

랜덤 선로상의 광 국재현상에 관한 해석(1) : 해의 국재성에 대한 이론적 고찰

최영규†

신라대학교 공과대학 광전자공학과

Ⓣ 617-736 부산광역시 사상구 폐법동 산 1-1

(2003년 3월 13일 받음, 2003년 7월 10일 수정본 받음)

전파정수가 랜덤하게 분포하는 선로 상에서 파동함수의 해의 성질을 고찰함으로써 랜덤한 매질 내의 파동의 국재현상에 대한 이론적 해석을 시도하였다. 파동의 국재는 함수의 해가 증대에서 감쇠로 전환하는 과정에서 발생하므로, 먼저 파동의 증대가 감쇠로 전환되는 과정을 이론적으로 규명하기 위하여 2차 파동방정식을 Bragg 조건 등을 이용하여 근사적으로 1차 슬피딩거의 방정식의 형태로 유도하였다. 그리고 이 방정식이 취할 수 있는 여러 가지 해의 성질과 그 해가 성립하기 위한 조건에 대하여 고찰하였으며, 파동방정식의 해의 국재성과 전파정수의 변동에 대한 관계에 대하여 몇 가지 조건을 조사하였다. 지수형의 해에서 유전율이 $\epsilon = (0, 0, \epsilon_0)$ 인 경우 ϵ_0 는 파동의 위상에 관여하여 국재현상을 일으키는 요소가 된다는 것을 확인하였다.

주제어 : anderson localization, photon localization, random potential.

I. 서 론

광의 국재현상은 집적광학이나 비선형 광학의 미개척 분야에 대한 해결 방법을 제시할 수 있다는 가능성 때문에 이 현상에 대한 이론적인 해석과 응용 방법에 대한 연구는 많은 주목을 받고 있다. 1958년 P. W. Anderson은 전자가 랜덤한 포텐셜 공간을 운동할 때 그 파동함수가 공간적으로 집중하는 현상, 즉 국재화하는 현상을 이론적으로 설명하였다.^[1] 광의 국재현상에 대한 연구의 궁극적인 목적은 광의 강한 국재현상의 이론적 규명과 그 실현에 있다고 할 수 있다. 에너지대 구조가 불규칙한 계에서 전자 파동함수가 앤더슨 국재를 나타내는 것처럼 어떤 종류의 유전체의 미세구조 속에서는 광의 국재현상이 일어난다.^[2-4] 이러한 계에서는 고전 광학적으로 뿐만 아니라 양자전자기학적인 의미에서도 새로운 현상이 일어나는 것으로 알려져 있다.^[5] 전자의 국재화는 불규칙한 포텐셜에 의해서 산란된 전자파 사이의 간섭이 원인이 되어 일어나는 현상이다.^[6] 앤더슨 국재는 전자의 파동적 성질이 일으키는 현상이기 때문에, 전파정수가 랜덤하게 분포하는 무한 길이의 매질(이하 이것을 랜덤한 매질이라 함)내의 전자파, 또는 특성임피던스가 불규칙하게 분포하는 전송선로(랜덤한 선로)상의 전압파동 등, 여러 종류의 파동에서 앤더슨 국재와 유사한 국재현상이 일어날 수 있다.^[7-9]

본 논문에서는 전파정수가 랜덤하게 분포하는 선로 상에서 파동함수의 해의 성질을 고찰함으로써 랜덤한 매질 내의 파동의 국재현상에 대한 이론적 해석을 시도하였다. 파수의 파동은 Bragg의 반사조건에 의하면 전파정수 중 파수가 공간적으로 $2k$ 인 성분이 가장 큰 영향을 나타내므로, 불균일한 매질 속

에서 파동은 지수함수적으로 증대되는 경향을 나타낸다.^[10,11] 그런데 파동의 국재는 이러한 증대가 감쇠로 전환하게 됨으로써 발생한다고 생각된다. 따라서 본 논문에서는 먼저 파동의 증대가 감쇠로 전환되는 과정을 이론적으로 규명하기 위하여 2차의 파동방정식을 Bragg 조건 등을 이용하여 근사적으로 1차 슬피딩거의 방정식과 비슷한 형태로 유도하고, 이 방정식이 취할 수 있는 여러 가지 해의 성질과 그 해가 성립하기 위한 조건에 대하여 고찰하였다. 그리고 만일 이 방정식의 해가 국재성을 나타내는 경우, 그 원인은 전파정수의 변동에 의한 것이므로 그 몇 가지 조건에 대해서 살펴보았다.

