

두 개의 랩어라운드 에지를 갖는 메쉬의 고장 해밀톤 성질 (Fault Hamiltonicity of Meshes with Two Wraparound Edges)

박 경 옥 [†] 이 형 옥 ^{**} 임 형 석 ^{***}
(Kyoung-Wook Park) (Hyeong-Ok Lee) (Hyeong-Seok Lim)

요 약 본 논문에서는 첫 행과 마지막 행에 두개의 랩어라운드 에지를 갖는 $m \times n$ ($m \geq 2, n \geq 3$) 메쉬 연결망에서의 고장 해밀톤 성질들에 대해 고려한다. 제시한 연결망이 n 이 홀수일 때 해밀톤 연결된 그래프이며 1-고장 해밀톤 사이클을 지님을 보인다. 그리고 n 이 짝수일 때 강한 해밀톤 laceable 그래프이며 1-정점 고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다.

키워드 : 메쉬, 상호연결망, 해밀톤 경로, 고장 해밀톤 경로

Abstract In this paper, we consider the hamiltonian properties of $m \times n$ ($m \geq 2, n \geq 3$) mesh networks with two wraparound edges on the first row and last row, called $M_2(m, n)$, in the presence of a faulty node or link. We prove that $M_2(m, n)$ with odd n is hamiltonian-connected and 1-fault hamiltonian. In addition, we prove that $M_2(m, n)$ with even n is strongly hamiltonian laceable and 1-vertex fault tolerant strongly hamiltonian laceable.

Key words : mesh, interconnection networks, hamiltonian path, fault hamiltonian path

1. 서 론

이차원 메쉬(mesh)는 구조가 간단하고 규칙성이 좋아서 확장이 쉽고 VLSI 구현에 적합하다는 장점으로 인해 대규모 병렬 시스템의 상호 연결망으로 널리 사용되고 있다. 상호 연결망을 구성하는 노드나 링크에 결함이 발생하는 경우를 고려하는 결함 허용(fault tolerance)은 연결망의 중요한 척도 중 하나이다. 결함 허용을 위한 기존의 연구들은 크게 두 가지로 나뉜다. 첫 번째는 결함 노드나 링크들을 시스템 내의 다른 노드나 링크로 대체시키는 방법이다[1,2]. 이러한 방법은 추가 하드웨어로 인한 비용이 없지만, 결함 발생시 시스템의 성능저하가 일어난다. 두 번째는 예비 노드나 링크를 추가로 두어 결함이 발생하면 결함 요소를 대체하도록 하여 시스

템의 성능을 계속 유지하는 것이다[3,4,5,6]. 본 논문에서는 $m \times n$ 메쉬에 두 개의 예비 링크를 둔 연결망에서의 고장 해밀톤 성질들에 대해 고려한다.

연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델링될 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다. 본 논문에서 고려하는 해밀톤 문제는 연결망에서 중요할 뿐만 아니라 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제 중 하나이다. 그래프의 해밀톤 경로(사이클)는 그 그래프의 모든 정점을 오직 한 번씩만 지나는 경로(사이클)를 말하며, 해밀톤 사이클을 가진 그래프를 해밀톤 그래프라 한다. 그리고 모든 두 정점들 사이에 해밀톤 경로가 있는 그래프를 해밀톤 연결된 그래프(hamiltonian-connected)라 한다. 예지나 정점 중 어떤 요소에 결함이 발생하더라도 그 수가 k 개 이하인 경우에 해밀톤 사이클을 가지면 k -고장 해밀톤 그래프(k fault hamiltonian)이라 하고, 해밀톤 연결되면 k -고장 해밀톤 연결된 그래프(k fault hamiltonian-connected)라 한다. 고장 해밀톤 성질을 지닌 연결망은 노드나 통신 링크에 결함이 발생하더라도 링이나 선형 배열을 쉽게 실현할 수 있어 파이프라인 계산 등에 유용하다고 알려져 있다[7,8].

· 이 논문은 2001년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음

[†] 학생회원 : 전남대학교 전산학과

kwpark@csblue.chonnam.ac.kr

^{**} 비 회 원 : 순천대학교 컴퓨터교육과 교수

oklee@sunchon.ac.kr

^{***} 종신회원 : 전남대학교 전산학과 교수

hslim@chonnam.chonnam.ac.kr

논문접수 : 2002년 12월 30일

심사완료 : 2003년 5월 7일

메쉬는 서로 다른 색을 지닌 정점들끼리 에지를 갖도록 정점들을 두 개의 집합으로 나눌 수 있으므로 이분 그래프에 속한다. 이분 그래프에서 W 와 B 를 각각 이분 정점 집합이라고 할때 $|W|=|B|$ 이고 모든 W 에 속한 정점들과 B 에 속한 정점들 사이에 해밀톤 경로를 가지면 해밀톤 laceable 그래프(hamiltonian laceable)라 한다. 해밀톤 laceable 그래프가 같은 정점 집합에 있는 모든 두 정점 사이에 $|W|+|B|-2$ 인 가능한 가장 긴 길이의 경로를 지니면 강한 해밀톤 laceable 그래프(strongly hamiltonian laceable)라 한다[9].

f_w^* 와 f_b^* 를 각각 W 와 B 에 속한 결합 정점들의 수라고 하고 그래프에서 두 정점을 잇는 가능한 가장 긴 길이의 경로를 L^{opt} -경로라 하자. 정점들의 수가 N 이고 $f_b^* < f_w^*$ 인 이분그래프에서 B 에 속한 두 정점을 잇는 L^{opt} -경로의 길이는 $N-2f_b^*$ 이며 서로 다른 집합에 속한 두 정점인 경우 $N-2f_b^*-1$, W 인 경우는 $N-2f_b^*-2$ 이다. k 개 이하의 결합 정점을 가지더라도 두 정점을 잇는 가능한 가장 긴 길이의 경로를 지니면 k 정점 고장 강한 해밀톤 laceable 그래프(k vertex fault-tolerant strongly hamiltonian laceable)라 한다[7].

메쉬에서 해밀톤 경로가 존재하는 조건들과 경로를 찾는 알고리즘이 [10,11]에서 제시되었으며 이를 확장하여 결합 정점을 지닌 2차원 토러스($C_m \times C_n$)와 $P_m \times C_n$ 의 해밀톤 성질들은 [8,12]에서 연구되었다. $P_m \times C_n$ 은 길이 m 인 체인과 길이 n 인 링의 곱으로 얻어지는 그래프로 m 행 n 열의 메쉬 ($m \times n$ 메쉬)의 모든 행에 랩어라운드 에지가 추가된 형태를 지닌다. [7,13]에서 $P_m \times C_n$ ($m \geq 2, n \geq 3$)은 n 이 홀수일 때 해밀톤 연결된 그래프이며 1 고장 해밀톤 그래프, n 이 짝수일 때 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임이 알려져 있다. 본 논문에서는 $m \times n$ 메쉬의 첫 행과 마지막 행에만 랩어라운드 에지가 추가된 형태를 지닌 그래프가 이러한 성질들을 지니고 있음을 보인다.

그래프 G 가 해밀톤 사이클을 가지기 위해서 최소 분지수 $\delta(G)$ 가 2 이상이라는 조건을 만족해야 하므로 G 가 k 고장 해밀톤 그래프이면 $k \leq \delta(G) - 2$ 이다. 그리고 그래프가 해밀톤 연결되기 위해서는 $\delta(G) \geq 3$ 이어야 한다[14]. 본 논문에서 대상으로 하는 그래프는 $m \times n$ 메쉬 연결망에 분지수가 2인 4개의 정점들 사이에 두개의 에지들을 추가하여 $\delta(G) = 3$ 이 되도록 하였다. 따라서 제시한 그래프는 n 이 홀수인 경우 메쉬 연결망이 해밀톤 연결된 그래프, 1-고장 해밀톤 그래프가 되도록 최

소의 에지가 추가된 형태이다. n 이 짝수인 경우 하이퍼 큐브, 재귀원형군, 이중 루프 네트워크와 같은 상호연결망들의 스페닝 부 그래프이므로 제시한 그래프의 고장 해밀톤 성질은 이러한 상호연결망들의 고장 해밀톤 성질을 밝히는데 쓰일 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서 본 논문에서 고려하는 $m \times n$ 메쉬 연결망에 첫째 행과 마지막 행에 두개의 에지를 추가한 그래프 $M_2(m, n)$ 의 정의와 몇 가지 표기법에 대해 기술한다. 3절에서 n 이 홀수인 경우 $M_2(m, n)$ 은 해밀톤 연결된 그래프이고 1-고장 해밀톤 그래프임을 보이고 n 이 짝수인 경우인 1-정점 고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보이고 4절에서 결론을 맺는다.

