급한 세 가지 검정 통계량인 $X^2, G^2, I(2/3)$ 통계량과 차이측도 통계량 $BWHD(1/9)$, $BWCS(1/3)$, $NED(4/3)$에 대한 소표본에서의 특성은 17가지의 분할표를 이용하여 연구하였다. 이들 17가지의 분할표중 7가지는 이차원이고 10가지는 삼차원이다. 이차원 분할표는 독립인 모형([A][B]모형)이고 삼차원 분할표중 6가지는 세번째 변수의 주변확률이 주어졌을 때 첫번째 변수의 주변확률과 두번째 변수의 주변확률이 독립인 조건부 독립모형([AC][BC]모형)이며 나머지 4가지는 한 변수 독립모형([AB][C]모형)을 따르는 분할표 자료이다. 이차원 분할표는 2개의 일차원 주변확률표(marginal probability table)를 이용하여 생성되었다. 조건부 독립모형을 따르는 삼차원 분할표는 첫번째와 세번째 변수 그리고 두번째와 세번째 변수의 결합 확률표를 포함하는 2개의 이차원 주변확률표를 이용하고 한 변수 독립모형을 따르는 삼차원 분할표는 첫번째와 두번째 변수의 결합확률표와 세번째 변수의 주변확률표를 이용하여 생성하였다. 각 모형을 따르는 분할표를 생성하는 주변확률표는 부록 I 의 표 A.1에 주어져 있다. 모형의 자유도는 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20으로 이차원과 삼차원 분할표 자료에 대한 자유도를 공유하게 설계하였다. 각 모형과 분할표의 형태에 따른 자유도와 각각의 표본크기는 부록 I 의 표 A.2에 나열하였다.

설정된 표본크기의 분할표들에 대하여 1,000개의 표본들을 생성하고 앞에서 언급한 6가지의 통계량을 1,000개의 표본들에 대하여 계산하고 값을 구하는데, 예를 들어 피어슨 카이제곱 X^2 통계량에 대하여 설명하면 다음과 같다. 분할표와 표본크기에 대한 모의실험에서 X^2 통계량의 분포에 대한 α-분위수 X^2_α의 점추정량으로는 순서통계량 $X^2_{(n\alpha+1)}$으로 정의되며 X^2_α 에 대한 근사 95% 신뢰구간은 다음과 같이 정리할 수 있다(David, H. A.(1970)).

$$P(X^2_{(r)} \le X^2_\alpha \le X^2_{(s)}) \approx 0.95,$$

여기서 $r = (n\alpha + 0.5) - 1.96(n\alpha(1-\alpha))^{1/2}$, $s = (n\alpha + 0.5) + 1.96(n\alpha(1-\alpha))^{1/2}$로 정의되는데 90과 95 백분위수의 점추정량은 각각 $X^2_{(901)}$과 $X^2_{(951)}$이며, 95% 신뢰구간을 구하면 각각 다음과 같다.

$$P(X^2_{(881)} \le X^2_{0.90} \le X^2_{(920)}) \approx 0.95$$
$$P(X^2_{(936)} \le X^2_{0.95} \le X^2_{(965))}) \approx 0.95$$

X^2 검정통계량 이외에 G^2, $I(2/3)$, $BWHD(1/9)$, $BWCS(1/3)$, $NED(4/3)$도 유사하게 90과 95 백분위수의 점추정량과 각각의 95% 구간추정량을 구할 수 있으며, 추정량에 대한 모의실험 결과의 일부는 부록 II 에 수록하였다.

표 3.1: 카이제곱 근사 사용가능 비율

이차원 독립모형([A][B]모형)	90 백분위수	95 백분위수
X^2	34/37	31/37
$I(2/3)$	32/37	29/37
G^2	5/37	11/37
$BWHD(1/9)$	34/37	34/37
$BWCS(1/3)$	30/37	26/37
$NED(4/3)$	31/37	27/37
조건부 독립모형([AC][BC]모형)	90 백분위수	95 백분위수
X^2	19/30	25/30
$I(2/3)$	17/30	24/30
G^2	0/30	1/30
$BWHD(1/9)$	13/30	21/30
$BWCS(1/3)$	12/30	16/30
$NED(4/3)$	7/30	14/30
한 변수 독립모형([AB][C]모형)	90 백분위수	95 백분위수
X^2	18/19	16/19
$I(2/3)$	17/19	16/19
G^2	0/19	0/19
$BWHD(1/9)$	17/19	16/19
$BWCS(1/3)$	14/19	13/19
$NED(4/3)$	13/19	13/19

