

## 무두께 요소층을 이용한 육면체 격자의 세분화 기법

박철현\* · 양동열\*\*

(2003년 5월 15일 접수)

### A New All-Hexahedral Refinement Technique by Automatic Expansion of Zero Thickness Element Layers

C. H. Park and D. Y. Yang

#### Abstract

This paper presents a new algorithm that enables the refinement of hexahedral elements while maintaining the appropriate connectivity. In the algorithm, at first the regions of mesh to be refined are defined and, then, the zero-thickness element layers are inserted into the interfaces between the regions. All the meshes in the regions, in which the zero-thickness layers are inserted, are to be regularized in order to improve the shape of the slender elements on the interfaces. This algorithm is applied to the analysis of plastic deformation process. The results show that the refined mesh gives smaller relative errors than the original mesh.

**Key Words** : Hexahedral Mesh, Zero-Thickness Element, Refinement, FEM

#### 1. 서론

유한요소 해석은 수학적 해를 구하기 어려운 복잡한 물리현상에 대한 수치적 근사해를 제공한다. 단조공정해석 역시 수학적 해를 구하기 어려운 동시에 대변형(large deformation)의 문제이므로, 유한요소 해석이 사용되고 해석 도중 격자의 변형에 의해 새로운 격자 구성과 유동 흐름의 많고 적음에 따라 격자 밀도 조절이 요구된다.

일반적으로 사면체 요소를 사용할 경우 3 차원 형상의 격자 구성 및 재구성, 격자 세분화 작업이 육면체 요소를 사용하는 것보다 용이하다고 알려져 있다.

그러나 육면체 요소가 해석의 정밀도가 우수하

고, 요소의 구조가 실제형상을 잘 표현한다는 이유 때문에 많은 연구자들은 사면체 요소보다 육면체 요소를 이용한 해석을 선호하고 있다.<sup>(1-2)</sup>

Owen의 격자 구성 기법에 대한 조사<sup>(3)</sup>에 의하면, 육면체 요소를 구성하는 방법을 Mapped meshing, Medial surface 방법, Plastering 방법, Whisker weaving 방법, Grid-based 방법으로 구분할 수 있다. 육면체 격자의 구성에서 격자의 유효성(validity)은 필수적으로 충족되어야 하며, 추가적으로, 계산의 경제성과 해석의 정밀도를 고려할 때, 최소의 격자 개수와 요구되는 정밀도에 부합하는 부분적인 격자 밀도 조절, 즉 격자 세분화 과정이 필요하다. 이와 관련된 연구로는 grid-based 방법으로 만들어진 육면체 격자의 외부에 무두께 요소

\* 한국과학기술원 기계공학과 대학원

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

(zero-thickness elements)를 삽입하여 표면의 격자품질(mesh quality)을 향상시키는 연구와<sup>(4-5)</sup> 몇 개의 격자 모듈을 이용하여 소재 유동에 적용하는 육면체 격자의 모듈화 격자 재구성 기법의 연구가 있었다.<sup>(6)</sup> 옥트리(oct-tree)방법을 이용한 육면체 격자의 세분화 기법의 제안이 있었으며<sup>(7)</sup>, cleave and fill 기법을 이용하여 스위핑(sweeping)방법으로 생성된 육면체 격자의 세분화 연구가 있었다.<sup>(8)</sup> 3차원 열간단조 공정에서 플래시 부분의 격자를 격사 압축법을 이용하여 세분화 하는 연구가 있었다.<sup>(9)</sup>

본 연구에서는 Zienkiewicz-Zhu의 오차 추정법<sup>(10)</sup> (error estimator)을 이용하여 요소의 크기를 결정하고, 세분화에 필요한 추가적인 요소는 무두께 요소층(zero-thickness element layer)을 삽입하여 보충하고, 이것의 결과로 격자 밀도를 조절할 수 있다. 무두께 요소는 표면 요소의 격자 품질을 향상시키기 위하여 도입되었으나 본 연구에서는 이 요소층을 격자의 표면이 아니라 세분화 될 영역과 나머지 영역 사이에 삽입하고 확장함으로써 격자 세분화를 수행하였다.

## 2. 알고리즘

### 2.1 용어 정의

#### ① 무두께 요소(Zero-thickness element, ZTE)

두께가 거의 0인 요소를 말한다. 그러나 이 요소는 두께가 없기 때문에 유한 요소 해석에는 부가당하여, 격자 세분화를 위해 삽입된 후 격자 유연화를 통해서 해석이 가능하도록 격자 품질을 개선시킨다.

