

비선형 신호의 위상도 재구성 방법

신기홍*

(안동대학교 기계공학부)

1. 머리말

비선형(특히 카오스) 시스템의 해석에 있어서 위상공간(phase space)은 매우 중요한 역할을 한다. 즉 위상도(phase portrait) 차원 및 발산지수(lyapunov exponents) 등과 같은 시스템의 중요한 정보들을 추출할 수 있다. 그러나, 실제 공학적 문제에서는 위상공간을 나타내기 위한 모든 상태 변수들을 측정하기 어려우며 하나의 신호(상태 변수)만 측정이 가능한 경우가 많다. 이 경우, 측정된 1차원 신호로부터 원래 시스템과 질적으로(qualitative) 유사한 위상도를 재구성(reconstruction) 해야만 한다. 시간 미분을 통한 위상도 재구성법이 Packard 등에 의해서 처음 제안되었으며,⁽¹⁾ 현재 가장 많이 사용되고 있는 방법으로서 Ruelle가 제안하고 Takens가 증명한 시간 지연(time delay)을 이용한 방법이다.⁽²⁾ 이는 '지연법(method of delays)'로 많이 알려져 있으며, Whitney의 매립이론(embedding theorem)에 의해 이론적으로는 어떠한 지연시간(delay time)을 사용해도 위상도를 재구성 할 수 있다.⁽³⁾ 그러나 실제 공학적인 문제에서는 가능한 실제 시스템의 차원(dimension)과 유사한 매립차원(embedding dimension)을 구하는 것과 적절한 지연시간(delay

time)을 구하는 것이 매우 중요하다. 또 다른 방법으로서는 SVD(singular value decomposition)을 이용하여 위상도를 재 구성 할 수 있다. 본 연구에서는 이 두가지 방법을 비교 분석하여, 공학적인 측면에서 어떠한 방법이 더 효과적인가에 대한 고찰이 이루어졌다.

2. 지연법(Method of Delays)

Takens는 지연좌표(delay coordinates)를 이용하여 'n'차원의 의사 위상공간(pseudo phase space)상에서 위상도를 재 구성할 수 있음을 증명하였다.⁽²⁾ 즉, 1차원 시계열 신호, $v(t)$ 로부터 임의의 지연시간(T)을 이용하여 재 구성된 위상도는 다음과 같은 'n'차원의 벡터로 나타낼 수 있다.

$$x(t) = v(t), v(t+T), \dots, v(t+(n-1)T) \quad (1)$$

여기서, ' $n \geq 2m+1$ '이며, ' m '은 원래 시스템의 '위상도의 차원'이다. 이 위상도의 차원은 위상공간의 차원과 다르며 시스템의 해에 따라서 위상도가 달라지므로 위상도의 차원도 달라질 수 있다. 이러한 매립이론은 잡음이 전혀 없고 무한히 긴 신호라는 가정에 의하여 증명되었다. 그러나, 실제 공학적인 문제에서는 잡음 성분이 포함된 한정된 길이의 신호를 다루며, 또한 경우에 따라서 위상도의 차원은 이론적인 'n'차원보다 작은 차원에

* E-mail : kshin@andong.ac.kr

매립될 수 있다. 예로써, 원은 매립이론에서 요구되는 3차원보다 작은 2차원 공간에 매립되어진다. 따라서, 실제 공학적인 측면에서는 최적 지연시간과 최소 매립차원의 파악이 매우 중요하다.

