

TVD 기법을 이용한 불연속 흐름의 수치해석

A Numerical Analysis of a Discontinuous Flow with TVD Scheme

전 정 숙* / 이 봉 희** / 조 용 식***

Jeon, Jeong-Sook / Lee, Bong-Hee / Cho, Yong-Sik

Abstract

A transcritical flow occurs when the width and slope of a channel are varying abruptly. In this study, the transcritical flow in a two-dimensional open channel is analyzed by using the shallow-water equations. A weighted average flux scheme that has flux limiter with a total variation diminishing condition is introduced for a second-order accuracy in time and space, and non-spurious oscillations at discontinuous points. A HLLC method with three wave speeds is employed to calculate the Riemann problem. To overcome difficulties resulting from variation of channel sections in a two-dimensional analysis of transcritical flow, the numerical model is developed based on a generalized grid system.

Keyword : shallow-water equations, TVD scheme, HLLC method, transcritical flow, grid generation

요 지

본 연구에서는 천수방정식을 이용하여 2차원 개수로에서 하상과 하폭이 급격히 변화하는 경우에 발생하는 천이류를 해석하였다. 불연속점 근처에서 발생하는 수치진동을 제어하면서 시간과 공간에 대한 2차 정확도를 확보하기 위하여 WAF 기법에 TVD 조건을 갖는 흐름을 제한자를 도입하였으며, Riemann해를 계산하기 위하여 3개의 전파속도를 고려하는 HLLC 방법을 이용하였다. 개수로에서 단면변화를 고려한 2차원 해석을 할 경우, 격자 구성과 경계 처리에서 어려움이 발생한다. 이와 같은 어려움을 해결하기 위하여 일반좌표계를 도입하여 하폭이 변화하는 구간에 발생하는 천이류를 수치모의하였다.

핵심용어 : 천수방정식, TVD 기법, HLLC 방법, 천이류, 좌표변환

* 삼안건설기술공사 수자원부
Water Resources Division, Saman Engineering Consultants Co., Ltd.,
(E-mail : js1119@hanmail.net)

** 한양대학교 공과대학 토목공학과 박사과정
Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University
(E-mail : bh3007@lycos.co.kr)

*** 교신저자, 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수
Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University
(E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)

1. 서론

일반적인 하천에서는 대부분 상류(subcritical flow)만 나타나는 비교적 단순한 형태의 흐름이 발생하는데, 이런 흐름에서는 그 특성이 단순하게 전파되기 때문에 수치적으로 해석하는데 큰 어려움이 없다. 그러나 하천의 흐름은 각종 구조물과 지형적인 요인으로 인하여 영향을 받게 된다. 하천에 보가 있는 경우, 하폭이나 하상경사가 급격하게 변화하는 경우, 댐 여수로에서 발생하는 흐름 및 댐 붕괴시에 발생하는 흐름 등에서는 상류와 사류(supercritical flow)가 혼재된 흐름이 발생한다. 이러한 경우에는 사류에서 상류로 변화하는 구간에서 흐름이 불연속적으로 변화하는 천이류가 발생한다.

Garcia-Navarro 등(1992)은 TVD-MacCormack 기법을 개발하여 1차원 Saint Venant 방정식을 풀어 하상경사가 급변화하는 경우 및 하폭이 변화하는 경우에 발생하는 천이류를 해석하였으며, Meselhe 등(1997)은 Garcia-Navarro 등(1992)의 연구에서 적용된 지형을 Saint Venant 방정식을 해석하여 MESH 기법으로 수치모의하였다. Jha 등(1995)은 Beam-Warminig 기법을 사용하여 댐붕괴파를 해석하였다. Garcia-Navarro와 Alcrudo(1993)는 유한체적법에서 Godunov 기법을 이용하여 2차원 불연속 흐름을 해석하였다. 또한, Mingham과 Causon(1998)은 유한체적법을 이용하여 1차원 댐붕괴파를 해석한 바 있다.

국내에서도 최근 들어 천이류의 수치해석에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 오성택 등(1998)은 1차원 Saint Venant 방정식을 이용하여 도수를 모의하였고, 윤태훈과 이종욱(1999)은 일반좌표계(generalized coordinate)에서 개략 Riemann 해(approximate Riemann solver) 중의 하나인 Roe 기법을 이용한 풍상차분 기법으로 2차원 천수방정식을 풀어 천이류를 해석하였다. 또한, 김원(1999a)은 고정확도 기법을 음해적으로 해석하여 댐붕괴파와 같은 천이류의 수치적 거동을 연구하였다. 이종욱과 조용식(2001)은 TVD 기법으로 2차원 천수방정식을 해석하여 댐 붕괴파를 해석하였으며, 윤태훈 등(2002)은 유한체적법으로 2차원 천수방정식을 풀어 본류에 위치한 댐붕괴로 인한 급격한 수위상승으로 인하여 지류로 역류되는 흐름을 해석한 바 있다.