II. 1차원 랜덤 매질 내의 파동방정식

먼저, 일반적인 랜덤 매질 내의 파동의 국재성에 대해서 살펴보자. 여기서 다루는 랜덤한 매질이란 파동의 전파정수가 위치에 따라서 통계적으로 변동하고 있는 매질을 의미하는 것이다. 우선, 전파정수가 위치에 따라 변하지 않고 일정한 무손실 매질 내의 파동에 대하여 살펴보자. 전파정수가 일정한 경우의 1차원 파동방정식은 파동의 진폭을 $\psi(x)$ 라 하면,

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0 \tag{1}$$

이 된다. 단, 여기서 x 는 위치를 나타내며, k 는 전파정수이고 무손실 매질에 대하여 생각하고 있으므로 k 는 실수이다. 식 (1)의 해의 형태는 여러 종류가 있을 수 있으나, 여기서는 $\psi(x)$ 를

$$\psi(x) = C_c \cos kx + C_s \sin kx \tag{2}$$

로 표현하기로 한다. 여기서, C_c 와 C_s 는 경계치에 의존하는 정수들이다.

†E-mail: ykchoi@silla.ac.kr

다음에는 전파정수가 위치에 따라 통계적으로 변동하는 경우를 생각하자. 이 경우에도 시간에 의존하지 않는 무손실 매질 내에서는 전파정수가 정수로 되지 않고 위치의 함수로 표현된다. 여기서는 전파정수의 평균치에서의 편이(x에 대하여)를 정상적인 확률함수로 표현하는데, 이것은 전파정수 변동의 통계적 성질이 위치에 의존하지 않는다는 것을 의미하는 것이다. 전파정수의 제곱을

$$k^2 [1 + \varepsilon(x)] \tag{3}$$

로 나타낼 때, $\varepsilon(x)$ 는 전파정수의 제곱의 평균치에서의 편이를 나타내는 정상적인 확률과정이다. 특히, 파동이 광파를 나타내는 경우 굴절률은

$$n^2(x) = 1 + \varepsilon(x) \tag{4}$$

로 쓸 수 있으므로, $\varepsilon(x)$ 는 유전율의 변동에 대응된다. 이러한 경우 식 (1)과 같은 파동방정식은 앞에서 설명한 것과 같은 정상적인 랜덤한 매질 속에서

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi(x) = 0 \tag{5}$$

로 쓸 수 있으므로, 지금부터는 식 (5)를 기본으로 하여 이론을 전개한다. 단, $\varepsilon(x)$, $\psi(x)$ 는 확률변수^[12]로써 더 정확하게 나타내면

$$\varepsilon(x) \equiv \varepsilon(x, \omega), \quad \psi(x) \equiv \psi(x, \omega) \quad (\omega \text{는 건본점 파라미터}) \tag{6}$$

로 되나, 계산의 편의상 이후의 계산에서는 건본점 ω 를 생략하고 사용하기로 한다.

$\varepsilon(x)$ 의 크기가 1에 비하여 충분히 작은 경우를 생각하면, 이때의 해의 형식은 $\varepsilon(x) = 0$ (자유공간)의 경우의 식 (2)와 유사한 형식으로 쓸 수 있다. 따라서 식 (5)의 해는

$$\psi(x) \equiv A(x) \cos kx + B(x) \sin kx \tag{7}$$

로 근사할 수가 있다. 또, $\varepsilon(x)$ 에 대해서는 랜덤한 매질 내에서 유전율의 불규칙성은 유전율의 변화가 1보다 아주 작은 구간 내에서는 근사적으로