2.1 최적 지연시간 선정

본 절에서는 예제를 통하여 Takens의 지연법이 어떻게 사용되는지 설명하고, 이론적으로는 중요하지 않은 지연시간이 실제에는 매우 중요함을 보여준다. 먼저, 다음과 같이 1차 연립 미분방정식으로 표현되는 1자유도 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x \end{aligned} \tag{2}$$

초기조건이 모두 '0'인 경우 위 시스템의 해는

$$x = \sin(\omega t), \quad y = \omega \cos(\omega t) \tag{3}$$

이고, 따라서 위상도는 x축과 y축으로 구성된 2차원 공간에 매립되어 질 수 있으며 타원의 모양을 나타낸다. 즉

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\omega^2} = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \tag{4}$$

이 된다. 따라서, 위상도를 그리기 위해서는 상태변수 x와 y가 모두 필요하지만 만약 x만 측정할 수 있는 경우에, 임의의 지연시간 T를 사용한 지연법을 이용하여 위상도를 재 구성할 수 있다. 이 경우 의사 위상공간(pseudo phase space)을 나타내는 상태변수는 다음과 같다.

$$x = \sin(\omega t), \quad y = \sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

여기서 $\phi = \omega T$ 이고, 임의의 각도 α 를 이용한 좌표 변환을 할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} x_r &= x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) \\ y_r &= y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{6}$$

따라서, 식 (5)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} x_r &= \sin(\omega t) \cos(\alpha) + \sin(\omega t + \phi) \sin(\alpha) \\ y_r &= \sin(\omega t + \phi) \cos(\alpha) - \sin(\omega t) \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, 편의상 $\alpha = \pi/4$ 로 두면 위 식은

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2 \sin\left(\frac{2\omega t + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \\ y_r &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2 \cos\left(\frac{2\omega t + \phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \end{aligned} \tag{8}$$

이 되며, x_r, y_r 좌표상에서 표현되는 의사 위상도는 다음과 같은 타원 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{x_r^2}{\left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^2} + \frac{y_r^2}{\left[\sqrt{2} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^2} = 1 \tag{9}$$

이 경우, 지연시간(T)는 ϕ 에 내재되어있으며, 만약 $\omega = \tan(\phi/2)$ 가 된다면 지연법에 의해서 위상도는 완벽하게 재구성 되어 질 수 있음을 나타낸다. 그러나, 이는 이상적인 경우이며, 실제 공학적인 경우에는 지연시간, 즉 ϕ 에 따라서 타원의 모양이 매우 달라질 수 있다. 극단적인 경우로 $\phi/2 = n\pi$ 인 경우에 위상도는 직선 모양으로 나타나게 된다. 이러한 극단적인 경우가 아니더라도, $\phi/2$ 가 $n\pi$ 에 가깝고 잡음이 많이 섞인 경우에는 직선과 구분할 수 없게 된다. 결과적으로 지연법을 성공적으로 적용시키기 위해서는 지연시간의 선정이 매우 중요하다고 할 수 있다.

지연시간을 선정함에 있어서 다음과 같은 세가지 사항을 고려해야 한다. 첫째로, 'T'가 매우

작은 경우 재구성된 위상도는 의사 위상공간상에서 대각선 방향으로 직선에 가깝게 나타난다. 둘째로, 'T'가 매우 큰 경우 특히 카오스 시스템에서 발생된 잡음이 많이 섞인 신호일 경우 재구성된 위상도는 구조를 상실하여 랜덤 데이터와 비슷하게 될 수도 있다. 이 두가지 경우에 대해서 다음과 같이 나타내어 지는 Duffing equation을 이용한 예를 그림1(b)와 그림1(d)에 각각 나타내었다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.4x_2 + x_1(1-x_1^2) + 0.4\cos t \end{aligned} \quad (10)$$

세번째로, 'T'가 신호의 주기성분과 일치하게 될 경우 재구성된 위상도는 원래의 위상도와는 전혀

다르게 된다. 이상의 여러 경우들을 고려하고, 적절한 지연시간을 이용하여 재구성된 위상도를 그림 1(c)에 나타내었으며 이는 원래의 위상도(그림 1(a))와 매우 유사함을 알 수 있다. 위의 예로부터 실제의 경우 지연시간은 매우 중요함을 알 수 있다