천이류의 수치해석에 있어서 가장 어려운 점의 하나는 불연속점 근처에서 발생하는 수치진동(spurious oscillations)을 억제하면서 고정확도(high resolution)

의 해를 구하는 것이다. 고정확도를 확보하면서 수치진동을 제거하기 위한 방법으로는 인공점성(artificial viscosity)을 이용하는 방법(Younus와 Chaudhry, 1994; Molls와 Chaudhry, 1995)과 TVD(Total Variation Diminishing) 조건을 만족하는 제한자(limiter)를 도입하는 방법(Jha 등, 1995; Fraccarollo와 Toro, 1995; 김원, 1999a)이 있다. 이러한 인공점성과 제한자를 이용한 다양한 고정확도의 수치기법이 개발되어 적용되고 있다.

본 연구의 목적은 하폭과 하상경사가 변화하는 구간에서 발생하는 천이류를 시간과 공간에 대하여 2차 정확도를 확보하면서 수치모의 하는 것이다. 시간과 공간에 대해 2차 정확도를 갖는 WAF(Weighted Average Flux) 기법에 흐름을 제한자를 도입하여 수치진동을 제거한 TVD형 WAF 기법으로 2차원 천수방정식을 해석하였다. 또한, Riemann 해를 구하기 위하여 3개의 전파속도를 고려한 HLLC 방법을 이용하였다.

또한, 본 연구에서 이용한 유한차분법은 격자의 형태가 직사각형으로 고정되어 있으므로 단면이 변화하는 2차원 문제를 수치해석함에 있어 격자 구성과 경계 처리에 어려움이 있다. 이러한 문제를 해소하기 위하여 좌표변환을 통한 일반좌표계(generalized coordinate)를 도입하였다.

2. 지배방정식

사류와 상류가 혼재하는 흐름에서는 사류에서 상류로 전환되는 부분에서 불연속 흐름이 발생한다. 이렇게 급격한 수위 변화가 발생하는 천이류에서는 정수압 분포를 가정할 수 없다(Basco, 1983). 따라서 동수압을 일부 반영한 Boussinesq 방정식을 해석해야 한다. Boussinesq 방정식을 유한차분법으로 해석하기 위해서는 3차 이상의 정확도가 확보되어야 하므로 수치해석의 과정이 복잡하고 어려워진다. 그러나 Rahman과 Chaudhry(1995)가 Boussinesq 항을 추가하고 MacCormack 기법을 이용하여 도수를 해석한 결과, Boussinesq 항의 추가가 흐름 계산의 결과에 거의 영향을 미치지 않는 것으로 밝혀졌다. 따라서 본 연구에서는 정수압 분포를 가정한 천수방정식으로 천이류를 해석하였다.

천수방정식은 Navier-Stokes 방정식에 정수압 분포 가정을 도입하고 수심 적분함으로써 유도된다. 이때 바람에 의한 응력과 전향력은 무시한다.

보존형 천수방정식을 행렬을 이용한 벡터형태로 표

현하면 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} - \mathbf{G} \quad (1)$$

식 (1)의 왼쪽에서 \mathbf{Q} 는 미지행렬, \mathbf{E} 와 \mathbf{F} 는 비점성 흐름률(invscid flux)을 나타내며 식 (2a)와 같다. 또한 식 (1)의 우변에서 \mathbf{E}_v 와 \mathbf{F}_v 는 점성 흐름률(viscous flux), \mathbf{G} 는 마찰경사(S_{fx})와 하상경사(S_{oy})로서 식 (2b)로 나타낼 수 있다(Chaudhry, 1993).

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_v = \nu_t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \nu_t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2b)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} gh(S_{fx} - S_{ox}) \\ gh(S_{fy} - S_{oy}) \end{pmatrix}$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad (3)$$

$$S_{ox} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{oy} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}$$

여기서, x 와 y 는 흐름방향과 하폭방향의 독립변수, h 는 전체 수심, u 와 v 는 각각 x 와 y 방향의 유속, g 는 중력가속도, z_b 는 하상고, ρ 는 밀도, ν_t 는 와점성계수를 의미한다.