표 3.2: 이차원 독립모형([A][B]모형)에서 X^2, $I(2/3)$, $BWHD(1/9)$ 통계량들의 비교

		90 백분위수 $I(2/3)$				95 백분위수 $I(2/3)$	
		+	−			+	−
X^2	+	32	1	X^2	+	28	3
	−	0	4		−	1	5
		90 백분위수 $BWHD(1/9)$				95 백분위수 $BWHD(1/9)$	
		+	−			+	−
X^2	+	33	0	X^2	+	31	0
	−	1	3		−	3	3
		90 백분위수 $BWHD(1/9)$				95 백분위수 $BWHD(1/9)$	
		+	−			+	−
$I(2/3)$	+	32	0	$I(2/3)$	+	29	0
	−	2	3		−	5	3

3. 결과

본 연구의 모의실험 결과의 일부만을 부록 II에 나열하였다. 각각의 표는 로그선형모형과 분할표 자료의 형태 그리고 이에 대응하는 자유도에 따라 결과를 요약하였다. 각각의 표본크기와 6가지의 검정통계량들에 대하여 90과 95 백분위수의 점추정량과 95% 신뢰구간을 구하였다. 극한분포인 카이제곱분포의 90과 95 백분위수도 참고적으로 표에 설명하였다. 표의 형식은 Rudas(1986)의 양식과 동일하게 사용하였으며 신뢰구간 사이에 표시한 별

표 3.3: 조건부 독립모형([AC][BC]모형)에서 X^2, $I(2/3)$, $BWHD(1/9)$ 통계량들의 비교

		90 백분위수 $I(2/3)$				95 백분위수 $I(2/3)$	
		+	−			+	−
X^2	+	16	4	X^2	+	24	0
	−	1	9		−	1	5
		90 백분위수 $BWHD(1/9)$				95 백분위수 $BWHD(1/9)$	
		+	−			+	−
X^2	+	12	8	X^2	+	19	5
	−	1	9		−	3	3
		90 백분위수 $BWHD(1/9)$				95 백분위수 $BWHD(1/9)$	
		+	−			+	−
$I(2/3)$	+	13	4	$I(2/3)$	+	18	6
	−	0	13		−	3	3

표 3.4: 한 변수 독립모형([AB][C]모형)에서 X^2, $I(2/3)$, $BWHD(1/9)$ 통계량들의 비교

		90 백분위수 $I(2/3)$				95 백분위수 $I(2/3)$	
		+	−			+	−
X^2	+	16	2	X^2	+	15	1
	−	1	0		−	1	2
		90 백분위수 $BWHD(1/9)$				95 백분위수 $BWHD(1/9)$	
		+	−			+	−
X^2	+	17	1	X^2	+	15	1
	−	1	0		−	1	2
		90 백분위수 $BWHD(1/9)$				95 백분위수 $BWHD(1/9)$	
		+	−			+	−
$I(2/3)$	+	17	0	$I(2/3)$	+	15	1
	−	1	1		−	1	2

표(*)는 극한분포의 백분위수가 신뢰구간에 존재하는 경우를 나타낸다. 즉 이 경우에는 카이제곱 근사의 사용이 적절하다는 것을 의미한다(Rudas, 1984).

기존의 적합도 검정통계량 3종류(X^2, $I(2/3)$, G^2)와 본 연구에서 추가된 차이측도 통계량($BWHD(1/9)$, $BWCS(1/3)$, $NED(4/3)$)에 대하여 90과 95 백분위수의 95% 신뢰구간에 각각의 극한분포의 백분위수가 존재하는 경우의 수를 모형별로 정리한 결과를 표 3.1에 정리하였다. 이차원 분할표 자료의 독립모형에서는 분할표와 표본크기의 조합인 37종류의 결과에 대하여, 삼차원 분할표의 조건부 독립모형에서는 30종류의 조합에 대하여, 그리고 삼차원 분할표의 한 변수 독립모형에 대해서는 19종류에 대하여 비교하였다. 표 3.1을 통해 본 연구에서 추가된 한 변수 독립모형외 다른 두 모형에서도 Rudas(1986)의 연구와 유사하게, 소표본에서 X^2 통계량이 G^2 통계량보다 적절하며 $I(2/3)$ 통계량이 X^2 통계량과 유사함을 발견하였다. 표 3.1을 살펴보면 $BWHD(1/9)$ 통계량이 소표본에서 $BWCS(1/3)$와

$NED(4/3)$ 통계량보다 카이제곱 근사의 사용이 적절하다는 것을 발견하였다.

