

## 전달행렬법에 의한 반구 원통형 셸구조의 해석

### An Analysis of Hemisphere-cylindrical Shell Structure by Transfer Matrix Method

김 용 희\* · 이 윤 영\*\*  
Kim, Yong - Hee · Lee, Yoon - Young

#### Abstract

Shell structures are widely used in a variety of engineering application, and mathematical solution of shell structures are available only for a few special cases. The solution of shell structure is more complicated when it has such condition as winkler foundation, other problems. In this study many simplified methods (analogy of beam on elastic foudation, finite element method and transfer matrix method) are applied to analyze a hemisphere-cylindrical shell structures on elastic foundation. And the transfer matrix method is extensively used for the structural analysis because of its merit in the theoretical backgroud and applicability. Therefore, this paper presents the analysis of hemisphere-cylindrical shell structure base on the transfer matrix method, The technique is attractive for implementation on a numerical solution by means of a computer program coded in FORTRAN language with a few elements. To demonstrate this fact, it gives good results which compare well with finite element method.

*Keywords : Analogy of beam on elastic foundation, Transfer matrix method, Hemisphere-cylindrical shell structures, Finite element method*

#### I. 서 론

축 대칭의 얽은 셸구조는 임의의 얽은 단면이 기준축을 중심으로 회전하여 발생하는 구조이다. 이것은 판과는 다르며 그 모양 자체가 외력에 저항하

는데 유리하게 되어있다. 특히, 셸구조를 'From resistant structure' 이라 하기 때문에 공학적 구조물인 주요건물의 돔, 항공기나 로켓의 외각, 저장 탱크 및 농업 구조물 등에 널리 사용하고 있다. 축 대칭 셸구조물은 다른 구조물에 비해서 하중 전달성이 매우 좋고, 형상이 아름다우며 경제적이다. 1910년대에 H. Reisner와 Meisner는 최초로 고전적인 탄성이론에 의한 미분 방정식을 세우고, 두께가 일정한 반구, 콘, 및 실린더 등에 대해서 엄밀해를 얻은 바 있고, Sptopski, Pearson, Dri-

\* 경남대학교 토목환경학부  
\*\* 경남대학교 대학원  
\* Corresponding author. Tel.: +82-55-249-2667  
fax: +82-55-249-2664  
E-mail address: kyhee@kyungnam.ac.kr

well, Adkins, Soare에 의하여 컴퓨터를 이용한 유한 차분법으로 체계화 되었으나 아주 작은 요소를 사용하면서도 좋은 수렴 정도를 얻지 못했다.<sup>4)</sup>

Grafton과 Strome<sup>3)</sup>은 직접강성법에 의한 유한 요소법을 개발하여 충분한 해를 구하였으나, 셸은 유한 요소들의 자유도(degree of freedom)의 수가 대단히 많기 때문에 컴퓨터의 기억용량을 많이 사용할 뿐만 아니라 계산시간도 길어지게 되었다. 본래 평판요소나 곡면판요소를 사용하여 셸구조를 해석하는 것은 축대칭 구조가 아닌 임의 형상의 셸 구조의 근사해석을 위한 것이므로 축대칭 셸 구조에도 가능하나 축대칭성을 전혀 고려하지 않은 것은 비경제적이라고 판단된다. 회전축을 포함하는 대칭단면의 절반을 고려하면 축력과 저판은 축대칭 셸구조의 대상 평면도형이 되고, 이러한 평면도형을 축에 대하여 360°회전한 구조로 생각하여 최근 Tin-Loi, Pumano, Thambiratnam<sup>10)</sup>는 유사탄성 지반보(analogy of beam on elastic foundation) 개념을 도입하여 축대칭 하중이 작용하는 원통형 셸과 원추형 셸을 연구하였다.

유한요소법과는 달리 행렬의 연속적인 곱셈을 주체로 한 방법이 전달행렬법(transfer matrix method)이며, 이 방법은 구조 요소의 물리적 조건을 만족하는 미분 방정식의 일반해 혹은 유한요소의 강성행렬 등으로부터 유도될 수 있다. Hetenyi<sup>11)</sup> 초기조건의 방법에 의한 보의 해석법도 개념적으로는 전달행렬법을 사용하고 있으며, 일반적인 연속체, 임의 지지조건을 가지는 연속체, 평면 구조물 등에도 전달행렬법에 의한 해석이 이루어지고 있다.