3. 수치 해석

3.1 TVD형 WAF 기법

중앙차분기법은 물리적인 전파 특성을 반영하지 못하는 단점을 갖고 있다. 이를 해결하기 위하여 물리적 특성을 차분식에 반영할 수 있는 풍상차분기법(upwind scheme)이 개발되었다. Harten(1983)은 2차 이상의

정확도를 확보하면서 불연속점 근처에서 발생하는 수치진동을 제어하기 위하여 총변동량(total variation)을 제한하는 TVD 기법을 유도하였다.

본 연구에서는 수치진동을 제어하고 2차 정확도를 확보하기 위하여 TVD 조건을 갖는 흐름률 제한자를 WAF 기법에 부여하였다. WAF 기법의 흐름률 $f_{i+1/2}^{WAF}$ 는 식 (4)와 같이 적분 평균(integrated average)된 수치흐름률로 정의된다.

$$f_{i+1/2}^{WAF} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^{\frac{1}{2}\Delta x} f[u_{i+1/2}(x, \Delta t/2)] dx \quad (4)$$

WAF 기법의 수치흐름률 벡터 F 는 식 (5)와 같다.

$$F_{i+1/2}^{WAF} = \sum_{k=1}^{N+1} \beta_k F_{i+1/2}^{(k)} \quad (5)$$

여기서 N 은 Riemann 문제의 해에서 전파수(wave number)이고 β_k 는 가중치로 식 (6)과 같이 $A_{k-1}A_k$ 의 무차원 길이이다.

$$\beta_k = \frac{|A_{k-1}A_k|}{\Delta x} \quad (6)$$

$$\beta_k = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), \quad c_0 = -1, \quad c_{k+1} = 1 \quad (7)$$

식 (7)의 c_k 는 Courant수를 의미하므로 WAF 흐름률은 식 (8)과 같다.

$$F_{i+1/2}^{WAF} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N c_k \Delta F_{i+1/2}^{(k)} \quad (8)$$

여기서 $\Delta F_{i+1/2}^{(k)} = F_{i+1/2}^{(k+1)} - F_{i+1/2}^{(k)}$ 이다.

식 (8)의 WAF 흐름률 벡터에 흐름률 제한자를 부여하면 식 (9)의 TVD WAF 흐름률 벡터로 전환할 수 있다.

$$F_{i+1/2}^{TVD} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \text{sign}(c_k) \phi_k \Delta F_{i+1/2}^{(k)} \quad (9)$$

흐름률 제한자 함수 $\phi_{i+1/2}$ 는 r 과 $|c|$ 의 함수이며,

$r_{i+1/2}$ 는 상류 변동량(upwind change, Δ_{upwind})과 국부변동량(local change, Δ_{local})의 비로 표현된다.

WAF 제한자 함수로는 여러 식들이 제안되었는데, 본 연구에서는 이종욱 등(2001)이 권장한 SUPERBEE 형 제한자를 사용하였다. 또한, 천수방정식을 계산할 때 적용된 r 은 식 (20)과 같이 k 번째 파의 전파속도에 따라 변화하는 h 의 양에 의해 결정되었다.

$$r(k) = \begin{cases} \frac{h_i^{(k)} - h_{i-1}^{(k)}}{h_{i+1}^{(k)} - h_i^{(k)}} & \text{for } c_k \geq 0 \\ \frac{h_{i+2}^{(k)} - h_{i+1}^{(k)}}{h_{i+1}^{(k)} - h_i^{(k)}} & \text{for } c_k < 0 \end{cases} \quad (10)$$

3.2 근사적 Riemann 문제

본 연구에서는 Riemann 문제를 해결하기 위하여 Fraccarollo와 Toro(1995)가 2차원 천수방정식에 적용한 바 있는 HLLC 기법을 이용하였다. HLLC 기법은 그림 1과 같이 3개의 전파속도 (S_L, S^*, S_R)을 반영하며, 이로 인해 구간 평균값은 Q_L, Q_L^*, Q_R^*, Q_R 의 네 개로 구분된다. 전파속도 S_L 과 S_R 의 값은 식 (11)과 같으며, 중간파 S^* 는 Toro(2001)가 제안한 식 (12)를 이용하였다.

$$S_L = u_L - a_L q_L, \quad S_R = u_R - a_R q_R \quad (11)$$

$$S^* = \frac{S_L h_R (u_R - S_R) - S_R h_L (u_L - S_L)}{h_R (u_R - S_R) - h_L (u_L - S_L)} \quad (12)$$