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0(x) + \varepsilon_c(x) \cos 2kx + \varepsilon_s(x) \sin 2kx \tag{8}$$

로 표현할 수 있다. 단, 여기서 $A(x)$ 와 $B(x)$ 는 k^{-1} 에 대해서 충분히 완만하게 변하고 있는 것으로 생각한다. 식 (7), (8)을 식 (1)에 대입하고 앞의 가정에서 $|A''| \ll |kA'|$ (A', A'' 는 각각 x 에 대한 1차, 2차 미분)로 하고, 또 $3k$ 의 성분을 무시하면

$$ik^{-1} \frac{d}{dx} |\psi\rangle = -\varepsilon(x) \cdot K |\psi\rangle \tag{9}$$

로 되어, 슬로딩거의 파동방정식과 닮은 형태의 식이 얻어진다.

여기서 $|\psi\rangle = [A(x)B(x)]^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_c, \varepsilon_s)$, $K = (K_1, K_2, J_3)$ 이고, 특히 K 의 각각의 성분은

$$K_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

의 형태로 되므로 Pauli의 스펜행렬 $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ ^[13]을 이용하면,

$$K_1 = i\sigma_3/2, \quad K_2 = i\sigma_1/2, \quad J_3 = \sigma_2/2 \tag{11}$$

로 표현할 수 있다. 또, 이러한 연산자 사이에는

$$[K_1, K_2] = -iJ_3, \quad [K_2, J_3] = iK_1, \quad [J_3, K_1] = iK_2 \tag{12}$$

로 되는 교환관계가 존재한다.

III. 파동방정식의 지수형 해

식 (9)의 해의 성질에 대해서 살펴보자. 식 (9)를 다시 고쳐 쓰면

$$ik^{-1} \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \varepsilon_s & \varepsilon_0 - \varepsilon_c \\ -\varepsilon_c - \varepsilon_0 & -\varepsilon_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{13}$$

로 된다. 여기서, 파동 ψ 의 성질을 설명하기 위하여 $|\psi\rangle$ 의 놈(norm)에 해당하는 α 와 AB평면상의 위상 ϕ 를 도입하여,^[12]

$$\alpha = \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{B(x)}{A(x)} \tag{14}$$

로 쓰기로 한다. 해의 성질을 조사하기 위하여 이 특정한 값을 갖는 다음의 세가지 경우에 대하여 살펴보자.

1. $\varepsilon = (\varepsilon_s, 0, 0)$ 의 경우는 식 (13)으로부터

$$A(x) = A_0 e^{\varepsilon_s kx}, \quad B(x) = B_0 e^{-\varepsilon_s kx} \tag{15}$$

를 얻는다. 여기서 A_0, B_0 는 초기값으로 결정되는 정수이다. $|\psi\rangle$ 가 취하는 값을 도식적으로 그림 1에 나타내 보였다. 예를 들어 $\varepsilon_s = 1$ 에서 A_0, B_0 의 값이 그림 1에서 점 S의 위치에 있다고 하면 α 는 x 의 증가에 따라 지수함수적으로 커지고 ϕ 는 0에 접근하는 것을 알 수 있다. 그림 속의 화살표는 x 의 증가에 대한 $|\psi\rangle$ 의 변화의 방향을 나타내고 있다.

2. $\varepsilon = (0, \varepsilon_c, 0)$ 의 경우는

$$A(x) = A_0 \cosh \varepsilon_c kx - B_0 \sinh \varepsilon_c kx, \quad B(x) = -A_0 \sinh \varepsilon_c kx + B_0 \cosh \varepsilon_c kx \tag{16}$$

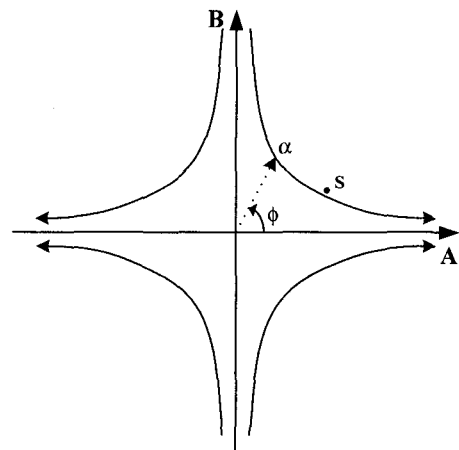


그림 1. 지수형의 해(1).