Rudas(1986)의 연구 결과에서 주장한 X^2, $I(2/3)$와 본 연구에서 추가된 3종류의 차이측도 통계량 중 가장 효율적인 $BWHD(1/9)$ 통계량들이 카이제곱 근사 사용에 어느 통계량이 가장 적절한지를 비교하기 위해 요약한 결과를 표 3.2부터 표 3.4에 정리하였는데, 표 3.2에는 이차원 독립모형에 대하여, 표 3.3은 삼차원 조건부 독립모형에 대하여, 그리고 표 3.4는 삼차원 한 변수 독립모형에 대하여 정리하였다. 표에서 '+'범주는 '카이제곱 사용 가능'을 '-' 범주는 '카이제곱 사용불가'를 의미하며, 두개씩의 통계량에 대해 2×2 분할표로 작성함으로써 카이제곱 사용가능성을 정리하였다.

표 3.2에서 90 백분위수에 대한 결과는 95 백분위수에 대한 결과보다 세 통계량들 간의 유사성('+'범주와 '-'범주끼리의 일치성)이 존재함을 살펴볼 수 있다. 그러나 이 유사성의 차이는 표 3.3와 표 3.4에서는 찾아낼 수 없으므로 두 백분위수 간의 결과 차이는 크지 않다고 판단할 수 있다. 표 3.2의 결과에서는 $I(2/3)$ 통계량보다는 X^2 통계량이 카이제곱 근사에 적절하고 X^2 통계량보다는 $BWHD(1/9)$ 통계량이 더욱 적절함을 보여주고 있으며, 표 3.3에서는 $BWHD(1/9)$ 통계량보다는 $I(2/3)$이 그리고 $I(2/3)$ 통계량보다는 X^2 통계량이 카이제곱 근사에 적절함을 알 수 있다. 마지막으로 표 3.4에서는 $I(2/3)$ 통계량보다 X^2과 $BWHD(1/9)$이 더욱 적절하다고 추론할 수 있다.

4. 결과의 신뢰도

많은 논문에서 언급되는 대부분의 모의실험의 반복수는 매우 크다. 그러나 결과의 신뢰성은 한번의 경험적인 결과로 평가될 수 없기 때문에, Juritz, Juritz와 Stephens(1983)은 백분위수를 모의실험하는 경우에 비교적 적은 반복수로 여러 번 실험하는 방법이 우월하다고 주장하였다. 따라서 본 연구에서는 6종류의 검정통계량에 관한 부록 II의 모의실험(반복수 1,000번) 결과를 한번 더 시행하여 결과의 신뢰도를 모형별로 표 4.1부터 표 4.3에 정리하였다.

표 4.1: 이차원 독립모형([A][B]모형)에서 결과의 신뢰도

90 백분위수				95 백분위수			
X^2							
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	31	3	모의실험 1	+	29	2
	−	2	1		−	2	4
$I(2/3)$							
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	29	3	모의실험 1	+	27	3
	−	3	2		−	5	2
$BWHD(1/9)$							
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	31	1	모의실험 1	+	31	3
	−	4	1		−	1	2

표 4.2: 조건부 독립모형([AC][BC]모형)에서 결과의 신뢰도

		90 백분위수				95 백분위수	
				X^2			
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	14	6	모의실험 1	+	22	3
	−	3	7		−	4	1
				$I(2/3)$			
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	13	3	모의실험 1	+	18	6
	−	7	7		−	5	1
				$BWHD(1/9)$			
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	7	6	모의실험 1	+	16	4
	−	5	12		−	6	4