2. 정의 및 표기법

$m \times n$ 메쉬는 그래프 $M=(V, E)$ 로 정의한다. 여기서, 노드의 집합 $V=\{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 이며, 에지의 집합

$$E = \{(v_{ij}^l, v_{ij}^{l+1}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\} \cup \{(v_{ij}^l, v_{i+1j}^l) \mid 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$$

이다. 메쉬의 최소 분지수는 2이므로 해밀톤 연결된 그래프, 1-고장 해밀톤 그래프, 1-고장 해밀톤 laceable 그래프가 아니다. 최소의 에지를 추가하여 이러한 해밀톤 성질들을 지니도록 분지수가 2인 4개의 정점들 사이에 두개의 에지를 추가하여 최소 분지수가 3이 되도록 다음과 같이 정의할 수 있다.

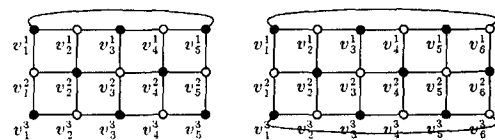
정의 1. $m \times n$ 메쉬를 $M=(V, E)$ 라 하자.

(a) 그래프 $M_1(m, n) = (V_{M_1}, E_{M_1})$ 은 정점 집합

$$V_{M_1} = V \text{ 이고, 에지 집합 } E_{M_1} = E \cup \{(v_{1j}^l, v_{1j}^r)\} \text{이다.}$$

(b) 그래프 $M_2(m, n) = (V_{M_2}, E_{M_2})$ 은 정점 집합 $V_{M_2} = V$

$$\text{이고, 에지 집합 } E_{M_2} = E \cup \{(v_{1j}^l, v_{1j}^r), (v_{1m}^l, v_{1m}^r)\} \text{이다.}$$



(a) $M_1(3,5)$ (b) $M_2(3,6)$
그림 1 $M_1(m, n), M_2(m, n)$ 의 예제

그래프 $M_1(m, n), M_2(m, n)$ 의 모든 정점은 이분 정점 집합 B 와 W 로 나눌 수 있다. 정점 v_{ij}^l 는 $i+j$ 가 짝수이면 검정 정점, 홀수이면 흰색 정점이라 하고, 검정 정점의 집합을 B , 흰색 정점의 집합을 W 라 한다. 행 i 에

속한 정점을 $R(i) = \{v_j | 1 \leq j \leq n\}$, 열 j 에 속한 정점은

$$C(j) = \{v_i | 1 \leq i \leq m\} \text{로 표시하며 } R(i, j) = \bigcup_{i < k < j} R(k),$$

$$C(i, j) = \bigcup_{i < k < j} C(k), \quad (i \leq j)$$

로 표시한다.

그래프의 경로는 정점들의 순열(sequence)로 표기하고 경로 P 의 정점들의 집합을 $V(P)$ 로 표기한다. 정점들의 집합 X 로 유도되는 부 그래프(induced subgraph)를 $G\langle X \rangle$ 라 하고, $G\langle X \rangle$ 의 두 정점 s, t 를 잇는 해밀톤 경로가 존재하면, 그 경로를 $H[s, t\langle X \rangle]$ 라 한다. 만약 X 가 공집합이면, $H[s, t\langle X \rangle]$ 는 비어있는 순열로 표기한다. 분지수가 2인 정점을 꼭지 정점이라 할 때 메쉬에는 다음과 같은 해밀톤 성질들이 존재한다.

보조정리 1. m, n 이 모두 2 이상인 임의의 정수일 때, 다음이 성립한다[10].

- (a) mn 이 짝수이면, $m \times n$ 메쉬에는 한 꼭지 정점과 색이 다른 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.
- (b) mn 이 홀수이면, $m \times n$ 메쉬에는 한 꼭지 정점과 색이 같은 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

보조정리 2. mn 이 짝수인 경우, 다음이 성립한다[11].

- (a) m, n 이 모두 4 이상인 짝수일 때, $m \times n$ 메쉬는 서로 다른 색을 가진 두 정점들을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.
- (b) $m=2, n \geq 3$ 이고 서로 다른 색의 두 정점이 서로 다른 열에 있거나 혹은 모두 1 또는 n 열에 있을 때, 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

$M_1(m, n), M_2(m, n)$ 은 $m \geq 2$ 이면 $P_m \times C_n$ 의 스페닝 부그래프이며, $m=2$ 이면 $M_2(m, n)$ 과 $P_m \times C_n$ 은 동형이다. $M_2(m, n)$ 의 고장 해밀톤 성질을 증명할 때 $P_2 \times C_n$ 의 다음과 같은 해밀톤 성질을 이용한다.

보조정리 3. $P_2 \times C_n$ 에서 $n \geq 3$ 이면 다음과 같은 해밀톤 성질을 지닌다[7].

- (a) n 이 홀수이면, $P_2 \times C_n$ 은 임의의 두 정점들을 잇는 해밀톤 경로를 지닌다.
- (b) n 이 짝수이면, 하나의 고장 정점을 지닌 $P_2 \times C_n$ 은 임의의 두 정점들을 잇는 1-정점 고장 L^{opt} 경로를 지닌다.

3. $M_2(m, n)$ 의 고장 해밀톤 성질

이 절에서는 n 이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누

어 $M_2(m, n)$ 의 고장 해밀톤 성질을 규명한다.

3.1 n 이 홀수인 $M_2(m, n)$

$M_1(m, n)$ 의 몇가지 해밀톤 성질들을 보이고 이들을 이용하여 $M_2(m, n)$ 이 해밀톤 연결된 그래프이며 1-고장 해밀톤 그래프임을 보인다.

보조정리 4. $m \geq 2, n \geq 3$ (n 홀수)인 그래프 $M_1(m, n)$ 는 꼭지 정점과 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로를 지닌다.

증명 꼭지 정점 s 를 v_1^m 이라 가정하고, s 와 임의의 정점 t 를 잇는 해밀톤 경로 P 가 존재함을 m 에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 증명한다.

$m=2$ 인 경우 $t \in B$ 이면 s 는 흰색 정점이므로 보조정리 1에 해밀톤 경로가 존재하며 $t \in W$ 인 경우 $P = (s, v_1^1, H[v_1^1, t\langle C(2; n) \rangle])$ 인 해밀톤 경로가 존재한다. $m-1$ ($m \geq 3$)일 때 성립한다고 가정하고 m 일 때 성립함을 다음 경우들로 나누어 보인다.

경우 1. $t \in R(1: m-1)$ 인 경우. $t \neq v_n^{m-1}$ 이면 $P = (s, v_2^m, \dots, v_n^m, H[v_n^{m-1}, t\langle R(1: m-1) \rangle])$ 인 해밀톤 경로가 존재한다(그림 2(a)). 이때 $H[v_n^{m-1}, t\langle R(1: m-1) \rangle]$ 는 귀납가설에 의해 존재한다. $t = v_n^{m-1}$ 인 경우 $P = (s, v_1^{m-1}, \dots, v_1^1, H[s', t\langle C(2; n) \rangle])$. 여기서 s' 는 m 이 홀수이면 v_1^n , 짝수이면 v_2^1 이다(그림 2(b)).