식 (2)의 경우 두 변수(x, y)는 서로 직교함을 알 수 있다. 즉, 선형적으로 독립적이며 두 변수의 교차상관(cross-correlation) 계수는 '0'이 된다. 따라서, 식 (5)에서 두변수의 교차상관계수가 '0'이 되도록 지연시간을 결정하는 방법을 생각할 수 있다. 이러한 방법은 매우 광범위하게 사용되고 있으나, 시스템에 따라서 주의를 요하고 있다. 가장 많이 사용하고 있는 방법으로써, Fraser 등은 지

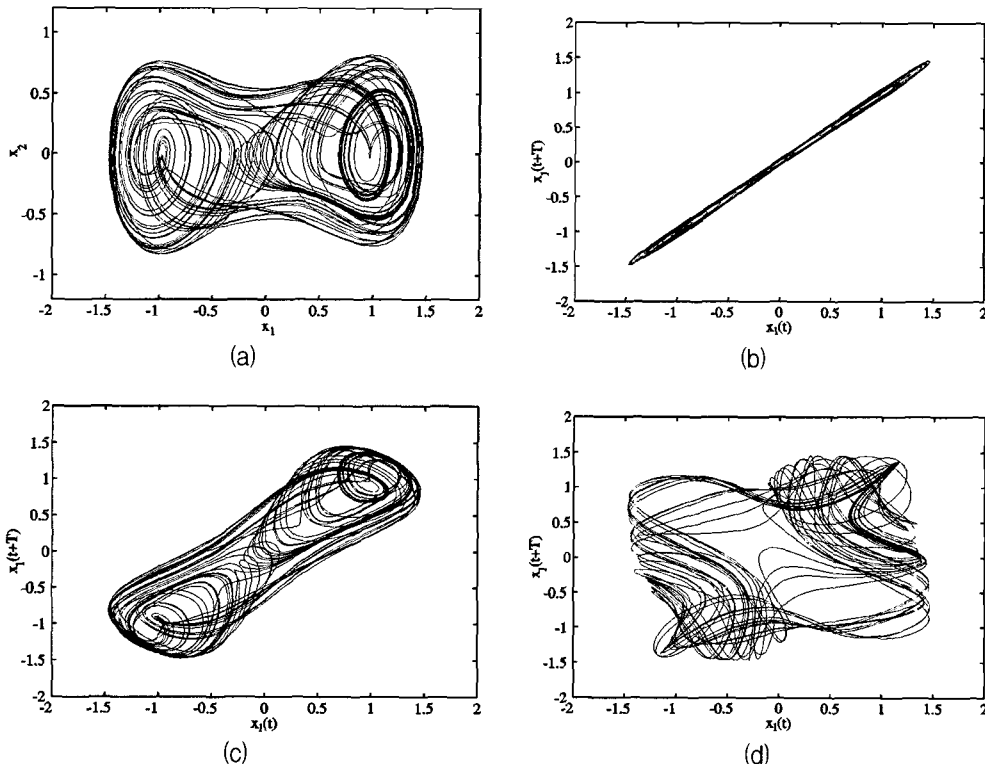


그림 1 재구성된 위상도(x1(t), x1(t+T)) (a) 원래의 위상도(x1, x2), (b) T = 0.1 sec, (c) T = 1.2 sec, (d) T = 4.0 sec

연좌표들이 서로 독립이 되도록 지연시간을 정하는 방법을 제안하고 있다.⁽⁵⁾ 예를들면, $x(t)$ 와 $x(t+T)$ 로 구성되는 2차원 위상공간의 경우 $x(t)$ 의 자기상관(auto-correlation)값이 첫번째 '0'을 지나는 지연시간 'T'를 선택할 수 있다. 그러나, 자기상관계수는 일반적인 독립성(general independency)을 나타내지는 못하므로 상호정보(mutual information)의 첫번째 국소값(local minimum)을 가지는 'T'로 선택하는 것을 제안하고 있다. 두 변수의 상호정보는 다음과 같이 정의된다.