표 4.3: 한 변수 독립모형([AB][C]모형)에서 결과의 신뢰도

		90 백분위수				95 백분위수	
				X^2			
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	15	3	모의실험 1	+	13	3
	−	0	1		−	1	2
				$I(2/3)$			
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	15	2	모의실험 1	+	13	3
	−	1	1		−	1	2
				$BWHD(1/9)$			
		모의실험 2				모의실험 2	
		+	−			+	−
모의실험 1	+	16	1	모의실험 1	+	13	3
	−	1	1		−	1	2

표 3.1부터 표 3.4까지의 모든 결과를 바탕으로 X^2, $I(2/3)$, $BWHD(1/9)$ 통계량이 나머지 통계량(G^2, $BWCS(1/3)$, $NED(4/3)$)보다 소표본에서 카이제곱 근사에 적절하다고 결론내릴 수 있으므로 우수성이 입증된 X^2, $I(2/3)$, $BWHD(1/9)$ 통계량에 대하여만 90과 95 백분위수의 신뢰구간에 극한분포의 백분위수가 포함되었는지의 여부에 따라 2×2 분할표를 작성하였다. 90과 95 백분위수의 신뢰성('+' 범주와 '-' 범주끼리의 일치성)의 차이는 별로 없으며, 각 모형마다 신뢰성은 일치하지 않는다. 이차원 독립모형에서는 $I(2/3)$ 통계량의 신뢰성이 떨어지며, 삼차원 조건부 독립모형에서는 X^2 통계량의 신뢰성이 돋보인다. 그리고 삼차원 자료의 한 변수 독립모형에서는 세 통계량의 신뢰성이 모두 동일함을 살펴볼 수 있다. 그러므로 표 4.1부터 표 4.3까지의 신뢰성을 전체적으로 살펴보면, X^2 통계량이 가장 우수한 신뢰성을 나타내며 $I(2/3)$ 통계량보다 $BWHD(1/9)$ 통계량도 좋은 신뢰성을 보여준다고 결론내릴 수 있다.

부록 I

표 A.1: 각 모형에서의 주변확률표 및 표본크기

모형	분할표		주변확률
이차원	2×2	0.4 0.6	0.25 0.75
완전 독립모형	2×3	0.25 0.75	0.24 0.4 0.36
([A][B]모형)	2×4	0.25 0.75	0.24 0.16 0.36 0.24
	3×3	0.25 0.25 0.5	0.2 0.3 0.5
	2×6	0.4 0.6	0.125 0.125 0.25 0.1 0.25 0.15
	3×6	0.3 0.2 0.5	0.1 0.1 0.25 0.05 0.3 0.2
	5×6	0.1 0.2 0.2 0.2 0.3	0.1 0.1 0.2 0.1 0.3 0.2
삼차원	2×2×2	0.16 0.45	0.15 0.45
조건부 독립모형		0.24 0.15	0.25 0.15
([AC][BC]모형)	2×2×3	0.1 0.1 0.2	0.1 0.21 0.25
		0.1 0.2 0.3	0.1 0.09 0.25
	2×3×2	0.2 0.2	0.15 0.1
		0.2 0.4	0.3 0.2
			0.15 0.1
	2×2×5	0.05 0.02 0.18 0.1 0.1	0.02 0.05 0.1 0.1 0.12
		0.05 0.08 0.12 0.1 0.2	0.08 0.05 0.2 0.1 0.18
	3×2×5	0.025 0.04 0.1 0.025 0.04	0.04 0.05 0.15 0.06 0.15
		0.025 0.04 0.1 0.05 0.2	0.06 0.15 0.15 0.04 0.15
		0.05 0.12 0.1 0.025 0.06	
	3×3×5	0.02 0.1 0.05 0.1 0.05	0.05 0.02 0.14 0.09 0.04
		0.02 0.05 0.05 0.1 0.1	0.025 0.04 0.03 0.12 0.14
		0.06 0.05 0.1 0.1 0.05	0.025 0.14 0.03 0.09 0.02
삼차원	2×2×2	0.16 0.45	0.4 0.6
한 변수 독립모형		0.24 0.15	
([AB][C]모형)	2×3×2	0.1 0.1 0.2	0.4 0.6
		0.1 0.2 0.3	
	2×3×3	0.1 0.1 0.2	0.2 0.4 0.4
		0.1 0.2 0.3	
	3×2×5	0.15 0.1	0.1 0.2 0.2 0.2 0.3
		0.3 0.2	
		0.15 0.1	