경우 2. $t \in R(m)$ 인 경우. $t = v_1^m$ 라 하면 $P = (s, \dots, v_1^{m-1}, H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1}\langle R(1: m-1) \rangle], v_n^m, \dots, t)$ 인 해밀톤 경로가 존재하며(그림 2(c)), $H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1}\langle R(1: m-1) \rangle]$ 는 귀납가설에 의해 존재한다. □

보조정리 5. $m \geq 1, n \geq 3$ (n 홀수)인 그래프 $M_1(m, n)$ 에서 마지막 행에 있는 서로 인접한 두 정점 s, t 를 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

증명 $m=1$ 인 경우 링의 형태를 가지게 되므로 인접한 두 정점들을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다. $m=2$ 인 경우 보조정리 2에 의해 존재한다. $m \geq 3$ 인 경우 s 가 t 보다 왼쪽 열에 위치한다고 가정하고 $s = v_k^m, t = v_{k+1}^m$ 이라 하면 $P = (s, v_{k+1}^m, \dots, v_1^m, H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1}\langle R(1: m-1) \rangle],$

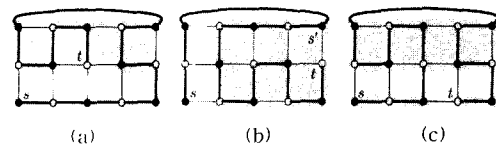


그림 2 보조정리 4 증명의 설명

$v_n^m, v_{n-1}^m, \dots, t$ 인 해밀톤 경로가 존재한다. $H[v_1^{m-1}, v_n^m | R(1:m-1)]$ 은 보조정리 4에 의해 존재한다. \square

보조정리 6. $n \geq 3$ (n 홀수)인 그래프 $M_2(3, n)$ 은 해밀톤 연결된 그래프이다.

증명 두 정점 s 와 t 를 각각 v_i^s, v_j^t ($i \leq j$)라 하고 s 와 t 를 잇는 해밀톤 경로 P 가 존재함을 보인다.

경우 1. $s, t \in R(1:2)$. 에지 (v_i^2, v_j^2) 가 존재한다고 가정하면 보조정리 3에 의해 $G\langle R(1:2) \rangle$ 에 s 와 t 를 잇는 해밀톤 경로를 P' 를 생성할 수 있다. 이때 P' 가 (v_1^2, v_n^2) 를 지나면 $(v_1^2, v_1^3, v_2^3, \dots, v_{n-1}^3, v_n^3, v_n^2)$ 인 경로로 대신하여 해밀톤 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 3(a)). P' 가 (v_i^2, v_n^2) 를 지나지 않으면 P' 가 지나는 에지들 중 $G\langle R(2) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 u, v 와 인접한 $R(3)$ 에 있는 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G\langle R(3) \rangle$ 는 링의 형태를 지니므로 u' 와 v' 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 에지 (u, v) 를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P' 와 합치면 해밀톤 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 3(b)).

경우 2. $s \in R(1), t \in R(3)$. 두 정점 s, t 둘 중 하나라도 첫 열 또는 마지막 열에 있으면 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. 그렇지 않은 경우, 즉 $s, t \in C(2:n-1)$ 일 때 다음 세 가지 경우로 나누어 P 가 존재함을 보인다.

경우 2.1 $s, t \in W$ (그림 3(c)). $P = (s, v_{i+1}^1, \dots, v_n^1, v_1^1, \dots, v_{j-1}^1, H[v_j^2, v_1^3 | R(2:3) \cap C(1:j-1)], H[v_n^3, t | R(2:3) \cap C(j:n)])$. 이때 $H[v_j^2, v_1^3 | R(2:3) \cap C(1:j-1)]$ 와 $H[v_n^3, t | R(2:3) \cap C(j:n)]$ 는 보조정리 1에 의해 존재한다.

경우 2.2 $s \in B, t \in W$ (그림 3(d)). $P = (H[s, v_1^1 | C(1:i)], H[v_n^3, t | C(i+1:n)])$.

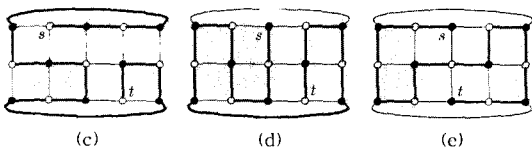
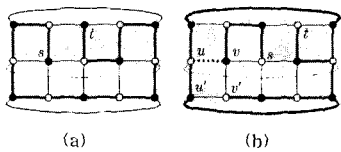


그림 3 보조정리 6 증명의 설명

경우 2.3 $s, t \in B$ (그림 3(e)). s, t 가 다른 열에 있으면 보조정리 2에 의해 $P = (H[s, v_{i+1}^1 | C(1:i+1)], H[v_{i+2}^1, t | C(i+2:n)])$. 그렇지 않으면 $P = (s, H[v_{i-1}^1, v_i^2 | C(1:i-1)], v_i^2, H[v_{i+1}^2, v_{i+1}^3 | C(i+1:n)], t)$. \square

정리 1. $m \geq 2, n \geq 3$ (n 홀수)인 그래프 $M_2(m, n)$ 은 해밀톤 연결된 그래프이다.

증명 두 정점 s 와 t 를 각각 v_i^s, v_j^t 로 가정하고 s 와 t 사이에 해밀톤 경로가 존재함을 m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m=2$ 일 때 보조정리 3에 의해, $m=3$ 일 때 보조정리 6에 의해 위 정리가 성립한다. $m \geq 4$ 인 경우 위 정리가 $m-1$ 일 때 성립한다고 가정하고 m 일 때 성립함을 보인다.

경우 1. $s, t \in R(1:m-2)$

에지 (v_i^{m-2}, v_j^{m-2}) 가 존재한다고 가정하면 귀납가설에 의해 $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 s, t 를 잇는 해밀톤 경로 P' 를 생성할 수 있다. P' 가 (v_1^{m-2}, v_n^{m-2}) 를 지나면 경우 경로 $P' = (v_1^{m-2}, H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1} | R(m-1:m)], v_n^{m-2})$ 로 대신하여 해밀톤 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 4(a)). P' 가 마지막 행의 랩 어라운드 에지를 지나지 않는 경우 P' 가 지나는 에지들 중 $G\langle R(m-2) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 u, v 와 인접한 $R(m-1)$ 에 있는 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G\langle R(m-1:m) \rangle$ 는 보조정리 5에 의해 u' 와 v' 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 에지 (u, v) 를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P' 와 합치면 해밀톤 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 4(b)).

경우 2. $s \in R(1:m-2), t \in R(m-1:m)$

$s = v_1^{m-2}, t = v_n^{m-1}$ 이거나 $s = v_n^{m-2}, t = v_1^{m-1}$ 인 경우 $R(m-2)$ 에 속한 정점들 중 t 와 인접하지 않은 정점을 s' 라 하고 그렇지 않으면 두 정점 v_1^{m-2}, v_n^{m-2} 중 s 가 아닌 t 와 인접하지 않은 정점을 s' 라 하자. $R(m-1)$ 에 있는 s' 와 인접한 정점을 t' 라 하면 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로 $P = (H[s, s' | R(1:m-2)], H[t', t | R(m-1:m)])$ 가 존재한다(그림 4(c,d)).

경우 3. $s, t \in R(m-1:m)$

에지 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 이 존재한다고 가정하면 보조정리 3에 의해 $G\langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 s, t 를 잇는 해밀톤 경로 P' 를 생성할 수 있다. P' 가 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 를 지나면 경우 경로 $P' = (v_1^{m-1}, H[v_1^{m-2}, v_n^{m-2} | R(1:m-2)], v_n^{m-1})$ 로 대신하여 해밀톤 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 4(e)).

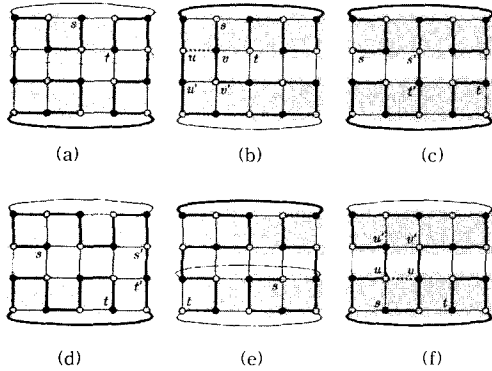


그림 4 정리 1 증명의 설명

P' 가 $(v_{1}^{m-1}, v_{n}^{m-1})$ 를 지나지 않으면 P 가 지나는 에지들 중 $G\langle R(m-1)\rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 u, v 와 인접한 $R(m-2)$ 에 있는 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G\langle R(1:m-2)\rangle$ 는 보조정리 5에 의해 u' 와 v' 를 잇는 해밀톤 경로 P' 가 존재한다. P 에서 에지 (u, v) 를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P' 와 합치면 해밀톤 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 4(f)). □

정리 2. $m \geq 2, n \geq 3$ (n 홀수)인 그래프 $M_2(m, n)$ 는 1-고장 해밀톤 그래프이다.