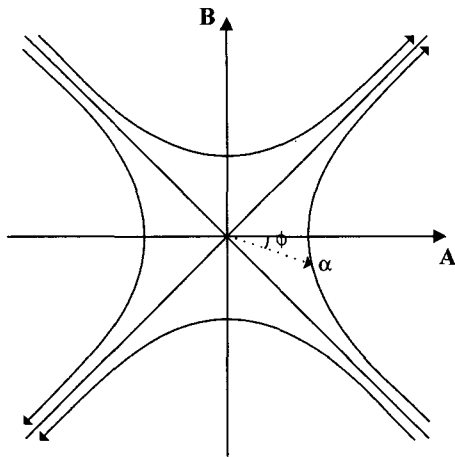


그림 2. 지수형의 해(2).

로 된다. 앞의 1처럼 $\phi(x)$ 의 모양을 그림 2에 보였다. 여기서도 x 가 증가함에 따라 α 가 지수 함수적으로 증가 또는 감소하는 성질을 나타내고 있음을 알 수 있다.

3. $\varepsilon = (0, 0, \varepsilon_0)$ 의 경우는

$$A(x) = A_0 \cos \varepsilon_c kx + B_0 \sin \varepsilon_0 kx, \quad B(x) = -A_0 \sin \varepsilon_0 kx + B_0 \cos \varepsilon_c kx \quad (17)$$

를 얻는다. 이러한 해가 AB 평면상에서 x 에 따라서 어떻게 변하는가를 그림 3에 보였다. 앞의 1, 2의 경우와는 달리 해가 주기성을 가지고 있는 것을 알 수 있다. 좀더 구체적으로 살펴보면, 이러한 ε_0 는 전파정수가 위치에 따라 변동이 없는 경우에 파동의 위상을 빠르게 하거나 또는 느리게 하는 작용을 하는 것으로 생각할 수 있다. 지수형의 해를 만들어 내는데 직접 영향을 미치는 인자는 아니지만 뒤에서 설명하는 국재현상을 일으키는 중요한 요소가 되는 것으로 예상된다.

지금까지 $\varepsilon(x)$ 가 취할 수 있는 값 중에서 특정한 경우에 대하여 그 해의 형상을 살펴보았다. 실제로 랜덤하게 $\varepsilon(x)$ 가 분포하는 경우는 어떤 짧은 구간을 생각하면 $\varepsilon(x)$ 의 변화는 매우 완만하게 변하는 것으로 생각할 수 있으므로 그 내부에서

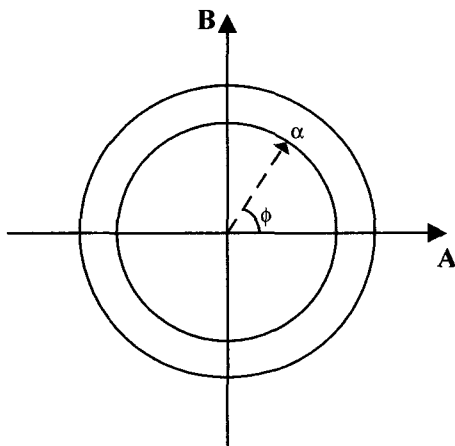


그림 3. 지수형의 해(3).

는 $\varepsilon(x)$ 가 일정한 것으로 간주하고 매질 전체는 이러한 구간이 여러 번 계속되고 있는 것으로 해석할 수 있는 것이다. 각각의 구간에서 앞에서 설명한 것처럼 매질 내에서 3의 성분이 강하면 파동의 위상이 영향을 받게 되고, 1이나 2의 요소가 커지면 파동의 진폭이 영향을 받게 된다는 것을 알 수 있다. 후자의 경우는 x 에 관해서 파동의 진폭이 지수 함수적으로 증가하거나 감소하게 된다.