표 A.2: 각 모형에 대한 표본크기 및 자유도

모형	분할표	자유도	표본크기
이차원	2×2	1	15 25 35 45 55
완전 독립모형	2×3	2	15 25 35 45 55
([A][B]모형)	2×4	3	15 25 35 45 55
	3×3	4	15 25 35 45 55
	2×6	5	15 25 35 45 55
	3×6	10	25 35 45 55 65 75 85 95
	5×6	20	50 75 100 125
삼차원	2×2×2	2	15 25 35 45 88
조건부 독립모형	2×2×3	3	15 25 35 45 55
([AC][BC]모형)	2×3×2	4	15 25 35 45 55
	2×2×5	5	45 55 65 75 85 95
	3×2×5	10	50 75 100 125
	3×3×5	20	50 75 100 125 150
삼차원	2×2×2	3	15 25 35 45 55
한 변수 독립모형	2×3×2	5	15 25 35 45 55
([AB][C]모형)	2×3×3	10	25 35 45 55 65
	3×2×5	20	50 75 100 125

부록 II

표 B.1: 모의실험된 백분위수와 근사 신뢰구간 : 5 × 6 독립모형, $df = 20$

표본 크기	통계량	점추정값		신뢰구간	
		90 백분위수	95 백분위수	90 백분위수	95 백분위수
50	X^2	27.83	31.37	26.87*28.78	30.05*32.75
	$I(2/3)$	27.69	30.55	26.85*28.50	29.98*31.61
	G^2	31.18	33.77	30.27 31.79	32.73 34.96
	$NED(4/3)$	25.90	27.88	25.45 26.58	27.32 29.29
	$BWHD(1/9)$	27.65	30.50	26.72*28.48	29.51*31.74
	$BWCS(1/3)$	26.22	28.34	25.43 26.77	27.45 29.35
75	X^2	28.37	31.89	27.38*29.48	30.59*33.25
	$I(2/3)$	28.67	31.78	27.81*29.30	30.54*33.16
	G^2	31.87	35.78	30.93 33.04	34.37 37.12
	$NED(4/3)$	27.61	30.34	26.81*28.56	29.13*31.44
	$BWHD(1/9)$	28.37	32.03	27.61*29.45	30.57*33.25
	$BWCS(1/3)$	27.48	30.77	26.84*28.48	29.19*31.59
100	X^2	27.96	30.53	27.18*28.89	29.86*32.03
	$I(2/3)$	28.62	31.46	27.75*29.21	30.68*33.10
	G^2	31.88	35.69	31.32 32.79	33.83 37.06
	$NED(4/3)$	27.44	30.14	26.87 28.02	29.12 31.06
	$BWHD(1/9)$	28.24	30.99	27.58*28.74	30.13*32.07
	$BWCS(1/3)$	27.52	30.05	27.02*28.04	29.14*30.98
125	X^2	28.82	31.22	28.03*29.71	30.58*33.17
	$I(2/3)$	30.09	33.43	28.93*31.09	32.41 34.56
	G^2	33.68	37.83	32.87 35.01	36.41 39.18
	$NED(4/3)$	28.86	31.47	27.97*29.67	30.69*32.57
	$BWHD(1/9)$	28.99	31.83	28.41*30.10	30.92*33.24
	$BWCS(1/3)$	28.84	31.15	27.91*29.60	30.39*33.08
	limiting dist.	28.41	31.41		