증명 $M_2(m, n)$ 에 하나의 정점 또는 에지에 결함이 있더라도 해밀톤 사이클 C 가 존재함을 m 에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 증명한다. $m=2$ 인 경우 보조정리 3에 의해 성립한다. $m \geq 3$ 인 경우 위 정리가 $m-1$ 일 때 성립한다고 가정하고 m 일 때 성립함을 보인다.

하나의 고장 정점 또는 하나의 고장 에지는 $G\langle R(1:m-1)\rangle$ 에 존재한다고 가정한다. 에지 $(v_{1}^{m-1}, v_{n}^{m-1})$ 가 존재한다고 가정하면 $G\langle R(1:m-1)\rangle$ 에는 해밀톤 사이클 C 가 귀납가설에 의해 존재한다. C 가 $(v_{1}^{m-1}, v_{n}^{m-1})$ 를 지나면 $(v_{1}^{m-1}, v_{1}^m, v_2^m, \dots, v_{n-1}^m, v_n^m, v_{n-1}^{m-1})$ 로 대신하여 C 를 생성할 수 있다(그림 5(a)). 그렇지 않은 경우 C 가 지나는 에지들 중 $G\langle R(m-1)\rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 u, v 와 인접한 $R(m)$ 에 있

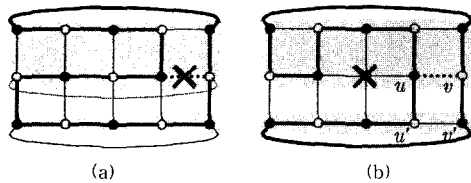


그림 5 정리 2 증명의 설명

는 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G\langle R(m)\rangle$ 은 링 형태이므로 C 에서 에지 (u, v) 를 제거하고 $(u, H[u', v']R(m)), (v, v')$ 를 추가하여 C 를 생성할 수 있다(그림 5(b)). □

3.2 n이 짝수인 $M_2(m, n)$

n 이 짝수인 $M_1(m, n)$ 이 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보이고, 이를 이용하여 $M_2(m, n)$ 이 1-정점 고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다.

보조정리 7. $m \geq 2, n \geq 4$ (n 짝수)인 그래프 $M_1(m, n)$ 은 해밀톤 laceable 그래프(hamiltonian-laceable)이다.

증명 색이 다른 두 정점 s 와 t 를 각각 v_i^s, v_j^t 라 하고 이들을 잇는 해밀톤 경로가 존재함을 보인다. $m \geq 4$ 일 때 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. 따라서 $2 \leq m \leq 3$ 인 경우만을 고려하며 $i \leq j$ 로 가정한다.

경우 1. $m=2$.

s, t 가 다른 열에 있거나 모두 1 혹은 n 열에 있으면 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. 그렇지 않으면, 즉 $s, t \in C(i)$ ($2 \leq i \leq n-1$)일 때 다음과 같은 해밀톤 경로 P 가 존재한다. i 가 짝수일 때(그림 6(a)), $P = (s, H[v_{i+1}^1, v_n^1]C(i+1:n)), H[v_1^1, v_{i-1}^1]C(1:i-1), t)$. i 가 홀수일 때(그림 6(b)), $P = (s, H[v_{i-1}^1, v_1^1]C(1:i-1)), H[v_n^1, v_{i+1}^1]C(i+1:n), t)$.

경우 2. $m=3$.

경우 2.1 $s, t \in R(1)$. $V(P) \cap V(P') = \emptyset$ 이고 $V(P) \cup V(P') = R(1)$ 이 되도록 $R(1)$ 에 있는 두 정점을 s' 와 t' 라 하자. 여기서 P 와 P' 는 각각 s 와 s', t 와 t' 를 잇는 경로들이다. s', t' 와 인접한 $R(2)$ 에 있는 두 정점을 각각 s'', t'' 라 하면 해밀톤 경로 $P = (P, H[s'', t'']R(2:3), P')$ 를 생성할 수 있다(그림 6(c)).

경우 2.2 $s, t \in R(2)$. 보조정리 2에 의해 $G\langle R(2:3)\rangle$ 에는 s 와 t 를 잇는 해밀톤 경로 P' 가 존재한다. P' 에서 $G\langle R(2)\rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 $R(1)$ 에 포함된 정점들 중 u, v 와 인접한 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G\langle R(1)\rangle$ 은 링의 형태를 가지므로 u' 와 v' 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에 있는 에지 (u, v) 대신 두개의 에지 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P'' 를 연결하면 해밀톤 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 6(d)).

경우 2.3 $s \in R(1)$ 이고 $t \in R(2:3)$. $R(1)$ 에 있는 s 와 인접한 정점을 s' 라 하자. 이때 s' 는 t 와 다른 열이어야 한다. $R(2)$ 에 있는 s' 와 인접한 정점을 t' 라 하면 해밀톤 경로 $P = (H[s, s']R(1)), H[t', t]R(2:3))$ 를 생성할 수 있다(그림 6(e)). □

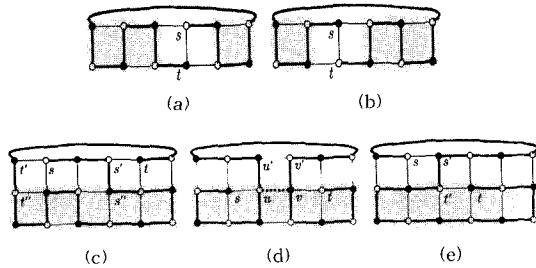


그림 6 보조정리 7 증명의 설명

보조정리 8. $m \geq 2, n \geq 4$ (n 짝수)인 그래프 $M_1(m, n)$ 는 강한 해밀톤 laceable 그래프(strongly hamiltonian laceable)이다.

증명 m 에 대한 수학적 귀납법으로 L^{opt} -경로 P 가 존재함을 보인다. 보조정리 7에 의해 $M_1(m, n)$ 은 해밀톤 laceable하므로 다른 색의 정점들 사이에는 길이 $mn-1$ 인 해밀톤 경로가 존재한다. 따라서 같은 색을 지닌 두 정점을 잇는 경로에 대해서만 고려한다. 같은 색을 지닌 두 정점 s 와 t 를 각각 v_i^s, v_j^t 라 하고 이들을 잇는 길이 $mn-2$ 인 경로가 존재함을 다음 경우들로 나누어 보인다. $i \leq j, s, t \in W$ 로 가정한다.

먼저 $m=2$ 인 경우 $P=(H[s, v_i^s | C(1:j-1), H[v_j^t, v_{j+1}^t | C(j+1:n)], t)$ (그림 7(a)). $m=3$ 인 경우 $s, t \in R(1)$ 일 때 $P=(s, v_{i+1}^s, \dots, v_{j-2}^s, H[v_{j-2}^s, v_{j-1}^s | R(2:3)], v_{j-1}^s, \dots, v_j^s, v_{j+1}^s, \dots, t)$ (그림 7(b)), $s \in R(1), t \in R(2:3)$ 일 때 $G\langle R(1) \rangle$ 에 s 와 s' 를 잇는 경로의 길이가 $n-2$ 인 s' 를 선택한다. 이때 s' 는 t 와 다른 열이 되도록 하고, $R(2)$ 에 있는 s' 와 인접한 정점을 t' 라 하면 $P=(s, \dots, s', H[t', R(2:3)])$ 를 생성할 수 있다(그림 7(c)). $s, t \in R(2:3)$ 일 때 에지 (v_i^s, v_n^s) 가 존재한다고 가정하면 $G\langle R(2:3) \rangle$ 에는 s, t 를 잇는 길이 $2n-2$ 인 경로 P' 가 존재한다. P' 가 (v_i^s, v_n^s) 를 지나면 $(v_i^s, v_{i+1}^s, \dots, v_n^s, v_n^s)$ 로 대신하여 P 를 생성할 수 있다. 그렇지 않으면 P' 에서 $G\langle R(2) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 u, v 와 인접한 $R(1)$ 에 속한 정점들을 각각 u', v' 라 하자. P' 에서 (u, v) 를 제거하고 $(u, H[u', v' | R(1)], v)$ 를 추가하여 P 를 생성할 수 있다.