본 연구에서는 Hetenyi<sup>11)</sup>와 Ghali<sup>7)</sup>의 유사탄성 지반보 개념과 지반 강성행렬을 도입하여 구조물을 몇 개의 유한 요소로 분할하여 각 요소 강성행렬을 전달행렬로 전환하여 전달행렬법에 의한 반구 원통형 셸 구조물을 해석하였으며, 유한요소법과 비교·분석하여 프로그램의 신뢰성을 입증하였다. 기초와 지반의 상호작용문제를 해결하기 위해 지반을 탄성체로 가정한 역학적인 모델인 Winkler지반을 채택

하여 해석하였다. 또한, 반구원통형셸 구조물에 프리스트레싱을 가함으로 보다 효율적인 농업 시설물을 설계하는데 자료를 제공하며 이러한 전달행렬법을 이용한 프로그램을 완성하여 축대칭 반구 원통형셸구조 해석의 복잡성을 간소화한 해석법을 제시하였다.

## II. 유사탄성지반보<sup>1)</sup>

Fig. 1과 같이 탄성 지반 위에 의하여 지지되고 등분포 연직하중( $q$ )을 받는 보의 처짐이 발생하게 되고, 처짐이 상하 어느 쪽으로 발생하더라도 지반 반력( $p$ )은 보에 작용한다고 가정하면, 탄성지반은 연속적으로 분포된 반력을 발생한다. 또한, 지반반력이 보의 처짐  $y$ 에 비례한다고 가정하면, 지반반력( $p$ )는 다음과 같은 식이 된다.

$$p = ky \dots \dots \dots (1)$$

여기서,

- $p$  : 지반반력 ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ ),
- $k$  : 지반반력 계수 ( $\text{kgf}/\text{cm}^3$ ),
- $y$  : 보의 처짐량 (cm)

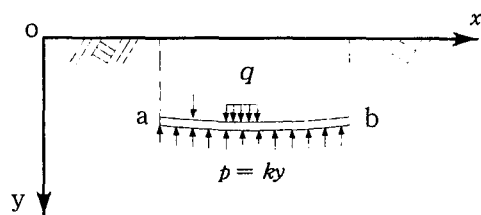


Fig. 1 Beam on elastic foundation

식 (1)을 고려하면 Fig. 1과 같이 탄성 지반위에 놓인 보의 미분방정식은 식 (2)과 같이된다.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky + q \dots \dots \dots (2)$$

여기서,

EI : 보 강성,  $y$  :보의 처짐

한편, Fig. 3과 같은 내압을 받는 원통형 쉘의 미분방정식은 식 (3)과 같다.

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{Eh}{r^2} w + q \dots \dots \dots (3)$$

여기서,

- D : 쉘 강성계수,
- w : 원주 방향의 변위,
- h : 원통형 쉘의 두께,
- r : 원통형 쉘의 반지름

식 (2)와 식(3)에서와 같이 유사성으로부터 축대칭 하중을 받고 있는 원통형 쉘의 길이 방향의 떠는 탄성지반위에 놓인 보로 생각 할수 있으며, 이러한 보를 유사탄성지반보라고 하고, 원통형 쉘을 뼈대구조로 가정하여 계산을 간략화 한다.

### Ⅲ. 요소강성행렬

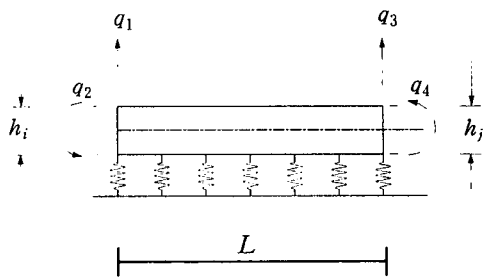


Fig. 2 A finite element of cylinder

Fig. 2와 같은 유사탄성지반상보를 적용하기 위하여 변위 함수( $v$ )를 다음과 같이 3차 다항식으로 가정하면 식 (4)와 같다.

$$v = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

$$\{v\} = [A]\{a\} \dots \dots \dots (4)$$

여기서,

$$[A] = [1 \ x \ x^2 \ x^3],$$

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}^T$$

$v$ 를  $x$ 에 관하여 미분하면 다음 식(5)와 같이 된다.

$$\frac{dv}{dx} = 0 + a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \dots \dots \dots (5)$$

절점 변위를  $q_1, q_2, q_3, q_4$ 라고 하고, 이 절점 변위에 대한 식 (5)를 정리하면 다음 식 (6)과 같이 주어진다.

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\{q\} = [C]\{a\} \dots \dots \dots (6)$$

여기서,

- $\{q\}$  : 절점변위,
- $\{a\}$  : 변위함수의 미정계수,
- [C] : 절점변위 벡터와 미정계수벡터에 관련된 상수행렬

식 (4)와 식 (6)으로부터 다음과 같은 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$\{v\} = [A][C^{-1}]\{q\} \dots \dots \dots (7)$$

보에 대한 힘의 미분방정식은 다음식 (8)과 같고, 식(4)를 식 (8)에 대입하여 행렬식으로 표기하면 식 (9)와 같다.

$$M = D \frac{d^2 v}{dx^2} \dots \dots \dots (8)$$

$$M = D \frac{d^2}{dx^2} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)$$

$$= D \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$M = D[B](a) \dots \dots \dots (9)$$

여기서,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = [B](a),$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}$$

1. 원통형셸 요소 강성행렬

Fig. 3에서 힘에 의한 변형 에너지  $U_{Bc}$ 는 다음 식 (10)과 같이 된다.