표 B.2: 모의실험된 백분위수와 근사 신뢰구간 : 3 × 2 × 5 조건부독립모형, $df = 10$

표본 크기	통계량	점추정값		신뢰구간	
		90 백분위수	95 백분위수	90 백분위수	95 백분위수
50	X^2	16.87	19.16	16.42 17.35	17.92*19.93
	$I(2/3)$	17.05	18.80	16.59 17.36	18.01*20.00
	$G2$	19.70	22.00	19.24 20.29	20.96 23.05
	$NED(4/3)$	17.25	19.27	16.84 17.64	18.33 20.41
	$BWHD(1/9)$	17.38	19.23	16.98 17.79	18.30*20.37
	$BWCS(1/3)$	16.99	18.91	16.70 17.59	18.08 20.10
75	$X2$	16.12	17.75	15.46*16.56	17.18*18.84
	$I(2/3)$	16.28	18.13	15.87*16.90	17.44*19.00
	$G2$	18.74	20.69	18.32 19.45	20.08 21.60
	$NED(4/3)$	16.91	18.41	16.35 17.39	17.84*19.17
	$BWHD(1/9)$	16.61	18.56	16.14 17.26	17.73*19.23
	$BWCS(1/3)$	16.73	18.24	16.11 17.22	17.65*18.98
100	$X2$	16.61	19.08	15.78*17.44	18.37 19.83
	$I(2/3)$	16.87	19.15	16.02 17.75	18.54 20.24
	$G2$	19.05	21.88	18.39 19.73	21.17 22.97
	$NED(4/3)$	16.98	19.66	16.50 17.85	18.94 20.72
	$BWHD(1/9)$	17.15	19.49	16.30 17.95	18.86 20.52
	$BWCS(1/3)$	16.84	19.46	16.39 17.67	18.81 20.62
125	$X2$	16.35	18.91	15.69*17.22	18.14*19.84
	$I(2/3)$	16.55	19.00	16.03 17.49	18.23*19.98
	$G2$	18.75	21.69	18.06 19.30	20.31 22.83
	$NED(4/3)$	17.08	19.71	16.53 17.64	18.50 20.99
	$BWHD(1/9)$	16.73	19.36	16.31 17.71	18.57 20.34
	$BWCS(1/3)$	16.89	19.44	16.42 17.47	18.26 20.60
	limiting dist.	15.99	18.31		

표 B.3: 모의실험된 백분위수와 근사 신뢰구간 : 3 × 2 × 5 한 변수독립모형, $df = 20$

표본 크기	통계량	점추정값 90 백분위수	점추정값 95 백분위수	신뢰구간 90 백분위수	신뢰구간 95 백분위수
50	$X2$	28.29	31.33	27.49∗29.01	30.52∗33.09
	$I(2/3)$	27.43	31.03	26.96∗28.53	29.61∗31.98
	$G2$	30.98	34.21	30.14 32.16	33.30 36.39
	$NED(4/3)$	26.61	29.56	25.97 27.60	28.56 30.66
	$BWHD(1/9)$	27.87	31.52	27.38∗28.95	30.19∗32.58
	$BWCS(1/3)$	26.75	29.80	25.99 27.42	28.64 31.22
75	$X2$	29.00	31.90	28.12∗30.26	31.31∗32.79
	$I(2/3)$	28.87	31.81	28.06∗29.89	30.95∗32.84
	$G2$	32.30	35.50	31.42 33.34	34.32 36.57
	$NED(4/3)$	28.53	31.20	27.76∗29.32	30.12∗32.09
	$BWHD(1/9)$	29.33	32.18	28.66 30.23	31.30∗33.26
	$BWCS(1/3)$	28.36	31.34	27.66∗29.20	30.34∗32.20
100	$X2$	27.96	31.64	26.98∗28.99	30.36∗32.97
	$I(2/3)$	28.05	31.90	27.28∗28.97	30.40∗32.97
	$G2$	31.64	35.53	30.58 32.53	34.43 36.70
	$NED(4/3)$	28.42	31.52	27.70∗29.36	30.55∗32.52
	$BWHD(1/9)$	28.33	32.18	27.68∗29.40	30.80∗33.43
	$BWCS(1/3)$	28.28	31.61	27.26∗29.05	30.55∗32.66
125	$X2$	28.25	32.11	27.51∗29.84	30.57∗33.34
	$I(2/3)$	28.38	32.15	27.54∗29.49	30.83∗33.67
	$G2$	31.43	34.98	30.52 32.17	33.48 37.21
	$NED(4/3)$	28.52	31.39	27.97∗29.56	30.43∗33.72
	$BWHD(1/9)$	28.71	32.57	27.80∗29.83	31.16∗33.90
	$BWCS(1/3)$	28.40	31.52	27.67∗29.40	30.67∗33.68
limiting dist.		28.41	31.41		

참고문헌

[1] Basu, A. and Sarkar, S. (1994). On disparity based goodness-of-fit tests for multinomial models, *Statistics and probability Letters*, 19, 307-312.