IV. 파동방정식의 국재성 해

앞 절에서 파동의 2배의 주파수 성분을 많이 포함하는 랜덤한 매질 속에는 지수함수형의 해가 존재한다는 것을 알았다. 또, 랜덤한 매질 속에서는 진행파 해가 존재하지 않고 각각 위치에 따라서 전파정수가 다르므로 좌측 또는 우측에서 반사된 파가 보강 간섭하여 공진하는 것과 비슷한 상태가 형성된다. 이것을 파동의 국재현상이라고 하는 데 여기서는 어떻게 하여 이러한 현상이 발생할 수 있는가를 몇 가지의 모델을 예로 들어 설명한다.

앞 절에서 생각한 3가지 해는 모두 다 특별한 경우이다. 그러나 랜덤한 매질 속에서는 이러한 해들이 서로 결합한 형태로 랜덤한 전파정수가 표현된다. $\varepsilon(x)$ 를 구성하는 3개의 항이 완만하게 변하는 경우를 나타낸 것이 그림 4이다. 그림 4 속에 나타낸 국소위상은 $\varepsilon(x)$ 가 변동하는 모양을 나타내는 지표로서 이것은 $\varepsilon(x)$ 에 의해 정해지는 $|\psi\rangle$ 가 접근하는 위상을 나타내는 것이다. 그림 4에서는 $\varepsilon(x)$ 가 완만하게 변하기 때문에 x 의 증가에 따라서 $|\psi\rangle$ 의 위상이 국소위상에 접근하게 된다. 앞 절에서 살펴본 것처럼 국소위상에 가까워짐에 따라 $|\psi\rangle$ 의 진폭은 지수 함수적으로 증가한다. 그러나 국재하는 해는 어느 한 영역에 파동의 대부분이 집중하기 때문에 계속하여 증가하지는 않게 된다. 지금부터는 이러한 국재가 일어나는 기구를 $\varepsilon(x)$ 를 이용하여 살펴보기로 하자.

4.1. 위상의 불연속

한 예로써 $\varepsilon = (1, 0, 0)$ 인 경우를 살펴보자. 앞의 3절에서처럼 $\psi(x)$ 의 초기치의 ϕ 가 $-\pi < \psi < \pi$ 이면, 국소위상인 $\phi = 0$ 을 향해서 지수적으로 증가한다. 이러한 모양을 그림 5에 보였으며, 이의 변화에 따른 $\psi(x)$ 의 진폭 α 의 값을 그림 5의 아래 부

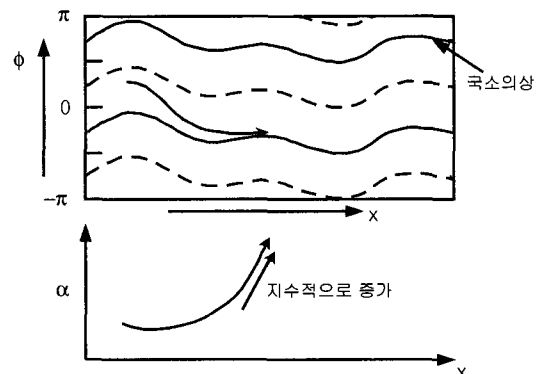


그림 4. 국소위상이 완만하게 변하는 경우.

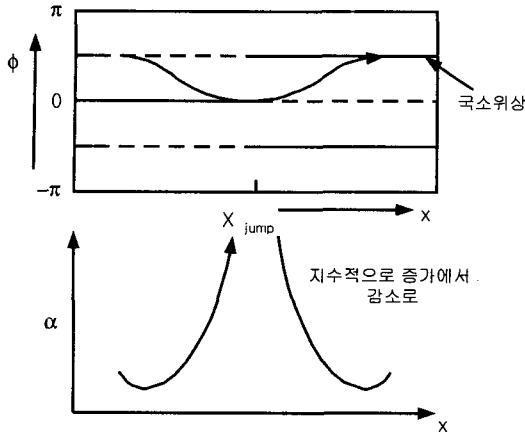


그림 5. 국소위상이 불연속인 경우.