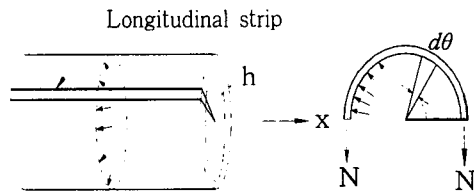


Fig. 3 Longitudinal strip of cylinder

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 v}{dx^2} D \frac{d^2 v}{dx^2} dx \dots \dots \dots (10)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^2 v}{dx^2} M dx$$

위 식 (10)에 식 (8), (9)를 대입하면 탄성에너지에 대한 다음 식 (11)이 성립 된다.

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} \int \{ [B](a) \}^T D [B] [C^{-1}](q) dx$$

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} \int \{ [B] [C^{-1}](q) \}^T D [B] [C^{-1}](q) dx$$

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} (q)^T [C^{-1}]^T \left[ \int [B]^T D [B] dx \right] [C^{-1}](q) \dots \dots \dots (11)$$

여기서,

$$[ \bar{k}_{Bc} ] = \int [B]^T D [B] dx$$

일정한 두께( $h$ )의 원통형 셸요소와 변화하는 두께( $h(x)$ )의 원통형 셸요소에 대한 셸 강성은 각각 식 (12), 식 (14)와 같다.

$$D = \frac{Ebh^3}{12(1-\nu^2)} \dots \dots \dots (12)$$

축대칭 유사탄성지반보의 힘강성 행렬(4×4)은 다음 식 (13)과 같다.

$$[ k_{Bc} ] = [C^{-1}]^T [ \bar{k}_{Bc} ] [C^{-1}] \dots \dots \dots (13)$$

또한, 탄성지반강성 계수( $k_{Fc}$ )는 식 (13)에서  $[ \bar{k}_{Bc} ]$ 대신  $[ \bar{k}_{Fc} ]$ 로 대입하면 다음 식 (14)가 된다.

$$U_{Fc} = \frac{1}{2} (q)^T [C^{-1}]^T [ \bar{k}_{Fc} ] [C^{-1}](q)$$

$$[ k_{Fc} ] = [C^{-1}] [ \bar{k}_{Fc} ] [C^{-1}] \dots \dots \dots (14)$$

여기서,

$$[ \bar{k}_{Fc} ] = \int_0^L [A]^T \frac{Eh}{r^2} [A] dx$$

- $r$  : 원통형 셸의 반지름,
- $L$  : 축대칭 원통형 셸의 길이,
- $t$  : 축대칭 원통형 셸의 두께

원통형 셸요소의 최종 완전한 강성행렬은 다음

식 (15)와 같이 된다.

$$[K_c] = [k_{Bc}] + [k_{Fc}] \dots \dots \dots (15)$$

2. 반구형 요소 강성행렬

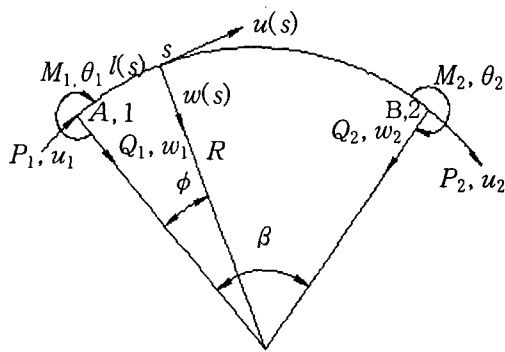


Fig. 4 Curved beam strip of hemisphere shell element

Fig. 3에서와 같이 탄성지반상의 보이론에 의해 해석되어진 것과 같은 방법으로 Fig. 4에서 반구형 셸을 탄성지반상의 곡선보로 간략화된 형태로 변환하였다.  $u(s)$ ,  $w(s)$ 를 각각 점s의 축방향 및 반경 방향의 변위로 하고,  $\theta(s)$ 를 회전각으로 하며, 여기서 s대신 파라미터  $\phi$ 를 이용해서 임의의 점 s의 전단력  $S(\phi)$ , 모멘트  $M(\phi)$ 는 좌단의 축하중  $P_1$ , 전단력  $Q_1$ , 모멘트  $M_1$ 으로 표시하면 다음 식 (16)과 식 (17)이 된다.

$$M(\phi) = M_1 + P_1 R(1 - \cos \phi) - Q_1 R \sin \phi \dots \dots (16)$$

$$S(\phi) = P_1 \cos \phi + Q_1 \sin \phi \dots \dots \dots (17)$$

힘과 축에 대한 변형에너지  $U_{sc}$ 는 다음식 (18)과 같이 된다.