#### ② 무두께 요소층(Zero-thickness element layer, ZTL)

위 무두께 요소가 모여서 하나의 면을 이루는 것으로 격자 세분화를 위해 실제로 삽입되는 요소들의 집합이다. 이 층의 개수에 따라서 세분화 정도가 좌우 된다. Fig. 1(b)가 이것을 나타낸다.

#### ③ 세분화 영역(Region subject to refinement, RSR)

격자 세분화는 전체 격자중 일부분의 격자 밀도를 증가 시키는 것이므로, Fig. 1(a)와 같이 격자 밀도가 증가될 영역을 말한다.

#### ④ 세분화 시작면(Frontal surface of refinement, FSR)

Fig. 1(c)와 같이 격자가 세분화 될 영역과 그렇지 않은 영역을 구분하는 면으로, 이 면을 따라서 무두께 요소층이 삽입된다. 이 면은 격자 세분화 정도에 따라 그 수와 위치가 달라질 수 있다.

### 2.2 세분화 영역(RSR)의 선택

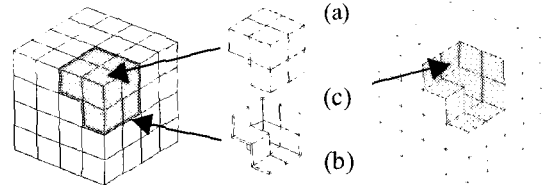


Fig. 1 (a) Region subject to refinement, (b) Zero-thickness element layer, (c) Frontal surface of refinement

격자 세분화를 위해서 세분화 영역을 선택하는 기준은 여러 가지가 있으나, 본 연구에서는 Zienkiewicz-Zhu의 에너지 오차를 현재 격자에서 계산하고, 이 오차와 허용 오차의 비를 이용하여 새 요소의 한 변의 길이와 현재 요소의 길이를 구한다. 이렇게 계산된 요소길이의 비가 기준값 이하일 경우 해당하는 요소를 세분화 영역으로 선택한다.

요소의 해석 오차를 에너지 놈(energy norm)의 형태로 나타내면 다음식과 같고

$$\|e_i\|^2 = \int_{\Omega_i} (\sigma_h - \sigma^*)^T (\dot{\epsilon}_h - \dot{\epsilon}^*) d\Omega_i \quad (1)$$

여기서  $e_i$ 는  $i$ 번째 요소의 오차를 나타내고,  $\sigma_h$ 와  $\dot{\epsilon}_h$  유한 요소 해석에 의한 결과이고,  $\sigma^*$ 와  $\dot{\epsilon}^*$ 는 개선된 해(improved solution)이다. 실제 계산에서는 오차의 절대 값보다는 상대값을 사용하는 것이 쉽기 때문에 요소의 상대 오차를 정의하고 이를 이용한다. 식(2)에서  $\|u_h\|$ 와  $\|e\|$ 는 각각 현재 격자의 전체 에너지와 전체 오차를 나타낸다.

$$\eta_i = \left( \frac{\|e_i\|^2}{\|u_h\|^2 + \|e\|^2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

현재 요소의 상대 오차( $\eta_i$ )와 요소에 허용되는 허용 상대 오차( $\eta_i^*$ )와의 비를 이용해서 현재 요소의 한 변의 길이와 새 요소의 한 변의 길이의 비를 나타내면 식(3)과 같다.<sup>(11)</sup> 여기서  $K$ 는 요소의 형상 함수의 차수와 미분 차수에 따라 정해지는 정수이다.

$$\zeta_i = \frac{h_{new}}{h_{old}} = \left( \frac{\eta_i}{\eta_i^*} \right)^{1/K} \quad (3)$$

위 식을 이용해 각 요소에 대해서  $\zeta_i$  를 계산한다. 이 값이 한계 요소 크기비( $\zeta_c$ ) 이하인 경우 그 요소를 RSR 에 포함 시킨다. RSR 을  $\Omega_r$  이라고 하고 격자의 요소를  $E_i$  라고 하면, RSR 은 아래 식(4)와 같이 표현된다.

$$\Omega_r = \{E_i | \zeta_i < \zeta_c\} \quad (4)$$

격자 세분화 영역이 선택되고 나면, 이 영역과 나머지 영역의 경계를 이루는 요소의 면을 추출하여 FSR 을 만든다.