$$I(S, Q) = H(Q) + H(S) - H(S, Q) \quad (11)$$

여기서, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ 이고, 각각에 대한 확률은 $\{P_s(s_1), P_s(s_2), \dots, P_s(s_N)\}$, $\{P_q(q_1), P_q(q_2), \dots, P_q(q_N)\}$ 이다. 또한, $H(S)$ 와 $H(Q)$ 는 S 와 Q 에 대한 엔트로피를 나타낸다. 즉,

$$H(S) = -\sum_{i=1}^N P_s(s_i) \log_2 P_s(s_i) \quad (12)$$

이고, $H(S, Q)$ 는 결합엔트로피(joint entropy) 함수를 나타내고 있다.

$$H(S, Q) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M P_{sq}(s_i, q_j) \log_2 P_{sq}(s_i, q_j) \quad (13)$$

따라서, 두 변수가 완전히 독립적인 경우 $I(S, Q) = 0$, $H(S, Q) = H(S) + H(Q)$ 이며, 두 변수가 일치할 경우에는 $I(S, Q) = H(S) = H(Q) = H(S, Q)$ 가 된다. 이 방법은 현재 많은 경우에 사용되고 있으나, 본 저자는 다음과 같은 이유로 다른 견해가 있다.

위 방법을 적용함에 있어서 '시스템의 상태변수들이 과연 독립적인가'라는 의문을 제기할 수 있기 때문이다. 임의의 두 랜덤변수 $x(t)$, $y(t)$ 가 독립이 되기 위해서는 $P(x, y) = P(x)P(y)$ 가 되어야 한다. 여기서 $P(x)$, $P(y)$, $P(x, y)$ 는 각각 확률밀도

함수와 결합 확률밀도함수를 의미한다. 식 (10)과 같은 비선형 시스템에서 상태변수들은 서로 독립적이지 못함을 쉽게 알 수 있다. 또한 식 (2)와 같은 선형 시스템의 경우에도 상태변수들은 직교성은 가지지만, 전체 시스템의 관점에서 보면 서로 독립적이지 않다. 예를 들면, 식 (2)의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= \frac{y(0)}{\omega} \sin(\omega t) + x(0) \cos(\omega t) \\ y &= y(0) \cos(\omega t) - x(0) \omega \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (14)$$

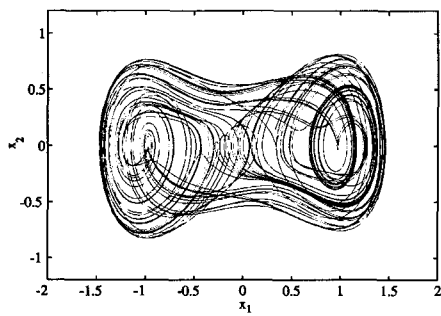
이 식에서, 변수 x 는 초기조건 $y(0)$ 에 영향을 받고, y 는 $x(0)$ 의 영향을 받는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 두 변수들은 비록 서로 직교성을 가지지만 완전히 독립적이지는 못함을 나타낸다. 특히 비선형 시스템의 경우 일반적으로 상태 변수들간의 상호작용은 더욱 더 복잡하게 나타난다. 따라서, 본 저자는 Fraser가 제안한 상호정보를 이용한 방법을 랜덤신호를 다루는 통계학 분야가 아닌 실질적인 공학적인 문제에 적용하는 데 약간의 의문을 제기하며, 다음의 예제를 통하여 상호정보를 이용한 최적 지연시간 선정이 실패할 수 있음을 보여준다. 식 (10)의 Duffing equation과 다음의 Lorenz equation에 대한 원래의 위상도를 그림 2(a)와 2(b)에 각각 나타내었다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 16(y-x), & \frac{dy}{dt} &= x(45.92-z), \\ \frac{dz}{dt} &= xy-4z \end{aligned} \quad (15)$$