$$U_{sc} = \frac{R}{2EI} \int_0^\beta M_\phi^2 d\phi + \frac{R}{2EA} \int_0^\beta S_\phi^2 d\phi \dots \dots (18)$$

위 식 (18)에 식 (16), (17)를 대입하면 탄성에너지에 대한 다음 식(19)가 성립 된다.

$$U_{sc} = \frac{R}{2EI} \left\{ \left[ M_1^2 + 2M_1 P_1 R + \frac{3}{2} P_1^2 R^2 + \frac{1}{2} Q_1^2 R^2 \right] \beta - (2M_1 P_1 R + 2 P_1^2 R^2) \sin \beta + \{ 2Q_1 M_1 R + 2Q_1 P_1 R^2 \} \cos \beta - \frac{1}{2} Q_1 P_1 R^2 \cos 2\beta + \frac{1}{2} Q_1 P_1 R^2 + \frac{1}{4} (P_1 R^2 - Q_1 R^2) \sin 2\beta + \frac{I}{A} \left\{ P_1^2 \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta \right) - \frac{1}{2} Q_1 P_1 (\cos 2\beta - 1) + Q_1^2 \left( \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{4} \sin 2\beta \right) \right\} \right\} \dots \dots (19)$$

Castigliano의 정리를 이용하여 절점 1 변위를 나타내면 다음 식 (20)과 같이 된다.

$$w_1 = \frac{\partial U}{\partial Q_1}, \theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1}, u_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} \dots \dots \dots (20)$$

식 (20)으로부터  $[k_{11}]$ 을 얻을 수 있고, 우단 절점2의 힘의 평형 방정식을 이용하면  $P_2, Q_2, M_2$ 으로부터  $[k_{12}]$ 을 얻을 수 있으며, 강성행렬의 대칭성으로부터  $k_{12} = k_{21}^T$ 의 관계가 있다. 식 (18)과 식(19)에서 절점의 축방향력, 모멘트, 전단력을 고려하면 적분구간  $[\beta, 0]$  영역을 적용하여  $[k_{22}]$  얻을 수 있고, 반구형 셸의 축방향 및 힘 강성행렬은 다음 식(21)과 같이 된다.

$$[k_{sc}] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \dots \dots \dots (21)$$

Fig. 5에서 유사탄성지반보 요소의 탄성지반 강

성행렬( $k_{SFc}$ )는 식 (11)에서  $[\bar{k}_{Bc}]$  대신  $[\bar{k}_{SFc}]$  로 대입하면 다음 식 (22)가 된다.

$$U_{SFc} = \frac{1}{2} (q)^T [C^{-1}]^T [\bar{k}_{SFc}] [C^{-1}] (q)$$

$$[k_{SFc}] = [C^{-1}] [\bar{k}_{SFc}] [C^{-1}] \dots\dots\dots (22)$$

여기서,

$$[\bar{k}_{SFc}] = \int_0^L [A]^T \frac{Ebh}{R^2} [A] dx$$

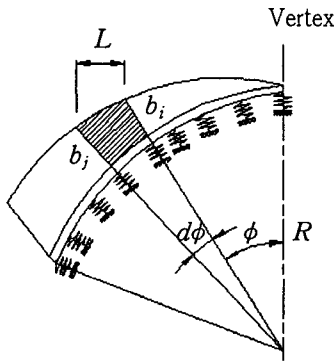


Fig. 5 Foundation modulus of hemisphere shell element

지반 위에 놓여져 있을 경우에는 탄성지반반력 강성행렬( $k_{FSc}$ )는 식 (23)과 같이 된다.

$$U_{FSc} = \frac{1}{2} [q]^T [C^{-1}]^T \int_0^L [A]^T k b(s) ds$$

$$[A] [C^{-1}] (q)$$

$$[k_{FSc}] = [C^{-1}]^T [\bar{k}_{FSc}] [C^{-1}] \dots\dots\dots (23)$$

여기서,

$$[\bar{k}_{FSc}] = \int_0^L [A]^T k b(s) ds [A] ds$$

$$b(s) = b_i + \frac{b_j - b_i}{L}$$

$k$  : 지반반력 계수,  
 $L$  : 임의 축대칭 반구형셸의 길이

식 (21), 식 (22) 및 식(23)에서 완성된 강성행렬을 반구 원통형셸요소의 완전한 강성행렬로 표현하면 다음 식 (24)와 같이 된다.

$$[K_{SP}] = [k_{Sc}] + [k_{SFc}] + [k_{FSc}] \dots\dots\dots (24)$$

#### IV. 전달행렬법<sup>5)</sup>

##### 1. 전달행렬의 유도

임의 부재의 요소에 힘이 가해지면, 요소는 변형되면서 힘의 일부를 흡수한 후 이웃한 요소로 힘을 전달하게 된다. 부재의 좌·우절점에 벡터량이 존재함으로써 부재의 우측 혹은 좌측의 벡터량은 각각 좌측 혹은 우측 벡터량의 매개변수( $f$ )를 행렬로 표시한 것이 전달행렬( $TM$ )이 되며, 이러한 관계를 수식으로 표현하면 식(25)와 같다.