### 2.3 무두께 요소층(ZTL)의 삽입

현재 요소의 상대 오차와 허용 한계 오차를 이용하여 새 요소의 크기를 구하고 RSR 을 선택한 후, 이 RSR 과 나머지 요소와의 경계면인 FSR 을 추출해 낸다. 하나의 두무께 요소층에 의해서 삽입되는 요소의 개수는 FSR 을 이루는 요소면의 개수( $N_f$ )와 같다. 따라서 RSR 에 추가될 요소의 수를  $M^*$  라고 하면, ZTL 의 개수  $N_l$  은 식(5)와 같이,  $M^*$  를  $N_f$  로 나눈 값을 넘지 않는 최대 정수로 정의 한다.

$$N_l = \left\lfloor \frac{M^*}{N_f} \right\rfloor \quad (5)$$

여기서  $\lfloor x \rfloor$  는  $x$  를 넘지 않는 최대 정수를 말한다. 삽입될 ZTL 의 개수를 구하고 나면, Fig. 1(b)와 같은 ZTL 을 FSR 을 따라 삽입한다.

### 2.4 무두께 요소층(ZTL)의 확장

이렇게 삽입된 요소는 두께가 없기 때문에 요소의 Jacobian 값이 0 이고 유한 요소 해석이 불가능하다. 따라서 삽입된 요소가 두께를 가지도록 확장하는 과정이 필요하다. 확장을 하는 여러 방법이 있으나 여기서는 간단한 Laplacian 격자 유연화를 사용하였다. 이 유연화 과정을 전체 요소에 사용하는 것이 아니라, 삽입된 무두께 요소와 RSR 내에 있던 요소에 대해서 부분적으로 수행한다.

## 3. 격자 세분화

### 3.1 ZTL 을 이용한 격자 밀도 조절

위의 장에서는 현재 격자의 오차 해석을 통하여 새로운 격자의 요소 크기를 구하고, 세분화에 필요한 요소를 추가 하기 위한 ZTL 의 개수를 구하는 식을 정의 하였다. 여기서는 세분화에 의해 격자의 밀도가 증가 되어 할 경우, 이 밀도 증가에 따라 세분화 영역(RSR)에 추가 되어야 할 요소의 개수( $M^*$ )와 ZTL 의 개수( $N_l$ )를 구하여 세분화 한 후의 격자 밀도를 비교해 보도록 한다.

RSR 에 포함된 요소의 개수를  $M_o$  이라 하고, 세분화 후 RSR 에 포함된 최종 요소의 수를  $M'$  이라고 하면 식(6)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} M' &= \int_{\Omega_r} \delta_{new} dV \\ &= \sum_{i=1}^{M_o} \delta_{new}^i V_e^i = \sum_{i=1}^{M_o} \delta_{new}^i / \delta_{cur}^i \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\delta_{new}^i$  와  $\delta_{cur}^i$  는 각각 오차 계산에 의한 새로운 격자 밀도와 이전의 격자 밀도를 나타낸다. 위 식을 이용하여  $M^*$  를 구하면 식(7)과 같다

$$\begin{aligned} M^* &= M' - M_o \\ &= \sum_{i=1}^{M_o} \left( \frac{\delta_{new}^i}{\delta_{cur}^i} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

이전 격자와 새 격자의 밀도 비는 식(3)에서 정의한 요소 길이비( $\zeta_i$ )를 이용하여 구할 수 있다. 본 연구에서는 3 차원의 육면체 요소를 사용하므로, 격자의 밀도비는 요소의 길이비 세제곱의 역수를 사용하였다.

다음은 간단한 L 자 형상 육면체 격자의 안쪽 모서리 부분의 격자 밀도를 조절하는 예이다. Fig. 2 는 격자 세분화 이전의 격자 밀도 분포와 세분화될 영역  $\Omega_r$  을 나타내고 있다.

이 영역의 격자 밀도를 이전의 격자 밀도에 비해 4 배로 증가시키려고 하면,  $M_o$  는 4 이므로 식(7)에 의해  $M^*$  는 12 이가 되고,  $N_f$  는 8 이므로 식(5)에 의해서, 삽입되는 ZTL 의 개수  $N_l$  은 1 이 된다.