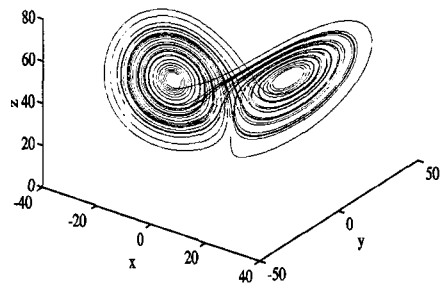
또한, Fraser가 제안한 algorithm(5)에 의하여 계산된 상호정보를 그림 2(c)와 2(d)에 각각 나타내었다. 이 그림들로부터 최적 지연시간(T)은 각각 5.4 sec(Duffing equation)와 0.09 sec(Lorenz equation)임을 알 수 있고, 이를 이용하여 재구성된 위상도를 그림 2(e)와 2(f)에 각각

나타내었다. 그림에서 상호정보를 이용하여 구한 최적지연시간은 항상 잘 맞는 것은 아님을 알 수 있다. 예로써, Duffing equation의 경우 재구성된 위상도는 원래의 위상도의 구조가 완전히 사라져 찾아볼 수가 없다. 이렇게 재구성된 위상도는 비

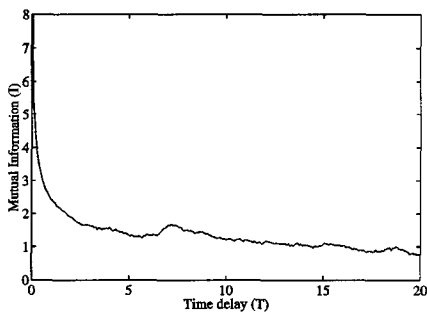
록 위상 수학적인 면에서는 원래의 위상도의 구조와 같다고 볼 수 있으나, 잡음이 많이 섞인 상태와 위상도로부터 중요한 정보들을 추출할 수 있어야 하는 공학적인 측면에서는 다소 문제가 있음을 알 수 있다.



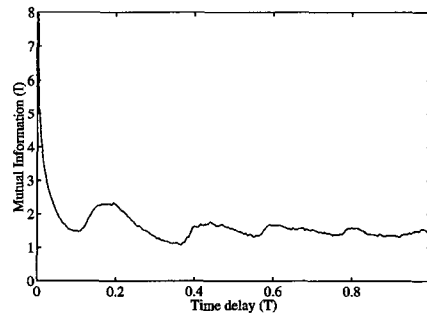
(a)



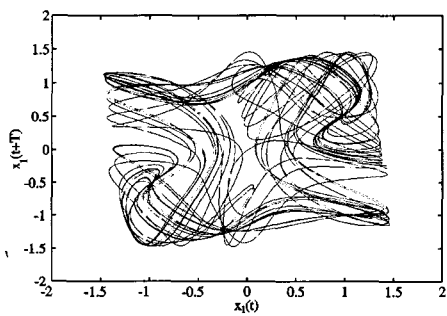
(b)



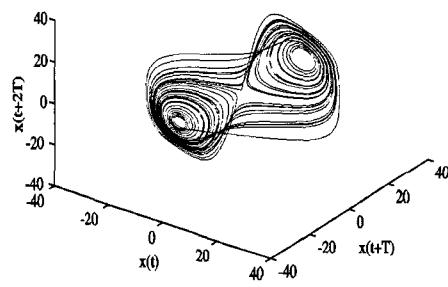
(c)



(d)



(e)



(f)

그림 2(a) 원래의 위상도(Duffing equation), (b) 원래의 위상도(Lorenz equation), (c) 상호정보(Duffing equation), (d) 상호정보(Lorenz equation), (e) 재구성된 위상도(Duffing equation), (f) 재구성된 위상도(Lorenz equation)