$$\{V\}^R = [TM] \{V\}^L \dots\dots\dots (25)$$

여기서,

- $\{V\}^R$  : 부재 우측의 변위 및 벡터량,
- $\{V\}^L$  : 부재 좌측의 변위 및 벡터량,
- $[TM]$  : 전달행렬

전달행렬은 처짐식 혹은 에너지 이론으로 유도될 수 있고, 또한 유한 요소법의 강성행렬로부터 유도될 수 있는데 여기서는 강성행렬로부터 전달행렬을 유도한다.

유한요소법에서는 요소의 양단의 절점하중 ( $P$ )는 강성행렬  $[K]$ 와 변위 ( $d$ )의 함수관계로 표시하는데 이를 행렬식으로 표현하면 식 (26)과 같이 된다.

$$\{P\} = [K] \{d\} \dots\dots\dots (26)$$

식 (26)의 강성행렬은 식 (27)과 같이  $i, j$  절점의 절점력과  $i, j$  절점 변위항을 정리할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

절점  $j$ 의  $\{d_j\}$ 와  $\{P_j\}$ 로 정리하면 다음 식 (28), 식(29)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \{d_j\} &= [k_{ij}]^{-1}\{P_j\} - [k_{ij}]^{-1}[k_{ij}]\{d_i\} \\ \{P_j\} &= [k_{jj}]^{-1}\{d_j\} + [k_{jj}]^{-1}[k_{ij}]\{P_i\} \\ &\quad - [k_{jj}][k_{jj}]^{-1}[k_{ij}]\{d_i\} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$$\{V\}^j = [TM]\{V\}^i \dots\dots\dots (29)$$

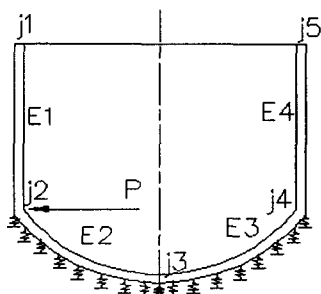
여기서,

- $\{V\}^j$  :  $j$ 절점의 절점력,
- $[TM]$  : 전달행렬

임의 요소의 강성행렬과 관련된 연립방정식인 식 (27)로부터 유도된 식 (29)와 같이 전달행렬로 전환하여 나타낼 수 있다.

## 2. 전달행렬의 적용

Fig. 6에서 반구 원통형 셸구조를 전달행렬법을 이용하려면 식 (29)를 이용하여 간단하게 식(30)과 같이 나타낼수 있다.



i1~5 : Node    E1~4 : Element

Fig. 6 Skeletonized hemisphere-cylindrical shell structure

$$\begin{aligned} \{V_b\} &= [TM_{E4}][TM_{E3}][TM_{E2}][TM_{E1}]\{V_{j1}\} \\ &\quad - [TM_{E4}][TM_{E3}][TM_{E2}]\{P\} \\ &\quad - [TM_{E4}][TM_{E3}] \\ &\quad - [TM_{E4}] \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

여기서,

- $[V_{j1}]$  : 1번 부재의 1절점의 절점력,
- $[V_b]$  : 4번 부재의 5절점의 절점력,
- $[TM_{E1-4}]$  : 1~4번 요소의 전달행렬

식 (30)에서  $\{V_b\}$  및  $\{V_{j1}\}$ 만이 미지수이므로 식 (31)과 같이 정리할 수 있다.

$$\{V_b\} = [TM]\{V_{j1}\} - \{C\} \dots\dots\dots (31)$$

식 (30)을 다시 정리하면 다음 식 (32)과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ V_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [TM_{11}] & [TM_{12}] \\ [TM_{21}] & [TM_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{j1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

식 (32)와 같이 다른 절점의 절점력을 같은 방법으로 순차적으로 구할 수 있다. 축대칭의 특성을 이용하여 Fig. 6의 해석 단면을 대칭 단면 E1, E2 요소에 한정하면 대상 부재수를 줄일 수 있다.