Fig. 3 은 세분화된 격자와 형태와 이 때의 격자 밀도 분포를 나타낸다. Fig. 2 에 비해서 안쪽 모서리 부분의 격자 밀도가 가장 높고 나머지 부분으로 갈수록 격자 밀도가 낮아 지는 것을 알

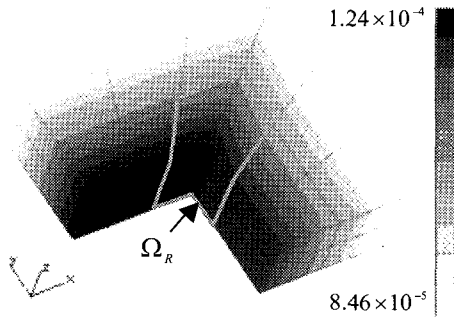


Fig. 2 Mesh density distribution and selected RSR for a L-shape geometry

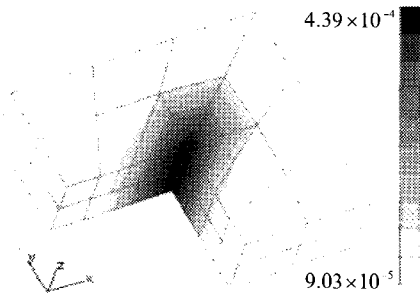


Fig. 3 Mesh density distribution after mesh refinement

수 있다. Fig. 2와 Fig. 3의 격자 밀도를 비교하면, 격자 세분화 이전의  $\Omega_R$ 에 속한 요소의 격자 밀도는  $1.24 \times 10^{-4}$  이었고, 격자 세분화 이후에는  $4.39 \times 10^{-4}$ 으로 약 3.5 배의 격자 밀도 증가 효과를 얻은 것을 알 수 있다. 같은 방식으로 비교적 복잡한 형상을 가지는 베벨기어 성형 과정에서 격자 세분화를 수행 하였다. 기어의 대칭적인 특성상 전체 형상의 1/22 만을 해석하였다.

해석에 사용된 소재는 SCM420H, 유동 응력식은  $\sigma = 92.9 \bar{\epsilon}^{0.131} \text{ kgf/mm}^2$  을 사용하였다. Fig. 4(a)는 전체 공정 중 90% 성형이 이루어진 상태이고 격자 세분화 이전의 격자이다. 현재 단계에서는 이 끝원추면(root cone surface)과 치면을 생성하는 부분에 변형이 집중되고 있으므로, Fig. 4(b)와 같이 치면을 포함한 부분 격자 세분화 영역으로 선택 하였다. 이 영역의 격자 밀도를 6 배로 증가 시키기 위해서 몇 개의 ZTL이 필요한지 식(5)와 식(7)을 이용하여 계산 하였다. 이 계산을 통하여 3 개의 ZTL이 삽입되었고, 그 결과는 Fig. 5와 같다. Fig. 5(a)는 1 개의 ZTL이 삽입된 격자를 나타내고 있고, (b)는 3 개의 ZTL이 삽입된 후의 격자를 나타내고 있다. 1 개의 ZTL에 의해서 242 개의 새로

운 요소가 추가 되었고, 3 개의 ZTL 삽입 후에는 모두 726 개의 요소가 추가 되었다.

### 3.2 인덴테이션(Indentation)

ZTL 이용한 격자 세분화 방법을 인덴테이션 해석에 적용하였다. Fig. 6는 해석 모델의 개략도이고 해석은 강소성 유한 요소법을 사용하였으며 대칭을 고려하여 전체 형상의 1/8 만 해석 하였다. 소재는 S45C, 유동응력식은  $\bar{\sigma} = 97.2 \bar{\epsilon}^{0.14} \text{ kgf/mm}^2$  을 사용하였다. 초기 격자(MESH1)는 임의의 크기의 격자를 사용하였고, 0.5mm 압하 후, 격자 세분화를 수행하였다. 전체 요소의 허용 상대 오차가