$m \geq 3$ 인 경우 다음 경우들로 나누어 위 정리가 $m-1$ 일 때 성립한다고 가정하고 m 일때 성립함을 보인다.

경우 1. $s, t \in R(1:m-2)$

귀납가설에 의해 $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 s 와 t 를 잇는 길

이 $(m-2)n-2$ 인 경로 P' 가 존재한다. P' 에서 $G\langle R(m-2) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 $R(m-1)$ 에 포함된 정점들 중 u, v 와 인접한 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G\langle R(m-1:m) \rangle$ 는 보조정리 2에 의해 길이 $2n-1$ 인 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 에지 (u, v) 를 제거하고 두 개의 에지 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P'' 로 연결하여 길이 $mn-2$ 인 경로 P 를 생성할 수 있다(그림 7(d)).

경우 2. $s \in R(1:m-2), t \in R(m-1:m)$

t 가 v_1^{m-2} 또는 v_n^{m-2} 이면 $R(m-2)$ 에 있는 s 가 아닌 흰색 정점을 s' 라 하자. 귀납가설에 의해 $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 s 와 s' 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. $R(m-1)$ 에 있는 s' 와 이웃한 정점을 t' 라 하면 $P=(P', H[t', R(m-1:m)])$ 를 생성할 수 있다(그림 7(e)). $t \neq v_1^{m-1}, t \neq v_n^{m-1}$ 이면 두 정점 v_1^{m-2}, v_n^{m-2} 중 검은 정점을 s' 라 하고 $R(m-1)$ 에 있는 s' 와 이웃한 정점을 t' 라 하면 $P=(H[s, s' | R(1:m-2)], t', H[v_{j'}^{m-1}, R(m-1:m) \cap C(j':j'')])$. 여기서 j' 와 j'' 는 m 이 짝수일 때 각각 $n-1, 1$ 이며 m 이 홀수일 때 각각 $2, n$ 이다.

경우 3. $s, t \in R(m-1:m)$

에지 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 가 존재한다고 가정하면 $G\langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 귀납가설에 의해 s 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 만약 P' 가 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 를 지나면 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 대신 $(v_1^{m-1}, H[v_1^{m-2}, v_n^{m-2} | R(1:m-2)], v_n^{m-1})$ 를 추가하여 P 를 생성할 수 있다(그림 7(f)). 그렇지 않으면 P' 에서 $G\langle R(m-1) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택한다. u, v 와 인접한 $R(m-2)$ 에 있는 두 정점을 각각 u', v' 라 하면 보조정리 7에 의해 $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 u', v' 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 (u, v) 를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P'' 를 연결하면 L^{opt} -경로 P 를 생성할 수 있다.(그림 7(f)). \square

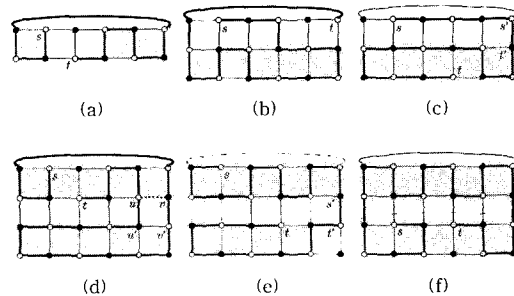


그림 7 보조정리 8 증명의 설명

보조정리 9. 하나의 고장 정점 v_j 를 지닌 $M_1(m, n)$ ($m \geq 2, n \geq 4$ 짝수)은 v_j 와 다른 색을 지닌 꼭지점 s 와 임의의 정점 t 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로를 지닌다. 이때 s 와 인접한 두 정점의 집합은 $\{t, v_j\}$ 가 아니어야 한다.

증명 m 에 대한 수학적 귀납법으로 꼭지점 s 와 임의의 정점 t 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P 가 존재함을 보인다. 고장 정점 v_j 는 흰색 정점인 v_k 라 가정하고 두 정점 s 와 t 를 각각 v_i^m, v_j^m 라 한다.

$m=2$ 인 경우 $v_j \in R(1)$ 이면 $l=2, v_j \in R(2)$ 이면 $l=1$ 이라 하자. $t \in B$ 이면 다음과 같은 경로 P 를 생성할 수 있다.

- a) $j < k \leq i$ 이면 $P = (H[s, v_{k+1}^i | C(k+1; n)], v_k^i, H[v_{k-1}^i, A C(1; k-1)])$.
- b) $k \leq j < i$ 이면 $P = (H[s, v_{k+1}^i | C(j+1; n)], H[v_1^i, v_{k-1}^i | C(1; k-1)], v_k^i, H[v_{k+1}^i, A C(k+1; j)])$.
 $t \in W$ 인 경우는 다음과 같은 경로 P 를 생성할 수 있다.

- a) $k = n$ 이면 $P = (s, v_{n-1}^2, H[v_{n-2}^2, A C(1; n-2)])$.
- b) $j < k < i$ 이면 $P = (H[s, v_{k+1}^i | C(k+1; n)], v_k^i, v_{k-1}^i, H[v_{k-2}^i, A C(1; k-2)])$.
- c) $k < j < i$ 이면
 $P = (H[s, v_{k+1}^i | C(j+1; n)], H[v_1^i, v_{k-1}^i | C(1; k-1)], v_k^i, v_{k+1}^i, H[v_{k+2}^i, A C(k+2; j)])$.

$m \geq 3$ 인 경우 다음 경우들로 나누어 위 정리가 $m-1$ 일 때 성립한다고 가정하고 m 일 때 성립함을 보인다. v_1^{m-1}, v_n^{m-1} 중 고장 정점과 다른 색을 지닌 정점을 t' 라 하자.

경우 1. $t, v_j \in R(1; m-1)$.
 $t \neq t'$ 이면 귀납가설에 의해 $G\langle R(1; m-1) \rangle$ 에는 t 와 t' 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 존재하며 $G\langle R(m) \rangle$ 에는 s 를 시작으로 하는 길이 $n-1$ 인 경로 P'' 가 존재한다. 따라서 $P = (P', P'')$ 인 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P 를 생성할 수 있다(그림 8(a)).

$t = t'$ 인 경우 $v_j \in R(m-1)$ 이면 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 에지가 존재한다고 가정하면 귀납가설에 의해 $G\langle R(m-1; m) \rangle$ 에는 s 와 t 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. P' 가 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 를 지나면 $(v_1^{m-1}, H[v_1^{m-2}, v_n^{m-2} | R(1; m-2)], v_n^{m-1})$ 로 대신하여 P 를 생성할 수 있

다. 그렇지 않으면 $G\langle R(m-1) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택하고 $R(m-2)$ 에 있는 u, v 와 인접한 두 정점을 u', v' 라 하면 $G\langle R(1; m-2) \rangle$ 에는 u', v' 를 잇는 해밀턴 경로 P' 가 보조정리 7에 의해 존재한다. P' 에서 (u, v) 를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P' 와 연결하여 P 를 생성할 수 있다(그림 8(b)).

$v_j \in R(1; m-2)$ 이면 $m > 3$ 인 경우 v_i^{m-2}, v_i^{m-2} 를 각각 u, v 라 하고 $m=3$ 인 경우 $R(1)$ 에 있는 고장 정점과 인접한 두 정점을 u, v 라 하자. 여기서 i 는 $i=1$ 이면 $n-1, i=n$ 이면 2이다. $G\langle R(1; m-2) \rangle$ 에는 $m > 3$ 인 경우 귀납가설에 의해 $m=3$ 인 경우 링 형태이므로 u, v 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. $R(m-1)$ 에 있는 u, v 와 인접한 두 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G\langle R(m-1; m) \rangle$ 에는 다음과 같이 모든 정점을 지나는 두개의 서로소인 경로 P_1 와 P_2 가 존재하며 이들 경로들을 이용하여 $P = (P_1, P', P_2)$ 를 생성할 수 있다(그림 8(c)).

m 이 홀수이면 $P_1 = (H[s, u' | C(1; i)], P_2 = (H[v', A C(i+1; n)])$.
 m 이 짝수이면 $P_1 = (H[s, u' | C(i; n)], P_2 = (H[v', A C(1; i-1)])$.