## V. 프로그램의 검증

### 1. 해석 모델

탄성지반 위에 놓인 축대칭 반구 원통형 셸구조의 해석을 간략화 하기 위해서 유사탄성보, 유한요소법 및 전달행렬법에 의한 해석을 Fig. 7의 반구 원통형셸 구조에 적용하였으며, 포와송 비, 반지름, 지반반력 계수, 탄성계수는 각각  $\nu=0.17$ ,  $R=10$  m,  $k=5,000$  tf/m<sup>3</sup>,  $E=2,100,000$  tf/m<sup>2</sup> 로 가정 하였다. 반구형셸 저판 및 원통형셸 벽체의 두께는

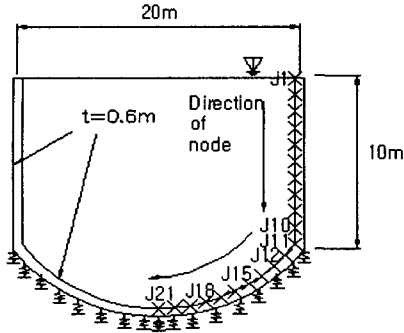


Fig. 7 Hemisphere-cylindrical shell structure on elastic foundation

모두 60 cm의 등단면으로 가정하였다. 축대칭 반구 원통형 셸 구조에 작용하는 하중은 내부에 채워진 물에 의하여 내수압만을 고려되어 완전한 축대칭 하중을 받는 것으로 가정하고, 콘크리트의 자중은 무시하였다. 본 논문에서 제시한 유사탄성지반보 및 지반 강성행렬의 개념을 통한 전달행렬법의 해석과 유한요소법에 의한 결과치와 비교·분석하였다.

탄성지반위에 축대칭 하중을 받는 반구 원통형 셸 구조의 프로그램 검증을 위하여 유한요소법에 의한 프로그램으로 반경방향 36개, 수직방향 20개의 요소로 나누어 해석하였다. 그 결과는 Table 1과 같고, 절점 10~12번에서 원통형 셸과 반구형 셸이 접합부 근처 보다 절점 15~18번 지점에서 반구형 셸에 최대 모멘트가 발생되었고, 저판의 중심으로 접근하면서 휨모멘트는 감소됨을 알 수 있었다. 수직변위는 거의 일정하게 발생하나, 원통형 셸 벽체 하단부에서 최대가 발생하였다. 해석 결과의 차이는 유한요소법과 비교한 결과 절점 19와 절점 20번에서 10% 미만의 차이가 발생하였고, 다른 절점에서는 5% 미만의 차이가 발생한 것으로 보아 수렴하는 정도가 좋다는 것을 알 수 있었다.

Table 1에서 두 해석법의 수렴하는 정도가 좋은 것은 전달행렬법에 사용된 전달행렬은 유한요소법에 사용된 강성행렬의 고유특성을 가지고 있기 때문인 것으로 판단되며, 각각의 절점에 발생하는 차

Table 1 Analysis results of hemisphere-cylindrical shell structure

No	Vertical displacement $\delta$ ( $\times 10^{-3}$ m)			Moment ( $\times 10^{-2}$ t · m)		
	F.E.M	T.T.M	Difference (%)	F.E.M	T.T.M	Difference (%)
1	-1.678	-1.677	0.06	-0.530	-0.520	1.92
2	-1.678	-1.677	0.06	-1.940	-1.923	0.88
3	-1.678	-1.677	0.06	-3.720	-3.716	0.11
4	-1.678	-1.677	0.06	-4.730	-4.690	0.86
5	-1.677	-1.676	0.06	-4.730	-4.690	0.86
6	-1.676	-1.676	-	-6.130	-6.120	0.16
7	-1.675	-1.673	2.76	25.500	25.460	0.16
8	-1.674	-1.674	-	56.540	56.500	0.07
9	-1.673	-1.674	0.06	91.130	91.080	0.06
10	-1.671	-1.673	0.12	156.300	157.470	0.74
11	-1.670	-1.672	0.12	102.570	105.850	3.10
12	-1.668	-1.671	0.18	102.571	105.910	3.15
13	-1.666	-1.668	0.12	22.350	22.290	0.27
14	-1.663	-1.664	0.06	52.000	52.160	0.31
15	-1.661	-1.661	-	121.330	121.410	0.07
16	-1.659	-1.658	0.18	235.210	236.110	0.38
17	-1.657	-1.653	0.24	316.060	316.160	0.03
18	-1.654	-1.654	-	316.061	316.180	0.04
19	-1.649	-1.648	0.06	-11.201	-12.340	9.23
20	-1.648	-1.648	-	-12.2011	-13.060	6.58
21	-1.648	-1.648	-	8.230	8.110	1.48

이는 전달 행렬법의 순차적인 연산 과정에서 발생하는 차이라고 할 수 있다.

절점 11~21번에서의 차이는 탄성지반 위에 놓인 반구형 셸구조는 원통형 셸의 변환으로부터 유도된 차이에 의한 것으로 판단된다. 유한요소법으로 셸을 해석할 경우 축대칭 구조의 셸이라도 많은 절점이 필요하고, 절점수에 대응하는 강성행렬을 포함하는 연립방정식을 풀기 위한 입력자료 작성과 출력 자료분석에도 많은 노력이 필요하지만, 유사탄성지반보의 개념, 지반 강성행렬을 축대칭 반구 원통형 셸 구조에 적용하여 평면 뼈대 구조로 전환



하여 전달행렬법에 적용함으로써 최종 연립 방정식 수를 대폭 감소시켜 간략화 할 수 있다.