분에 나타났다. $x = x_{jump}$ 의 위치를 경계로 $\epsilon = (1, 0, 0)$ 으로 되면 국재위상은 $\phi = \pi/2, -\pi/2$ 등으로 변화한다. $\psi(x)$ 는 처음에는 $\phi = 0$ 을 향하고 있었으나 이것에 의해서 $\phi = \pi/2$ 를 향하게 되어 계속해서 증가하고 있던 것이 갑자기 전환되어 감쇄경향으로 변한다. 결과적으로 파동의 진폭은 그림 5의 아래에 나타낸 것처럼 $x = x_{jump}$ 를 중심으로 국재하게 되는 것이다.

4.2. $|\psi\rangle$ 의 위상의 급속한 회전

다음에 ϵ 의 ϵ_0 의 성분이 큰 역할을 수행하는 경우를 생각해 보자. 우선, $\psi(x)$ 의 진폭과 위상을 그림 6에 보였다. 이 모델은 $x = x_{rot}$ 의 주변에서 ϵ_0 가 국소적으로 커지게 된 것이다. 이것은 앞의 1의 경우와 똑같이 $\phi = 0$ 을 향하여 전진하다가, $x = x_{rot}$ 의 주변에서 $\phi = \pi/2$ 정도까지 변화되었다고 하면 거기서부터는 전환되어 감쇄의 방향으로 향하게 된다는 것이다. 결과적으로 파동의 진폭은 그림 6의 아래에 나타낸 것처럼 $x = x_{rot}$ 를 중심으로 국재하게 되는 것이다.

4.3. 국소위상의 급속한 변화

국소위상은 x 의 증가에 따라 $\psi(x)$ 의 위상이 점근하는 값이지만, 이것은 일반적으로 변화하는 것이다. 그러나 이러한 변화는 매우 완만한 것으로 생각하고 있으므로, $\psi(x)$ 는 국소위상의 궤

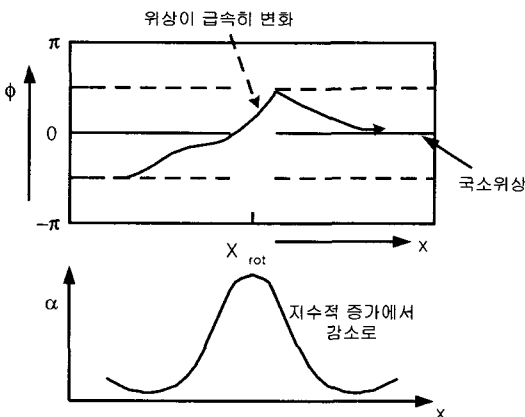


그림 6. 위상이 급속하게 회전하는 경우.

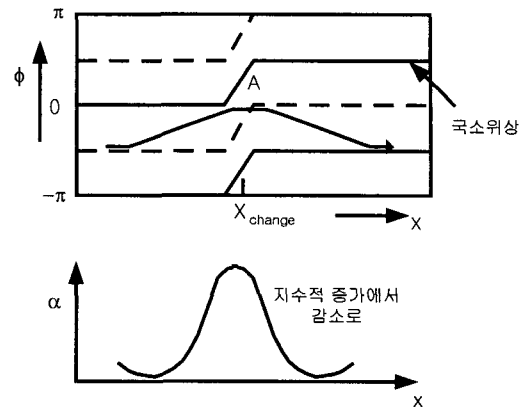


그림 7. 국소위상이 급속히 변하는 경우.

도를 타고 지수적으로 증가하게 된다. 그러나 그림 7에서 보는 것처럼 급속한 변화가 일어날 경우에는, 예를 들어 그림 7처럼 지배적으로 되어있는 항이 $\epsilon = (1, 0, 0)$ 이므로 $\epsilon = (0, 1, 0)$ 으로 변화한 것이지만 이 변화에 $\psi(x)$ 가 따라가지 못하고 그림 7의 A점 부근에서 튀어 나오게 된다. 그러면 이 점에서부터는 감쇄를 시작하게 되므로 결과적으로 그림 7과 같이 국재하게 되는 것이다.