경우 2. $v_j \in R(1; m-1), t \in R(m)$

$R(m)$ 에 있는 고장 정점과 같은 색의 꼭지점을 t' 라 하고 $G\langle R(m) \rangle$ 에 있는 t 와 t' 를 잇는 경로를 P_2 라 하자. $G\langle R(m) \rangle$ 에 있는 s 와 s' 를 잇는 P_2 와는 서로소인 가장 긴 경로를 P_1 라 하자. 이때 s' 는 흰색 정점이다. $R(m-1)$ 에 있는 s', t' 와 인접한 두 정점들을 각각 s'', t'' 라 하면 귀납가설에 의해 $G\langle R(1; m-1) \rangle$ 에는 s'' 와 t'' 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 이 존재한다. 이들 경로들을 이용하여 $P = (P_1, P', P_2)$ 를 생성할 수 있다(그림 8(d)).

경우 3. $t, v_j \in R(m)$

랩어라운드 에지 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 가 존재한다고 가정하면 $G\langle R(m-1; m) \rangle$ 에는 s, t 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 만약 P' 가 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 를 지나면 경우 $(v_1^{m-1}, H[v_1^{m-2}, v_n^{m-2} | R(1; m-2)], v_n^{m-1})$ 로 대신하여 P 를 생성할 수 있다. 그렇지 않은 경우 P' 에서 $G\langle R(m-1) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택한다. $R(m-2)$ 에 속한 u, v 와 인접한 두 정점을 각각 u', v' 라 하면 P' 에서 (u, v) 대신 $(u, H[u', v' | R(1; m-2)], v)$ 를 추가하여 P 를 생성할 수 있다(그림 8(e)). □

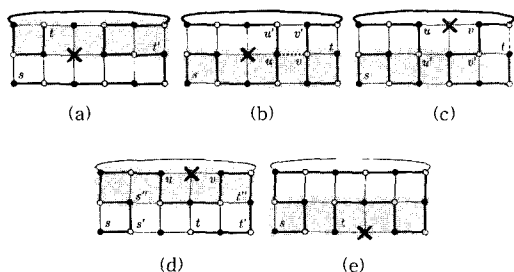


그림 8 보조정리 9 증명의 설명

보조정리 10. $n \geq 4$ (n 짝수)인 그래프 $M_2(3, n)$ 는 1-정점 고장 강한 해밀톤 laceable 그래프(1-vertex fault strongly hamiltonian laceable)이다.

증명 두 정점 s 와 t 를 각각 v_i^s, v_j^t 라 하고 $i \leq j$ 로 가정한다. 고장 정점 v_f 를 v_k^f 라 한다. $v_f \in R(3)$ 인 경우 $v_f \in R(1)$ 인 경우로 대응시켜 생각할 수 있으므로 일반성을 잃지 않고 $R(1:2)$ 에 속한다고 가정한다. 다음과 같은 세 가지 경우로 나누어 s, t 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} 경로 P 가 존재함을 보인다.

경우 1. $s, t \in R(1:2)$

에지 (v_1^s, v_n^t) 가 존재한다고 가정하면 보조정리 3에 의해 $G \setminus R(1:2)$ 에는 s 와 t 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 만약 P' 가 (v_1^s, v_n^t) 를 지나는 경우 (v_1^s, v_n^t) 대신 $(v_1^s, v_1^3, v_2^3, \dots, v_{n-1}^3, v_n^3, v_n^2)$ 를 추가하여 P 를 생성할 수 있다(그림 9(a)). 그렇지 않은 경우 P' 에서 $G \setminus R(2)$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택한다. u, v 와 인접한 $R(3)$ 에 있는 두 정점을 각각 u', v' 라 하면 $G \setminus R(3)$ 는 링 형태를 가지므로 두 점을 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 (u, v) 를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P'' 를 연결하면 P 를 생성할 수 있다(그림 9(b)).

경우 2. $s \in R(1:2), t \in R(3)$

s 와 v_f 중 적어도 하나는 $R(1)$ 에 속하며 다음의 경우로 나누어 증명한다.

경우 2.1 $s, t \in B$.

$v_f \in R(1)$ 이면 $l=2$, $v_f \in R(2)$ 이면 $l=1$ 이라 하자.

- a) $i < j < k$ 일 때, $P = (H[s, v_{j-1}^s | C(1:j-1)], H[v_j^s, v_k^s | C(j:k-1) \cap R(1:2)], v_k^s, H[v_{k+1}^s, v_n^s | C(k+1:n) \cap R(1:2)], v_n^s, \dots, v_{j+1}^s, t)$.
- b) $i = j < k$ 일 때, $P = (s, H[v_{i-1}^s, v_i^s | C(1:i-1)], v_i^s, H[v_{i+1}^s, v_k^s | C(i+1:k-1) \cap R(1:2)], v_k^s)$.

$$H[v_{k+1}^s, v_n^s | C(k+1:n) \cap R(1:2)], v_n^s, \dots, v_{j+1}^s, t)$$

- c) $i < k \leq j$ 일 때, $P = (H[s, v_{k-1}^s | C(1:k-1) \cap R(1:2)], v_k^s, H[v_{k+1}^s, v_{j+1}^s | C(k+1:n) \cap R(1:2)], H[v_{j+1}^s, t | R(3)])$.
- d) $i = j = k$ 일 때, $P = (s, H[v_{i-1}^s, v_i^s | C(1:i-1)], H[v_n^s, v_{j+1}^s | C(j+1:n)], t)$.

경우 2.2 $s \in B, t \in W$

$v_f \in R(1)$ 이면 $l=3$, $v_f \in R(2)$ 이면 $l=1$ 이라 하자.

- a) $i < k < j$ 일 때, $P = (H[s, v_{k-1}^s | C(1:k-1)], v_k^s, H[v_{k+1}^s, t | C(k+1:n)])$.
- b) $i < j < k$ 일 때, $P = (H[s, v_{j-1}^s | C(1:j-1)], H[v_n^s, v_{k+1}^s | C(k+1:n)], v_k^s, H[v_{k+1}^s, t | C(j:k-1)])$.
- c) $i = k < j$ 일 때, $v_f \in R(2)$ 이면 $P = (s, H[v_{i-1}^s, v_i^s | C(1:i-1)], H[v_n^s, t | C(i+1:n)], v_f \in R(1)$ 이면 $P = (s, H[v_{i-1}^s, v_i^s | C(2:i-1) \cap R(1:2)], v_i^s, v_{i+1}^s, \dots, v_j^s, H[v_{j+1}^s, t | C(i+1:n)])$.
- d) $i < k = j$ 일 때, $k = n$ 이면 $P = (H[s, v_{n-1}^s | C(1:n-1)], t)$. 그렇지 않으면 $P = (H[s, v_{j-1}^s | C(1:k-1)], H[v_n^s, v_{k+1}^s | C(k+1:n)], t)$.

경우 2.3 $s \in W$

t 와 인접한 $R(3)$ 에 있는 정점을 t' 라 하고 v_j^s 으로 가정하자. 이때 t' 는 s 또는 v_f 와 인접하지 않아야 한다. $G \setminus R(1:2)$ 에는 s 와 v_j^s 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 다음과 같이 존재한다. $i < j$ 로 가정한다.

경우 2.3.1 $t \in W$ 인 경우(그림 9(c)).

- a) $k = n$ 이면, $P = (H[s, v_{i-1}^s | C(1:i)], v_i^s, H[v_{i+1}^s, \dots, v_{j-1}^s | C(i+2:n-1)])$.
 - b) $j > k$ 이면, $P = (H[s, v_{j-1}^s | C(1:k-1)], v_n^s, H[v_{n-1}^s, v_j^s | C(k+1:n)])$.
 - c) $j < k$ 이면, $P = (H[s, v_{j-1}^s | C(1:j-1)], v_n^s, H[v_{n-1}^s, v_{k+1}^s | C(k+1:n-1)], v_k^s, v_{k-1}^s, H[v_{k-2}^s, v_j^s | C(j:k-2)])$.
- 경우 2.3.2 $t \in B$ 인 경우 (그림 9(d)).
- a) $k = n$ 이면, $P = (H[s, v_j^s | C(1:n-1)])$.