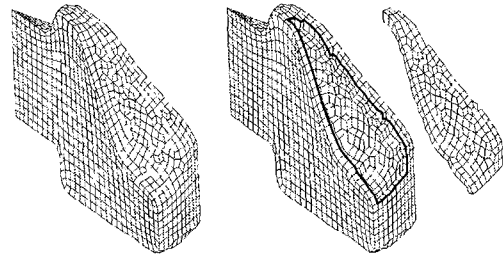


Fig. 4 (a) Initial mesh of bevel gear (b) region subjected to refinement

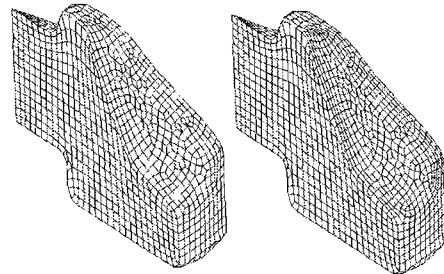


Fig. 5 Resulting meshes (a) inserted one layer (b) inserted three layers

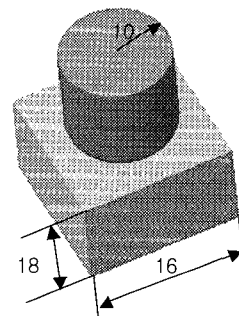


Fig. 6 Schematic model of indentation process

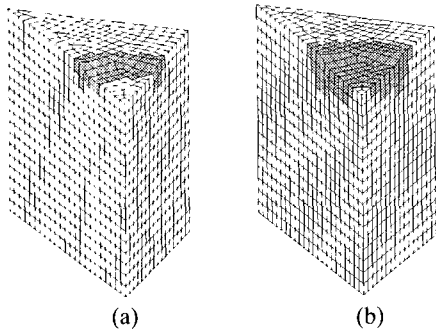


Fig. 7 Region subject to refinement (a) for MESH2 (b) for MESH3

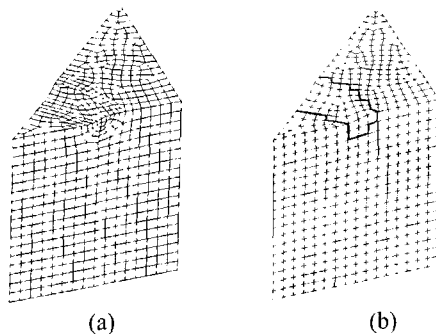


Fig. 8 MESH2 (a) mesh before expansion (b) final mesh after expansion

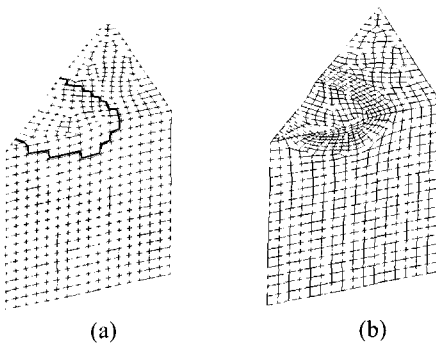


Fig. 9 MESH3 (a) mesh before expansion (b) Final mesh after expansion

0.5% (MESH2), 0.3% (MESH3) 두 가지 경우에 대해 각각 격자 세분화를 하고 그 결과를 비교하였다. 세분화 영역을 선택하기 위해서 한계 요소 크기비( $\zeta_c$ )는 0.6 을 사용하였다.

Fig. 7 은 현재 격자에서 허용 상대 오차에 따라 선택된 영역을 나타내고 있다. 펀치의 반경에 의해 성형 되는 부분에서 유동이 집중되므로, 이부분이 상대 오차가 다른 곳에 비해 비교적 크게 나타나고, 따라서 이 부분을 중심으로 영역이 선

택된다. 허용 한계오차 값이 낮을수록 더 많은 요소가 선택되었다. Fig. 7(b)

Fig. 8 은 MESH2 를 구성하는 과정을 나타낸 것이다. 초기 격자의 FSR 에 3 개의 ZTL 이 삽입이 되고, 격자 유연화를 통해 두께가 없던 요소가 확장되어 영역을 세분화 한다. 3 개의 요소층이 삽입되어 222 개의 새로운 요소가 추가 되었다. Fig. 9 은 MESH3 의 경우를 나타내고 있다. 이 경우에는 6 개의 요소층이 추가 되었고, 요소는 1588 개가 추가 되었다.

Fig. 10 은 각각의 격자를 이용하여 해석을 수행 했을 때의 전체 상대 오차값을 각 성형 단계에 따라 그래프로 나타낸 것이다. 세분화를 수행하지 않은 격자를 사용했을 때는 0.75mm 에서 2.72%의 오차가 발생하였고, MESH2 에서는 1.96%, MESH3 에서는 1.40%의 오차가 발생하였다. 초기에 제시한 원하는 상대 오차와는 차이가 있지만, 격자 세분화에 의해 해석 오차가 감소하는 것을 확인 할 수 있다. 요구된 오차와의 차이는 영역의 선택방법, 면의 개수, 격자의 확장방법에 따라서 조절 할 수 있을 것으로 예상된다.