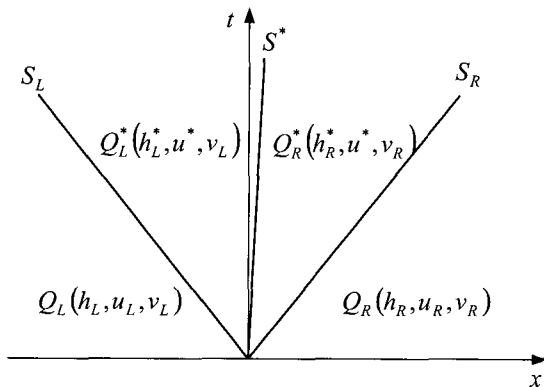


그림 1. HLLC기법의 구간 평균값

식 (11)에서 a_L 와 a_R 은 각각 $\sqrt{gh_L}$ 와 $\sqrt{gh_R}$ 를 의미하고, q_L 과 q_R 은 식 (13)와 같다.

$$q_K = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{(h^* + h_K) h^*}{h_K^2} \right]} & \text{if } h^* > h_K \\ 1 & \text{if } h^* \leq h_K \end{cases} \quad (13)$$

위 식에서 아래첨자 K 는 L 또는 R 이다.

$S_L \sim S_R$ 의 중간 구간에서의 수심과 속도는 Toro (2001)에 의해 제한된 식 (14)를 이용하여 계산하였다.

$$h^* = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (a_L + a_R) + \frac{1}{4} (u_L - u_R) \right]^2 \quad (14)$$

$$u^* = \frac{1}{2} (u_L + u_R) + a_L - a_R$$

그림 1은 x 방향의 성분만 고려한 것으로 Q_L^*, Q_R^* 지역의 x 방향 유속 성분인 u_L^* 과 u_R^* 은 둘 다 u^* 로서 동일하게 취급되며, y 방향 유속 성분인 v_L^* 과 v_R^* 은 각각 v_L, v_R 로 구분할 수 있다. 그리고 중간 구간에서의 수심 h_L^* 와 h_R^* 는 식 (15)에 의하여 구할 수 있다.

$$h_K^* = h_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - S^*} \right) \quad (15)$$

세 개의 전파속도 (S_L, S^*, S_R)의 값을 알면 비점성 흐름의 HLLC 수치흐름률은 식 (16)과 같이 구할 수 있다(Toro, 2001).

$$F_{i+1/2}^{HLLC} = \begin{cases} F_L & \text{if } 0 \leq S_L \\ F_L^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S^* \\ F_R^* & \text{if } S^* \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{if } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (16)$$

여기서 F_L^* 과 F_R^* 은 식 (17)과 같다.

$$\begin{cases} F_L^* = F_L + S_L (Q_L^* - Q_L) \\ F_R^* = F_R + S_R (Q_R^* - Q_R) \end{cases} \quad (17)$$

y방향에 대하여도 같은 방법을 적용하면 y방향에 대한 HLLC 수치흐름을 $F_{i,j+1/2}$ 를 계산할 수 있다.

3.3 좌표변환

다양한 형태로 변화하는 하천의 단면을 고려하기 위해서는 단면변화를 나타내는 y방향 방정식이 필요하다. 그러나 유한차분법의 격자는 직사각형으로 형태가 고정되어 있으므로 단면변화를 나타내는 y방향 방정식을 해석하기에는 격자 구성과 경계 처리에서 어려움이 발생한다. 이러한 문제점을 보완하기 위하여 변화하는 단면을 균일한 격자계로 전환하는 좌표변환을 도입한다.

변화가 발생하는 독립변수 y를 무차원화 된 독립변수 η 로 변환시키면 (x, y, t) 좌표계에서 (ξ, η, t) 좌표계로 바뀐다. 이로 인하여 종속변수 $f_n(x, y, t)$ 는 $F_n(\xi, \eta, t)$ 로 바뀐다(강주완과 이길성, 1991).

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y - y_R}{y_L - y_R} \quad (18)$$

식 (18)에서 y_R 는 오른쪽 폐경계, y_L 은 왼쪽 폐경계를 의미한다.