2.2 최소 매립차원(Embedding Dimension) 선정
 원래의 위상도 차원(m)을 모르는 경우 매립차원(n)을 매우 크게 설정하여 위상도를 재구성할 수 있다. 그러나 $n > m$ 의 경우, 재구성된 위상도로부터 추출된 여러 정보들은 실제와는 크게 다를 수 있다. 예를 들면, n 차원의 재구성된 위상도에서 구한 발산지수는 ' nm '개의 가상의 발산지수를 포함하게 된다.⁽⁶⁾ 따라서, 원래의 위상공간 차원에 매우 가까운 최소 매립차원을 구하는 것은 매우 중요하다. 가장 많이 사용하고 있는 방법으로 상관차원(correlation dimension, DC)를 이용하는 것이 있다. 의사위상도의 차원을 1차원에서부터 점차 크게 확장함에 따라서 DC 값의 변화가 더 이상 일어나지 않는 최소 차원을 매립차원으로 사용한다.⁽⁷⁾ 그 외에 기하학적인 고려를 한 여러 다른 방법들이 있다.⁽⁸⁻¹⁰⁾ 특히 Liebert 등은 위상도의 기하학적인 현상들을 고려하여 최소매립차원과 최적 지연시간을 동시에 구하는 방법을 제안하였으며,⁽⁸⁾ 여러 다른 방법들과 마찬가지로 위상도의 기하학적인 모양에 바탕을 두고 있기 때문에 비교적 적용함에 있어서 문제점은 없으나 상당히 긴 계산 시간을 요구하고 있다.

3. SVD(Singular Value Decomposition)

Broomhead 등은 위상도를 재구성하는 데 SVD(Singular Value Decomposition)를 사용하는 방법을 제안하였다.^(11, 12) 이 방법은 위상도를 재구성하는 것 외에도 잡음을 줄이는 역할도 동시에 한다. 본 절에서는 앞 절에서와 같은 예를 사용하여, SVD를 이용한 방법이 훨씬 더 간편하게 사용되어 질 수 있음을 나타내고자 한다. SVD를 이용한 방법 역시 Takens의 매립 이론에 그 기초를 두고 있으며 기본적인 이론은 다음과 같다.

추정된 시계열 데이터, $\{v_i | i = 1, 2, \dots, N_T\}$ 로부터 벡터, $\{x_i \in \mathcal{R}^n | i = 1, 2, \dots, N\}$ 를 구성하여 n

매립차원을 가지는 다음과 같은 궤적행렬(X , trajectory matrix)을 구성할 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ v_2 & v_3 & & v_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_N & v_{N+1} & \dots & v_{N+n-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, $N = N_T(n-1)$ 이다. 이 궤적행렬은 그 자체가 n 의 매립차원을 가지고 지연시간이 샘플링 간격적인 의사 위상도가 된다. 이 행렬에 대해서 SVD를 하면,

$$X = S \Sigma C^T \quad (17)$$

가 되며, 여기서 S 는 XX^T 의 $N \times n$ 고유벡터 행렬, C 는 $X^T X$ 의 $n \times n$ 고유벡터 행렬, Σ 는 고유치(singular value) ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$)를 가진 $n \times n$ 대각행렬이다. 위식을 다시 정렬하면 다음과 같다.

$$XC = S \Sigma \quad (18)$$

따라서, 행렬 XC 는 궤적행렬 X 를 기저(basis) 행렬 C 에 투영된 것으로 해석할 수 있으며, 이때 C 의 각 열은 투영된 궤적의 방향을 나타내고 σ_i 는 그 크기를 나타낸다. 여기서 '0'이 아닌 σ_i 의 갯수, ' $n' \leq n$ '이 $\text{Rank}(S) = \text{Rank}(C)$ 가 되며, n 는 최소 매립차원과 같은 물리적 의미를 가지게 된다. 또한 행렬 XC 의 각 열은 서로 선형적으로 독립적이다. 만약 잡음 성분이 존재할 경우 모든 σ_i 는 '0'이 아니며, 백색잡음이라고 가정할 경우 σ_i 는 전체적으로 일정한 값만큼 커지게 된다. 따라서, 잡음성분과 신호성분의 구분이 명확하게 구분되어 질 수 있다. 즉 잡음이 섞인 데이터의 경우에도 적용하기 쉽기 때문에 2절에서 언급한 방법보다 공학적인 측면에서 더 유용하다고 볼 수 있다.