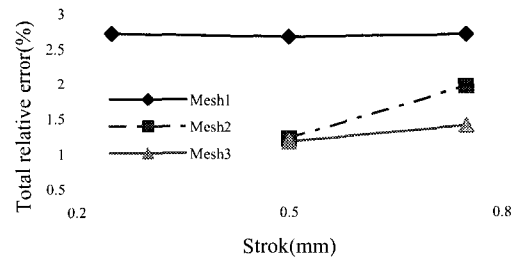


Fig. 10 Comparison of total relative errors

#### 4. 결 론

본 연구에서는 육면체 요소 격자의 일반적인 격자 세분화 기법을 제시하였다. 유한요소 해석에서 발생하는 상대 오차를 계산하고, 이 오차를 원하는 수준으로 낮출 수 있는 새로운 요소 크기를 계산하였다. 계산된 새 요소 크기와 현재 요소 크기의 비를 이용하여 세분화될 영역을 선택하고, 선택된 영역의 경계면에 무두께 요소층(ZTL)을 삽입하여, 확장함으로써 선택된 영역의 격자 밀도를 증가 시켜 격자 세분화를 수행하였다.

예제를 통해서 요구되는 격자 밀도 증가량이 대한 ZTL 의 개수를 구하여 세분화를 수행하였으며, 세분화된 격자의 밀도가 요구한 격자 밀도와

간접하게 증가 하는 것을 확인 하였다. 오차 계산에 의하여 요구되는 상대 오차 값에 따라서 격자의 세분화 정도를 조절 할 수 있었고, 세분화된 격자로 다시 해석을 수행하여 상대오차를 낮출 수 있었다.

향후에는 요구되는 격자 밀도에 따라 하나 이상의 RSR 과 FSR 을 사용하여 복잡한 예제의 격자 세분화 방법을 구현도록 한다.

### 참 고 문 헌

- (1) Tautges, T. J., 2000, "The Generation of Hexahedral Meshes for Assembly Geometry : Survey and Progress", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 2617~2642.
- (2) Cifuentes, A. O. and Kalbag, A., 1992, "A Performance Study of Tetrahedral and Hexahedral Elements in 3-D Finite Element Structural Analysis", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 12, pp. 313~318.
- (3) Owen, S. J., 1998, "A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology", 7th International Meshing Roundtable.
- (4) Lee, Y. K. and Yang, D. Y., 2000, "A Grid-based Approach to Non-regular Mesh Generation for Automatic Remeshing with Metal Forming Analysis", *Commun. Num. Meth. Eng.*, Vol. 16, pp. 625~635.
- (5) Lee, Y. K. and Yang, D. Y., 1999, "Development of a Grid-Based Mesh Generation Technique and Its Application to Remeshing during The Finite Element Simulation", *Engineering Computations*, Vol. 16, No. 3, pp. 16~336.
- (6) Yang, D. Y., Lee, N. K., Yoon, J. H., Chenot, J. L. and Soyris, N., 1991, "A Three Dimensional Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Spur Gear Forging Using the Modular Remeshing Technique", *Instn. Mech. Engrs. Part B : J. of Engng. Manufacture*, Vol. 205, pp. 111~121.
- (7) Schneiders, R., Schindler, R. and Weiler, F., 1996, "Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes", 5th International Meshing Roundtable, pp. 205~215.
- (8) Borden, M., Benzley, S., Mitchell, S. A., White, D. R. and Meyers, R., 2000, "The Cleave and Fill Tool : An All-Hexahedral Refinement Algorithm for Swept Meshes", 9th International Meshing Roundtable.
- (9) 홍진태, 양동열, 이석렬, 2002, "격자압축법을 이용한 3 차원 열간단조공정해석", *한국소성가공학회지*, 11 권, 2 호, pp. 179~186.
- (10) Zienkiewicz O. C. and Zhu, J. Z., 1987, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Numer. Methods eng.*, Vol. 24, pp. 337~357.
- (11) Li, L. Y. and Bettess, P., 1995, "Notes on Mesh Optimal Criteria in Adaptive Finite Element Computations", *Commun. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 911~915.