오른쪽 폐경계에서 $y = y_R$ 은 $\eta = 0$ 으로 치환하였으며, 왼쪽 폐경계에서 $y = y_L$ 을 $\eta = 1$ 로 치환하였다. 이렇게 직교좌표계를 일반좌표계로 변환하면 단면의 격자망이 매끄럽게 연결되어 폐경계에서 발생할 수 있는 문제를 최소화할 수 있다. 그러나 좌표변환에 의해 생성되는 항을 추가로 해석해야 하므로 수치해석이 어려워지며 계산시간이 다소 증가하는 단점이 있다(Hoffmann과 Chiang, 1993).

본 연구에서는 $f_n(x, y, t)$ 의 직교좌표계로 이루어진 천수방정식을 $F_n(\xi, \eta, t)$ 에 대한 식으로 변환하여 계산하였다. 이를 위해 식 (19)와 같은 Jacobian J 를 도입하였다.

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} \quad (19)$$

식 (19)에서 분모의 각 항 $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$ 는 수치적으로 계산되었다. 예를 들어, x_η 의 경우 내부 격자에서는 2차 정확도를 가지는 중앙차분으로 계산되었고, 경계지점에서는 2차 정확도의 전방차분 또는 후방차분

으로 계산되었다(Hoffmann과 Chiang, 1993).

일반좌표계의 2차원 천수방정식에 나타나는 편미분항 $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ 는 각각 식 (20)에 의해 계산된다.

$$\begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta \\ \xi_y &= -J x_\eta \\ \eta_x &= -J y_\xi \\ \eta_y &= J x_\xi \end{aligned} \quad (20)$$

4. 바닥 경사 변화 구간에서 발생하는 천이류

본 연구에서는 바닥 경사가 변화하는 구간에서 발생하는 천이류를 해석하기 위하여 보 월류시에 발생하는 천이류와 하상 경사 급변화 구간에서 발생하는 천이류에 대하여 수치모의 해보았다. 우선, 보 월류시에 발생하는 천이류를 모의하기 위해서 Garcia-Navarro 등(1992)과 Meselhe 등(1997)이 적용한 바 있는 식 (21)와 같이 변화하는 가상적인 하상을 설정하였다.

$$z = 5 \left\{ \sin \left[\pi \left(\frac{x - 125}{750} \right) \right] \right\}^2 \quad (21)$$

여기서 z 는 하상고이다. 하천단면은 하폭이 1.0m인 직사각형이고, 유량은 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ 이며, 조도계수는 0.015를 이용하였다. 격자 크기는 $\Delta x = 25 \text{ m}$, $\Delta y = 0.1 \text{ m}$ 로 설정하여 41×11 개의 격자망을 구성하였다. 또한, 상류에서는 $u = 2.0 \text{ m/s}$, $h = 10 \text{ m}$ 의 경계조건을 이용하였으며, 하류에서는 $h = 7 \text{ m}$ 의 경계조건을 이용하였다.

수치모의 결과 얻어진 수위변화를 에너지 방정식에 의해 계산된 해석해와 비교해보면 그림 2와 같이 매우 정확한 결과를 보이고 있다.

여기서, 해석해는 Garcia-Navarro 등(1992)이 언급한 바와 같이 식 (22)와 같은 에너지 방정식에 의해 계산되었다. 여기서 아래첨자 1은 구하고자 하는 지점의 값이고, 아래첨자 2는 기지의 값을 의미한다.

$$z_1 + h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{u_2^2}{2g} \quad (22)$$

$$h_1^3 + (z_1 - H_2)h_1^2 + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{B} \right)^2 = 0 \quad (23)$$

주어진 하도조건을 식 (22)에 대입하면 식 (23)와 같은 h_1 에 대한 3차 방정식을 얻을 수 있다. 여기서 H_2 는 식 (22)의 우변에 나타나는 기지의 총에너지(total energy)를 의미한다. 보 상류부에서는 상류경계조건으로 H_2 를 구했으며, 보 하류부에서는 하류경계조건으로 H_2 를 구하여 적용하였다. 모든 격자 지점에서 식 (23)를 Newton-Raphson 방법으로 풀어 수심을 구하였다. 보 상류부에서는 상류수심, 보 직하류부에서는 사류수심, 보 하류부에서는 상류수심을 계산하여 연결하면 그림 2

에 나타나는 해석해 구할 수 있다.