V. 결 론

랜덤한 선로상의 파동방정식을 Bragg 반사조건과 선로상의 유전율을 정상적인 확률과정의 확률변수로 취급하여 근사적으로 1차 술뢰당거의 방정식과 유사한 형태로 유도하였다. 전파정수가 변동하는 매질 중의 파동방정식에 대해서 Bragg의 반사조건에서 지수적인 해의 존재를 구하고, 또한 그 해가 국재성을 가질 경우의 조건에 대해서 정성적으로 설명하였다. 유전율의 몇 가지 특수한 경우의 지수형 해 중에서 유전율이 $\epsilon = (0, 0, \epsilon_0)$ 인 경우 ϵ_0 는 파동의 위상에 관여하여 국재현상을 일으키는 요소가 된다는 것을 확인하였다.

참고문헌

- [1] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* 109, pp. 1492, 1958.
- [2] T. Nakayama, K. Yakubo, and M. Takano, "Strong localization of photons in aperiodic waveguides : A numerical realization," *Phys. Rev. B*, vol. 47, no. 15, pp. 9449-9251. 1993.
- [3] N. Zekri, M. Schreiber, R. Ouasti, R. Bouamrane, and A. Brezini, "Nature of the electronic states in a chain of potential wells in presence of an electric field," *Z. Phys. B* 99, pp. 381-386, 1996.
- [4] J. G. Rivas, R. Sprik, C. M. Soukoulis, K. Busch, and A. Lagendijk, "Optical Transmission through strong scattering and highly polydisperse Media," *Springer Link:Lecture Notes in Physics* 0547, online publication, 2000.
- [5] H. Ogura, "Theory of waves in a homogeneous random medium," *Phys. Rev. A*, vol 11, no. 35, pp. 942-956, 1975.
- [6] M. Tominaga, "Anderson localization and optical fluctuation in the random media," *JJAP*, vol. 46, pp. 927-933, 1991.

- [7] A. Eilmers, R. A. Romer, and M. Schreiber, "The two-dimensional Anderson model of localization with random hopping," *Eur. Phys. J. B1*, pp. 29-38, 1998.
- [8] U. Sivan, A. Saar, "Light wave localization in dielectric waveguides," *Europhys. Lett.* vol. 5, no. 2, pp. 139-144, 1988.
- [9] A. Komiyama, "Mode waves in an off-diagonally disordered waveguide system," *IEICE Trans Electron*, vol. E83-C, no.5, pp. 736-741, 2000.
- [10] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon, Oxford), 1980.
- [11] M. Born and K. Huang, *Dynamical Theory of Crystal Lattices*, Clarendon, Oxford, chap.IV, 1954.
- [12] M. Loeve, *Probability Theory*, 3rd ed. (Van Nostrand, Princeton, 1963)
- [13] 일본 물리학사전편집위원회편, 물리학사전(배풍관, 일본), pp. 1597, 1992

**Theoretical analysis of the lightwave localization phenomenon
on the random transmission line (part 1) :
localization characteristics of the solution of propagation equation**

Young-Kyu Choi[†]

Division of Photonics, Faculty of Engineering, Silla University, Busan 617-736, KOREA

[†]*E-mail: ykchoi@silla.ac.kr*

(Received March 13, 2003, Revised manuscript July 10, 2003)

We try to analyse the localization phenomenon of a lightwave in random media by means of considering the solution of the propagation equation on a transmission line in which the propagation constants are randomly distributed. Lightwave localization is generated at the turning point where the solution is changed suddenly from an increase to a decrease. First, in order to investigate the changing process of the solution, we have derived the approximated one-dimensional Schrodinger equation from the two-dimensional wave equation by using the Bragg condition. Considering the many types of solutions of the wave equation, we have investigated the conditions that allow the solutions to exist. Also, we have investigated the relationships between the localization of the solution and the variation of the propagation constant. In case of the exponential solution, we know that the permittivity $\epsilon = (0, 0 \ \epsilon_0)$ is a very important parameter to influence the phase of the lightwave and to generate the localization.

OCIS Code : 190.0190.