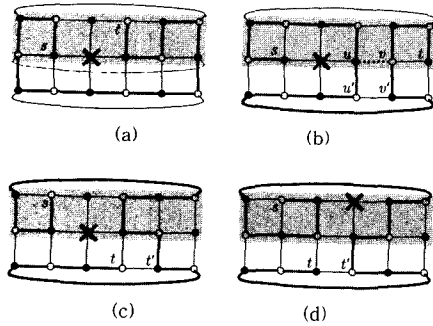


그림 9 보조정리 10 증명의 설명

- b) $j > k$ 이면,
 $P = (H[s, v_j^1 | C(1:k-1)], H[v_n^1, v_j^2 | C(k+1:n)]).$
- c) $j = k$ 이면,
 $P = (H[s, v_j^1 | C(1:k-1)], v_n^1, H[v_{n-1}^1, v_{k+1}^2 | C(k+1:n-1)], v_j^2).$
- d) $j < k$ 이면,
 $P = (H[s, v_j^1 | C(1:j-1)], v_n^1, H[v_{n-1}^1, v_{k+1}^2 | C(k+1:n-1)], v_k^2, H[v_{k-1}^2, v_j^3 | C(j:k-1)]).$

P'' 를 $G \setminus R(3)$ 에 있는 v_j^3 과 t 를 잇는 길이 $n-1$ 인 경로라 하면 1-정점 고장 L^{opt} -경로 $P = (P', P'')$ 를 생성할 수 있다.

경우 3. $s, t \in R(3)$

$v_j \in R(2)$ 이면 $s, t, v_j \in R(2;3)$ 이므로 위의 경우 1의 방법을 이용하여 경로를 생성할 수 있다. 따라서 $v_j \in R(1)$ 인 경우만을 고려한다.

경우 3.1 $s, t \in B$.

- a) $i < j < k$ 일때,
 $P = (H[s, v_{j-1}^1 | C(1:j-1)], H[v_j^1, v_{k-1}^2 | C(j:k-1)] \cap R(1:2), v_k^2, H[v_{k+1}^2, v_n^2 | C(k+1:n)] \cap R(1:2), v_n^3, v_{n-1}^3, \dots, v_{j+1}^3, t).$
- b) $i < k < j$ 일 때,
 $P = (s, v_{i+1}^3, \dots, v_k^3, v_k^2, H[v_{k-1}^2, v_j^1 | C(i:k-1)] \cap R(1:2), H[v_{j-1}^1, v_j^1 | C(1:i-1)], H[v_n^1, t | C(k+1:n)]).$

경우 3.2 $s, t \in W$

- a) $i < k < j$ 일 때,
 $P = (s, v_{i+1}^3, \dots, v_k^3, v_k^2, H[v_{k-1}^2, v_j^1 | C(i:k-1)] \cap R(1:2), v_{i-1}^2, H[v_{i-2}^2, v_j^1 | C(1:i-2)],$

$$H[v_n^1, v_{j+1}^1 | C(j+1:n)], v_j^1, \dots, v_{k+2}^1,$$

$$H[v_{k+2}^2, t | C(k+1:j)] \cap R(2:3)).$$

- b) $i < j < k$ 일 때, $P = (s, H[v_{i-1}^3, v_{i-1}^1 | C(1:i-1)], v_i^1,$

$$H[v_{i+1}^1, v_{j-2}^1 | C(i+1:j-2)],$$

$$H[v_{j-1}^1, v_{k-1}^2 | C(j-1:k-1)] \cap R(1:2),$$

$$v_k^2, H[v_{k+1}^2, v_{k+1}^3 | C(k+1:n)], v_k^1, \dots, t).$$

경우 3.3 $s \in W, t \in B$

- a) $i < k < j$ 일 때,

$$P = (s, v_{i+1}^3, \dots, v_k^3, v_k^2,$$

$$H[v_{k-1}^2, v_j^2 | C(i:k-1)] \cap R(1:2), v_{i-1}^2,$$

$$v_{i-1}^1, H[v_{i-2}^1, v_j^1 | C(1:i-2)], H[v_n^1, t | C(k+1:n)]).$$

- b) $i < j < k$ 일 때,

$$P = (s, v_{i+1}^3, \dots, v_{j-1}^3,$$

$$H[v_{j-1}^1, v_j^1 | C(i:j-1)] \cap R(1:2),$$

$$H[v_{i-1}^1, v_j^3 | C(1:i-1)], H[v_n^3, v_{k-1}^3 | C(k+1:n)],$$

$$v_k^3, \dots, t). \square$$

정리 3. $m \geq 2, n \geq 4$ (n 짝수)인 그래프 $M_2(m, n)$ 는 1-정점 고장 강한 해밀톤 laceable 그래프(1-vertex fault strongly hamiltonian laceable)이다.

증명 m 에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 두 정점을 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P 가 존재함을 보인다. $m=2$ 인 경우 보조정리 3에 의해, $m=3$ 인 경우 보조정리 9에 의해 성립한다. $m \geq 4$ 인 경우 다음 경우들로 나누어 위 정리가 $m-1$ 일 때 성립한다고 가정하고 m 일 때 성립함을 보인다. 두 정점 s 와 t 를 각각 v_i^s, v_j^t 라 하고 $i \leq j$ 로 가정한다. v_j 가 $R(m-1), R(m)$ 에 속한 경우는 각각 v_j 가 $R(2), R(1)$ 에 속한 경우로 대응시켜 생각할 수 있으므로 일반성을 잃지 않고 고장 정점 v_j 는 $R(1:m-2)$ 에 속한 흰색 정점으로 가정한다.

경우 1. $s, t \in R(1:m-1)$

$m-1$ 행에 램 어라운드 에지 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 가 존재한다고 가정하면 $G \setminus R(1:m-1)$ 에는 귀납가설에 의해 s 와 t 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 이때 P' 가 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1}) 를 지나면 $(v_1^{m-1}, H[v_1^m, v_n^m | R(m)], v_n^{m-1})$ 경로로 대신하여 P 를 생성할 수 있다(그림 10(a)). 그렇지 않으면 P' 에서 $G \setminus R(m-1)$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택한다. u, v 와 인접한 $R(m)$ 에 있는 두 정점을 각각 u', v' 라 하면 $G \setminus R(m)$ 은 링 형태이므로 u', v' 을 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서

(u, v) 를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$ 를 추가하여 P'' 를 연결하면 P 를 생성할 수 있다(그림 10(b)).

경우 2. $s \in R(1:m-1), t \in R(m)$

경우 2.1 $s \in R(1:m-2)$

v_1^{m-2} 또는 v_n^{m-2} 중 검정 정점을 s' 라 하자. $s=s'$ 이거나 s' 에 인접한 두 정점이 v_f, s 이면 $R(m-2) \cap C(2:n-1)$ 에 있는 검정 정점을 s' 라 하자. $G \langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 s 와 s' 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 다음과 같이 존재한다. m 이 짝수일 때 s 또는 s' 가 v_n^{m-2} 이거나 m 이 홀수일 때 s 또는 s' 가 v_1^{m-2} 인 경우 보조정리 9에 의해 존재한다. 그렇지 않은 경우 m 이 짝수일 때 $P' = (H[s, v_n^{m-2} | R(1:m-3) \cap C(n-1:n)], H[v_n^{m-2}, s | R(1:m-2) \cap C(1:n-2)]), m$ 이 홀수일 때 $P' = (H[s, v_1^{m-2} | R(1:m-3) \cap C(1:2)], H[v_1^{m-2}, s | R(1:m-2) \cap C(3:n)])$ 인 경로가 존재한다.

$R(m-1)$ 에 있는 정점들 중 s' 와 인접한 정점을 t' 라 하면 $G \langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 보조정리 8에 의해 t' 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P'' 가 존재한다. P' 와 P'' 를 연결하여 P 를 생성할 수 있다(그림 10(c)).