그림 3(a)에 Duffing equation의 위상도를 나타내었으며, 그림 3(b)는 여러 경우의 매립차원 (n)에 대한 정규화된 σ_i 즉, $\sigma_i/\text{trace}(\Sigma)$ 를 나타내었다. 또한, 이 그림에서 최소 매립차원은 '3'이 될 수 있음을 알 수 있고, 행렬 XC 를 이용하여 재구성된 위상도를 그림 3(c)에 나타내었으며 XC 의 각 열의 크기를 '1'로 정규화한 다음 재구성된 위상도를 그림 3(d)에 나타내었다. 이 그림들에서 SVD를 이용하여 2절에서 나타낸 방법보다 간편하게 위상도를 재구성할 수 있음을 알 수 있다.

Broomhead등은 그림 3(c)의 경우와 같이 행렬 XC 를 정규화하지 않고 사용하였다. 그러나, 본 저자는 행렬 S 또는 정규화된 XC 를 사용할 것을 제안한다. 그 이유는, ' $XC=S$ '에서 는 행렬 XC

또는 S 의 크기에만 관련되어 있기 때문에 위상수학 측면에서 XC 와 S 는 같다고 볼 수 있으며 각종 계산 상에서 σ_i 의 크기에 따른 오차를 줄일 수 있기 때문이다. 본 저자는 계산상의 편의를 고려할 때, 특히 발산지수 또는 위상도의 차원을 계산하는 경우, 그림 3(d)의 경우와 같이 정규화된 XC 의 사용을 제안한다.

4. 맺음말

이 글에서, 위상도를 재구성하는 대표적인 두가지 방법에 대해서 간략하게 설명하고 적용 방법에 대해서 서로 비교 하였다. 특히 잡음 성분이 필수적으로 생기는 공학적인 문제의 경우 '지연법' 보