### VI. 탄성지반에 대한 해석 및 결과분석

지반상의 상태는 우선 지반의 성질이 암반에서부터 점토에 이르기 까지 광범위하고, 하중이 균등할 지라도 저판하의 접지압 분포가 균등하지 않으며, 일반적으로 지반 반력의 분포는 기초저판과 지반의 상호적인 강도에 따라서 결정된다. 강도는 지반과 기초저판의 기하적, 구조적 물리적인 성질에 의해 좌우되어지며, 지반과 구조물 사이의 접지압 분포를 어떻게 해석하는 것이 탄성지반상의 구조물에 가장 큰 문제이다. 반구원통형셀 구조의 해석을 위해 자연 지반은 흙 입자의 모양, 크기, 흙의 구조, 응력이력, 투수성 등에 따른 역학적 거동이 대단히 복잡해서 현실적인 해석을 위하여 지반을 탄성체로 가정한 역학적인 모델인 Winkler지반을 채택하여, 지반과 기초의 상호작용문제를 해석에 적용하였다. Fig. 7에서 탄성지반계수를  $k = 500 \text{ tf/m}^3$ ,  $k = 5,000 \text{ tf/m}^3$  및  $k = 50,000 \text{ tf/m}^3$ 를 다르게 고려하여 비교·분석 하였다.

Fig. 8에서 탄성 지반 반력계수에 따른 모멘트의 차이는 절점 1~11번 원통형 셀에서 보다 절점 12~21번 반구형 셀에서 더 크다. 특히, 절점18에서는  $k=500$ 과  $k=50000$ 인 경우 (+)모멘트가

50 %의 감소를 보이며, 절점 20에서 (-)모멘트가 13%의 감소 되었다. 지반 조건의 상태는 구조물과 지반과의 상호적인 강도차이에 따라서도 크게 변화하므로 이론의 전개 및 설계에 반드시 고찰 되어야 될 것으로 판단된다.

### VII. 반구 원통형셀 구조에 프리스트레싱을 가한 경우에 대한 해석 및 결과분석

Fig. 9와 같은 대형 물탱크 구조물에서 지반 탄성계수는  $k = 5,000 \text{ tf/m}^3$  원통형셀구조에 프리스트레싱을 i) ①하단부~②0.2h=2.0m에 가한 경우, ii) ①하단부~③0.4h=4.0m에 가한 경우, iii) ①하단부~②0.2h=2.0m 및 ③0.4h=4.0m iv) 프리스트레싱을 가하지 않은 경우를 고려하여 상호 비교·분석 하였다.

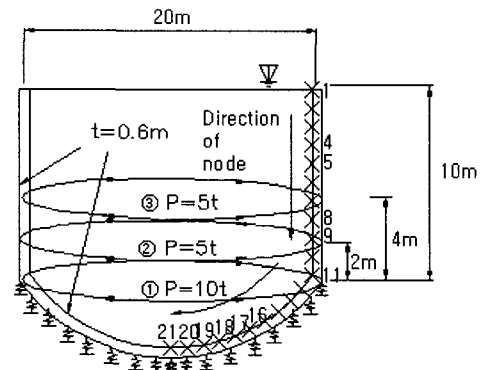


Fig. 9 Prestressing of shell structure

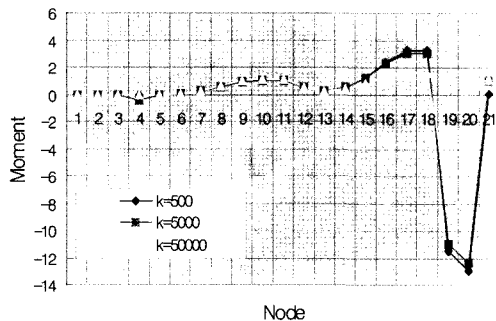


Fig. 8 Bending moment of structure resting on winkler foundation

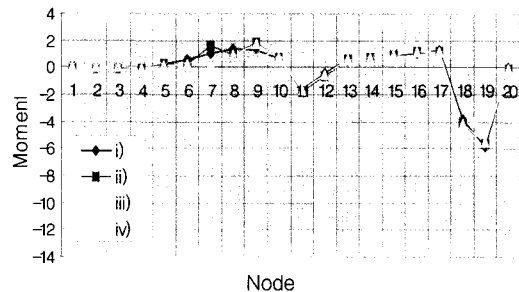


Fig. 10 Bending moment by prestressing of shell structure

Fig. 10에서 프리스트레싱을 하는 경우를 살펴 보면 iii)의 경우에서 절점 5~9번에 가장 작은 모멘트가 발생하였으며, 절점 9번에서 i)의 경우에서 가장 작은 모멘트가 발생하였다. 절점 12~21번까지는 모멘트의 차이가 거의 없었다. iv) 프리스트레싱을 하지 않은 경우에 비하여 프리스트레싱을 가한 경우는 반구형셸 부분에 효과적으로 모멘트를 감소시켜 프리스트레싱의 효율성을 증대할 수 있을 것으로 판단된다. 절점 8번과 9번에서는 iv)가 가장 작게 나타난 것은 내압의 비해 프리스트레싱의 크기와 위치에 따른 영향이라고 판단된다.