[2] Cohran, W. G. (1954). Some methods for strengthening the common χ^2 test, *Biometrics*, 10, 417-451.

[3] Cramér, Harald (1946). *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, NJ : Princeton University Press.

[4] Cressie, N. A. C. and Read, T. R. C. (1984). Multinomial goodness-of-fit tests, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 46, 440-464.

[5] David, H. A. (1970). *Order Statistics*, Wiley.

[6] Fienberg, S. E. (1979). The use of chi-squared statistics for categorical data problems, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 41, 54-64.

[7] Fisher, R. A. (1941). *Statistical Methods for Research Workers*, 8th ed., Oliver and Boyd.

[8] Jeong, D. and Sarkar, S. (2000). Negative exponential disparity family based goodness-of-fit tests for multinomial models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 65, 43-61.

[9] Juritz, J.M., Juritz, W.F. and Stephens M.A. (1983). On the accuracy of simulated percentage points, *Journal of the American Statistical Association*, 78, 441-444.

[10] Kendall, M. G. (1948). *The Advanced Theory of Statistics*, vol.1, 5th ed., Griffin.

[11] Lantz, K. (1978). Small-sample comparison of exact levels for chi-squared goodness-of-fit statistics, *Journal of American Statistical Association*, 73, 253-263.

[12] Lindsay, B. G. (1994). Efficiency versus Robustness : The Case for Minimum Hellinger Distance and Related Methods, *The Annals of Statistics*, 22, 1081-1114.

[13] Odoroff, C. L. (1970). A comparison of minimum logit chi-square estimation and maximum likelihood estimation in $2 \times 2 \times 2$ and $3 \times 2 \times 2$ contingency tables : tests for interaction, *Journal of American Statistical Association*, 65, 1627-1631.

[14] Rudas, T. (1984). Testing goodness-of-fit of log-lnear models based on small samples : a Monte Carlo study, *Colloquia Mathematica Societas János Bolyai*, 45, Goodness-of-fit, North-Holland.

[15] Rudas, T. (1986). A Monte Carlo comparison of the small sample behaviour of the Pearson, the Likelihood Ratio and the Cressie-Read Statistic, *Journal of the Statistical Computation and Simulation*, 24, 107-120.

[16] Shin, D. W., Basu, A. and Sarkar, S. (1996). Small sample comparisons for the blended weight chi-square goodness-of-fit test statistics, *Comunications in Statistics*, Theory and Method, 25, 211-226.

[17] Yarnold, J. K. (1970). The minimum expectation in X^2 goodness of fit tests and the accuracy of approximation for the null distribution, *Journal of American Statistical Association*, 65, 864-886.

[2003년 3월 접수, 2003년 6월 채택]

A Monte Carlo Comparison of the Small Sample Behavior of Disparity Measures

C. S. Hong[1)] D. B. Jeong[2)] Y. S. Park[3)]

ABSTRACT

There has been a long debate on the applicability of the chi-square approximation to statistics based on small sample size. Extending comparison results among Pearson chi-square X^2, generalized likelihood ratio G^2, and the power divergence $I(2/3)$ statistics suggested by Rudas(1986), recently developed disparity statistics ($BWHD(1/9)$, $BWCS(1/3)$, $NED(4/3)$) are compared and analyzed in this paper. By Monte Carlo studies about the independence model of two dimension contingency tables, the conditional model and one variable independence model of three dimensional tables, simulated 90 and 95 percentage points and approximate 95% confidence intervals for the true percentage points are obtained. It is found that the X^2, $I(2/3)$, $BWHD(1/9)$ test statistics have very similar behavior and there seem to be applcable for small sample sizes than others.

Keywords: : Blended weight chi-squared statistics; blended weight Hellinger distance statistic; generalized likelihood ratio statistic; log-linear model; negative exponential disparity measure; pearson chi-square statistic; percentage point; power divergence statistics; simulation.

1) Professor, Department of Statistics, Sungkyunkwan University.
E-mail : cshong@skku.ac.kr

2) Associate Professor, Department of Information Statistics, Kangnung National University.
E-mail : dj@kangnung.ac.kr

3) Graduate Student, Department of Statistics, Sungkyunkwan University.
E-mail : park9457@hanmail.net