경우 2.2 $s \in R(m-1)$

$v_f \in R(2:m-2)$ 이면 경우 1과 같은 방법으로 P 를 생성할 수 있으므로 $v_f \in R(1)$ 인 경우만을 고려한다. s, t 가 모두 검정 정점인 경우 m 이 짝수일 때 v_2^{m-2}, v_n^{m-2} 를, m 이 홀수일 때 v_1^{m-2}, v_n^{m-2} 를 각각 u, v 라 하고 s, t 둘 중 하나라도 흰색 정점인 경우 v_1^{m-2}, v_n^{m-2} 를 u, v 라 하자. 그리고 이들과 인접한 $R(m-1)$ 에 있는 정점들을 각각 u', v' 라 하자. 보조정리 9에 의해 $G \langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 u, v 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} 경로 P' 가 존재한다. $G \langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 다음과 같이 s 와 u', v' 와 t 또는 s 와 v', u' 와 t 를 잇는 서로소인 경로 P_1, P_2 가 존재하며 이들을 이용하여 $P = (P_1, P', P_2)$ 인 1-정점 고장 L^{opt} 경로 P 를 생성할 수 있다. m 은 짝수로 가정한다.

경우 2.2.1 $s, t \in B$ (그림 10(d)). $t \in C(2)$ 이면 $P_1 = (s, u'), P_2 = (H[v', v_n^m | C(3:n) \cap R(m-1:m)], v_n^m, t), t \in C(3:n)$ 이면 $P_1 = (H[s, u' | C(1:n) \cap R(m-1:m)])$

$P_2 = (H[v', t | C(j+1:n) \cap R(m-1:m)]),$
 경우 2.2.2 $s \in W, t \in B$. $P_1 = (H[s, u' | C(1:n) \cap R(m-1:m)]), P_2 = (H[v', t | C(j+1:n) \cap R(m-1:m)]),$

경우 2.2.3 $s \in B, t \in W$ (그림 10(e)).

$P_1 = (s, v_n^{m-1}, \dots, u'), P_2 = (H[v', v_n^m |$

$C(j+1:n) \cap R(m-1:m)], v_n^m, \dots, v_n^m, H[v_n^m, t | C(i+1:n) \cap R(m-1:m)]).$

경우 2.2.4 $s, t \in W$ (그림 10(f)).

$P_1 = (H[s, v' | C(1:j-1) \cap R(m-1:m)]),$

$P_2 = (H[v', v_{j+1}^m | C(j+1:n) \cap R(m-1:m)], t).$

경우 3. $s, t \in R(m)$

<경우 2.2>와 동일하게 u, v 를 선택하고 $R(m-1)$ 에 있는 이웃한 정점들을 각각 u', v' 라 하자. $G \langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 보조정리 9에 의해 u, v 를 잇는 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. $G \langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 다음과 같이 s 와 u', v' 와 t 또는 s 와 v', u' 와 t 를 잇는 서로소인 경로 P_1, P_2 가 존재하며 이들을 이용하여 $P = (P_1, P', P_2)$ 인 1-정점 고장 L^{opt} -경로 P 를 생성할 수 있다.

경우 3.1 $s, t \in B$ <경우 2.2.1>과 동일.

경우 3.2 $s \in W, t \in B$ <경우 2.2.2>와 동일.

경우 3.3 $s \in B, t \in W$

$P_1 = (H[s, v_{j-1}^{m-1} | C(j-1) \cap R(m-1:m)], v_{j-1}^{m-1}, \dots, v')$

$P_2 = (H[u', v_1^m | C(1:i-1) \cap R(m-1:m)], v_n^m, \dots, t).$

경우 3.4 $s, t \in W$ <경우 2.2.4>와 동일. □

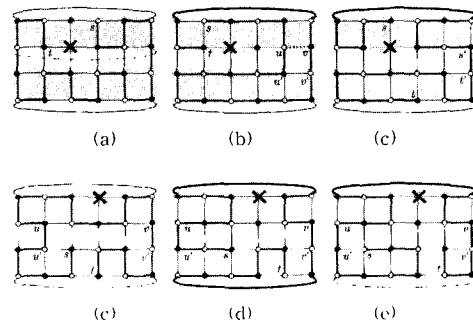


그림 10 정리 3 증명의 설명

4. 결론

본 논문에서는 $m \cdot n$ 메쉬 연결망의 첫 행과 마지막 행에 두개의 램어라운드 에지를 지닌 그래프 $M_2(m, n)$ 의 고장 해밀톤 성질들에 대해 고려하였다. $M_2(m, n)$ 은 n 이 홀수인 경우 해밀톤 연결된 그래프이며, 1-고장 해밀톤 그래프임을 보였다. n 이 짝수인 경우 $M_1(m, n)$ 은 강한 해밀톤 laceable 그래프이며, $M_2(m, n)$ 은 1-정점 고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보였다. 이러한 해밀톤 성질들은 토러스, 하이퍼큐브, k -ary n -큐브와

같이 $M_1(m, n)$, $M_2(m, n)$ 을 스페닝 부 그래프로 지닌 상호 연결망들의 고장 해밀톤 성질들을 밝히는데 쓰일 수 있다.

참고 문헌

- [1] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes. San Mateo, Calif.: Morgan-Kaufmann, 1992.
- [2] T. Leighton, B. Maggs and R. Sitaraman, "On the fault tolerance of some popular bounded-degree networks," *Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science*, pp. 542-552, 1992.
- [3] V. Balasubramanian and P. Banerjee, "A fault tolerant massively parallel processing architecture," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, Vol. 4, pp. 363-383, 1987.
- [4] M. Ajtai, N. Alon, J. Bruck, R. Cypher, C. T. Ho, M. Naor and E. Szemerédi, "Fault tolerant graphs, perfect hash functions and disjoint paths," *Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science*, pp. 693-702, 1992.
- [5] J. Bruck, R. Cypher and C. Ho, "Fault-tolerant meshes with small degree," *SIAM J. Computing*, Vol. 26, No. 6, pp. 1764-1784, 1997.
- [6] L. Zhang, "Fault-tolerant meshes with small degree," *IEEE Trans. Computers*, Vol. 51, No. 5, pp. 553-560, 2002.
- [7] H. C. Kim and J. H. Park, "Fault hamiltonicity of product graph of path and cycle," International Computing and Combinatorics Conference (COCO ON) 2003, accepted for publication.
- [8] S. Kim, S. R. Maeng and H. Yoon, "Embedding of rings in 2 D meshes and tori with faulty nodes," *Journal of Systems Architecture*, Vol. 43, pp. 643-654, 1997.
- [9] S. Y. Hsieh, G. H. Chen and C. W. Ho, "Hamiltonian laceability of star graphs," *Net works*, Vol. 36, No. 4, pp. 225-232, 2000.
- [10] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," *Combinatorial Mathematics VIII. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 881, pp. 23-31, 1981.
- [11] A. Itai, C. H. Papadimitriou and J. L. Czwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," *SIAM J. Computing*, Vol. 11, No. 4, pp. 676-686, 1982.
- [12] H. C. Kim and J. H. Park, "Fault hamiltonicity of two dimensional torus networks," Workshop on Algorithms and Computation (WAAC'00), pp. 110-117, 2000.
- [13] C. H. Tsai, J. M. Tan, Y. C. Chuang and L. H. Hsu, "Fault free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," Proceedings of the

ICS 2000 Workshop on Algorithms and Theory of Computation, pp. 74-77, 2000.

- [14] W. T. Huang, Y. C. Chuang, J. J. Tan and L. H. Hsu, "On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes," *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E85-A, No. 6, pp. 1359-1370, 2002.



박 경 옥

1996년 8월 순천대학교 전자계산학과(이학사). 1999년 8월 전남대학교 전산통계학과(이학석사). 2000년 3월~현재 전남대학교 전산학과 박사과정. 관심분야는 병렬 및 분산처리, 그래프 이론, 알고리즘



이 형 옥

1994년 2월 순천대학교 전자계산학과(이학사). 1996년 2월 전남대학교 전산통계학과(이학석사). 1999년 2월 전남대학교 전산통계학과(이학박사). 1999년 10월~2002년 2월 한국전산원(선임연구원). 2002년 3월~현재 순천대학교 컴퓨터교육과(전임강사). 관심분야는 그래프이론, 알고리즘, 병렬 및 분산처리



임 형 석

1983년 서울대학교 컴퓨터 공학과(학사). 1985년 한국과학기술원 전산학과(석사). 1993년 한국과학기술원 전산학과(박사). 1996년 8월~1997년 7월 미국 퍼듀대학교 전산학과 방문교수. 1987년~현재 전남대학교 컴퓨터정보학부 교수. 관심분야는 계산이론, 알고리즘, 병렬 및 분산처리