따라서, 원통형 셸에 가하는 프리스트레싱의 효과는 측벽 및 저판의 단면력을 결정적으로 개선할 수 있다. 반구셸 및 원통형셸 구조에 내수압 작용의 변화가 많을 경우에는 구조의 효율성을 고려하여 적절한 프리스트레싱을 하거나 오히려 보강재 또는 변단면을 설계하는 것이 바람직한 것으로 판단되며, 크리프와 건조수축의 비선형적인 거동과 지반의 탄성적인 거동 및 지반의 압밀 변위 등과 같은 비선형적인 거동 등 지속적인 연구가 필요하다.

## VIII. 결 론

본 논문에서 반구 원통형셸 구조 해석을 위하여 유사탄성지반보, 지반강성행렬의 개념을 통한 전달행렬법을 적용한 결과 아래와 같은 결론을 얻었다.

1. 탄성지반 위에 놓인 반구 원통형셸구조는 유사탄성지반보, 지반강성행렬을 통한 평면뼈대 구조로 전환하여, 전달행렬법 해석과 유한요소법을 비교한 결과 수렴의 정도의 차이가 5% 이내 차이를 나타내므로 프로그램의 신뢰성은 입증되었다.

2. 본 연구에서 반구 원통형셸 구조의 해석을 위해 자연 지반을 탄성체로 가정한 역학적인 모델인 Winkler지반으로 채택하여 지반과 기초의 상호작용 문제를 해석에 적용한 결과 절점 18에서는  $k=500$ 과  $k=50000$ 인 경우 (+)모멘트가 50%의 감소를 보이며 절점 20에서 (-)모멘트가 13%의

감소를 보였다.

3. 프리스트레싱을 가한 경우는 반구형셸 부분에 효과적으로 모멘트를 감소시켜 프리스트레싱의 효율성을 증대할 수 있었다.

## 감사의 글

본 연구는 경남대학교 학술논문게재 연구비에 의하여 지원되었음.

## References

1. Hetenyi, M., 1946, Beams on elastic foundation, *University of Michigan*, U. S. A, pp. 30-33.
2. Stephen, P. Timoshenko, and S.woin owsky-Krieger., 1959, The theory of plate and Shells.,Mcgraw-Hill., pp.56 2-608
3. Grafton Peter. E. and Strome Donald R., 1963, Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method. *Journal of AIAA*,(1), pp.101-124.
4. Popov Egor. P., Penzien Joseph, and Lu Zung-AN., 1964, Finite element solution for axisymmetrical shells" *Journal of the Engineering Mech nics Division, ASCE*, (90)5.
5. R. K. Livesley., 1975, Matrix method of structural analysis. Pergamon Press., pp. 116-182.
6. Rockey, K. C., Evans, H. R., Griffiths, D. W. and Nethercot, D., A., 1975, The finite element method. Crosby Lockwood Staples, London, pp.131-176.
7. Ghali, A., 1979, Circular storage tanks and silos. John Willy and Sons, New York, N. Y., pp.15-54.
8. Cho, H. Y., 1982, A finite element analysis concrete cylindrical sile on the elastic foundation. *Research Review of Pusan National Univ.*, pp.295-307. (in Korean)

9. Thevendram, V., 1986, A numerical approach to the analysis of circular cylindrical water tanks, *Computer and Structures*,(23) pp.379-383.
10. Pulmano. V. A, Tin Loi, F. and Thambiratnam, D., 1988, A simple analysis of cylindrical shell with varying wall thickness under axisymmetric loading, *Proceeding of International Conference on Trends in Structural Engineering*, Manila, Philippines.
11. Nam, M. H., Pulmano, V. A. and Tin Loi, F., 1989, A simple analysis of axisymmetrically loaded circular cylindrical tanks resting on elastic foundation, *Structural Engineering and Construction*, A. I. T. Thailand pp.9-15.
12. Tin Loi. F., Pulmano, V. A. and Thambiratnam, D. 1990, B. E. F analogy for axisymmetrically loaded cylindrical shells, *Computer and Structures*, 34(2), pp.281-285.
13. Lee, Y. Y., 2000, An analysis of several type shell structure resting on elastic foundation., *Civil Engineering department Gyeongsang University*, pp.27-112. (in Korean)