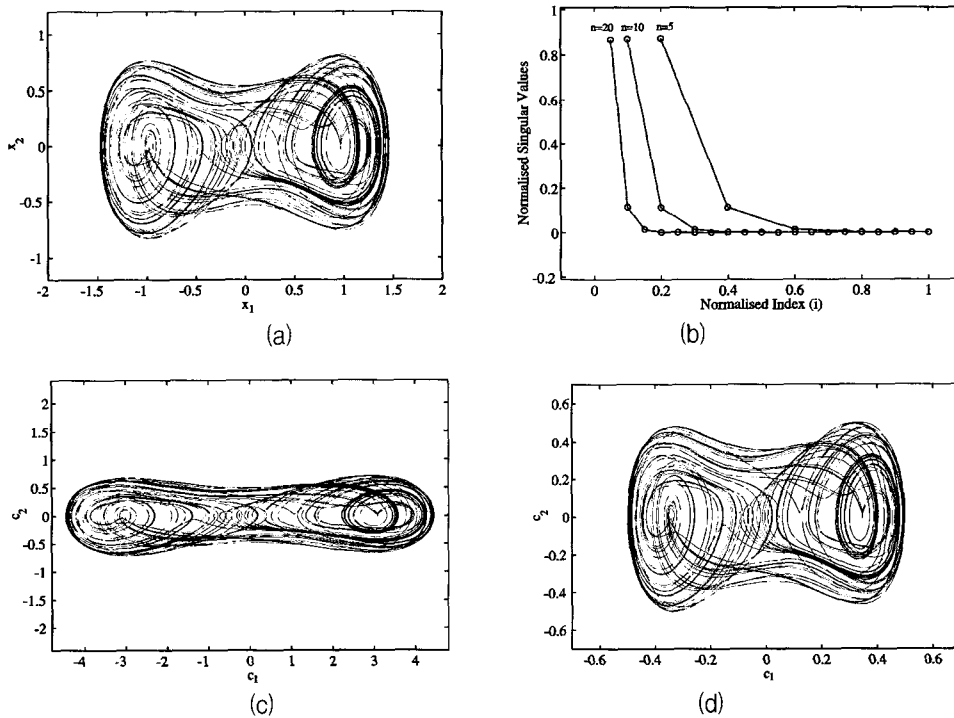


그림 3 SVD를 이용하여 재구성된 위상도 (a) 원래의 위상도, (b) 정규화된 고유치 (singular values), (c) 행렬 XC 를 이용하여 재구성된 위상도, (d) 정규화된 행렬 XC 를 이용하여 재구성된 위상도

다 SVD를 이용한 방법이 더 효과적임을 보였으며, 또한 '지연법'은 경우에 따라서 최적 지연시간의 선정이 모호하게 되어 위상도를 제대로 재구성할 수 없음을 예제를 통하여 나타내었다. 반면에, SVD를 사용하는 경우, 보다 간단하고 쉽게 적용할 수 있음을 나타내었다.

그러나, 아직까지 이 두 가지 방법에 대한 서로의 장단점에 대해서는 많은 논쟁이 계속되고 있다. SVD에 의한 방법 역시 본 논문에는 기술되지 않은 여러 단점들이 보고되고 있으나, 본 저자는 위상도를 재구성함에 있어서 고려해야 되는 최적 지연시간, 최소 매립차원을 동시에 해결하고 잡음이 섞인 경우에도 유용하게 적용할 수 있는 SVD에 의한 방법이 공학적인 측면에서 더 효과적이라고 보고 있다.

참고 문헌

(1) Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D. and Shaw, R. S., 1980, "Geometry from a Time Series." *Physical Review Letters*, Vol. 45, No. 9, pp. 712~716.

(2) Takens, F., 1981, "Detecting Strange Attractors in Turbulence." *Lecture Notes in Mathematics*, 898, pp. 365~381.

(3) Whitney, H., 1936, "Differential Manifolds". *Annals of Mathematics*, Vol. 37, No. 3, pp. 645~680.

(4) Sauer, T., Yorke, J. A. and Casdagli, M., 1991, "Embedology," *Journal of Statistical Physics*, Vol. 65, No. 3/4, pp. 579~616.

(5) Fraser, A. M. and Swinney, H. L., 1986, "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information," *Physical Review A*, Vol. 33, No. 2, pp. 1134~1140.

(6) Brown, R., Bryant, P. and Abarbanel, H. D. I., 1991, "Computing the Lyapunov Spectrum of a Dynamical System from an Observed Time Series," *Physical Review A*, Vol. 43, No. 6, pp. 2787~2806.

(7) Grassberger, P. and Procaccia, I., 1983, "Measuring The Strangeness of Strange Attractors," *Physica D*, Vol. 9, pp. 189~208.

(8) Liebert, W., Pawelzik, K. and Schuster, H. G., 1991, "Optimal Embeddings of Chaotic Attractors from Topological Considerations," *Europhysics Letters*, Vol. 14, No. 6, pp. 521~526.

(9) Kennel, M. B., Brown, R. and Abarbanel, H. D. I., 1992, "Determining Embedding Dimension for Phase-space Reconstruction Using a Geometrical Construction," *Physical Review A*, Vol. 45, No. 6, pp. 3403~3411.

(10) Buzug, Th., Reimers, T. and Pfister, G., 1990, "Optimal Reconstruction of Strange Attractors from Purely Geometrical Arguments," *Europhysics Letters*, Vol. 13, No. 7, pp. 605~610.

(11) Broomhead, D. S. and King, G. P., 1986, "Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data," *Physica D*, Vol. 20, pp. 217~236.

(12) King, G. P., Jones, R. and Broomhead, D. S., 1987, "Phase Portraits from a Time Series : A Singular System Approach," *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, Vol. 2, pp. 379~390.