또한, 하상경사의 급변화에 의해 발생하는 천이류를 모의하기 위하여 Garcia-Navarro 등(1992)과 Meselhe 등(1997)이 적용한 바 있는 하폭이 8.0m인 직사각형 단면의 직선수로를 수치해석 하였다. 이 수로는 하도길이가 1000m로, 0~300m에서는 0.002, 300~600m에서는 0.009, 600~1000m에서는 0.001로 하상경사가 변화하며, 유량은 $20\text{ m}^3/\text{s}$ 이고 조도계수는 0.015을 이용하였다. $\Delta x = 20\text{ m}$, $\Delta y = 1.0\text{ m}$ 의 격자 크기

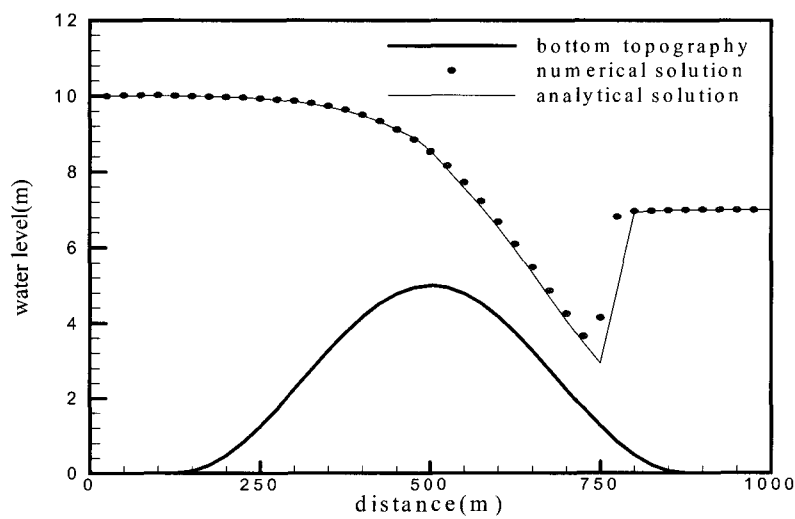


그림 2. 보 월류부에 발생하는 천이류의 수위 변화

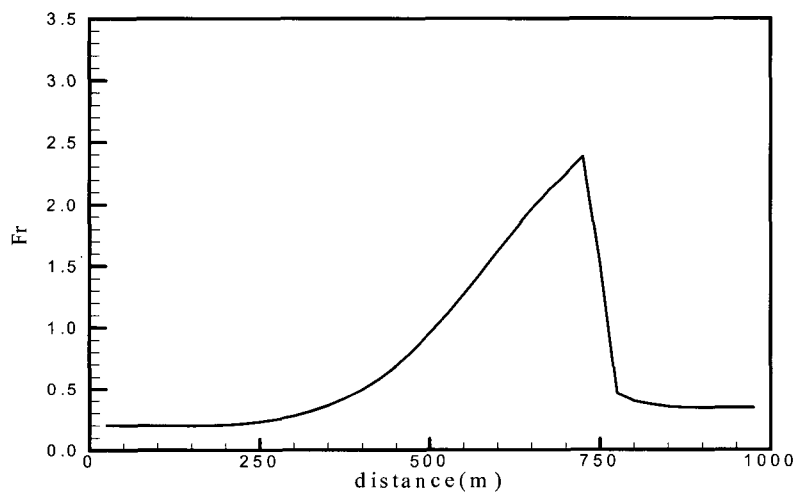


그림 3. 보 월류부에 발생하는 천이류의 Froude수 변화

를 설정하여 51×9개의 등간격 격자망을 구성하여 해석하였으며, 상류에서는 $u = 2.5 \text{ m/s}$, $h = 1.0 \text{ m}$, 하류에서는 $h = 2.5 \text{ m}$ 의 경계조건을 이용하였다.

그림 4에 나타나는 해석하는 Meseles 등의 연구에서 적용된 것과 같이 직접축차계산법(Direct Step Method; Henderson, 1966)에 의해 계산한 값이다. TVD 기법에 의해 계산된 수위는 급경사 부분 상류에서 해석해보다 약간 작은 값을 가지나 대체적으로 해석해와 근사한 값을 갖는다.

5. 하폭 변화 구간에서 발생하는 천이류

하폭이 변화하는 구간에서 발생하는 천이류를 해석하기 위하여 본 연구에서는 Khalifa(1980)가 실험하고 Younus와 Chaudhry(1994)가 수심 평균된 $\hat{k}-\hat{\epsilon}$ 난류 모형을 이용하여 Beam-Warming 기법으로 수치 모의한 바 있는 확대수로에 수치모형을 적용시켜 보았다. 또한, Garcia-Navarro 등(1992)과 김원(1999b)이 각각 TVD-MacCormack 기법과 ENO 기법을 이

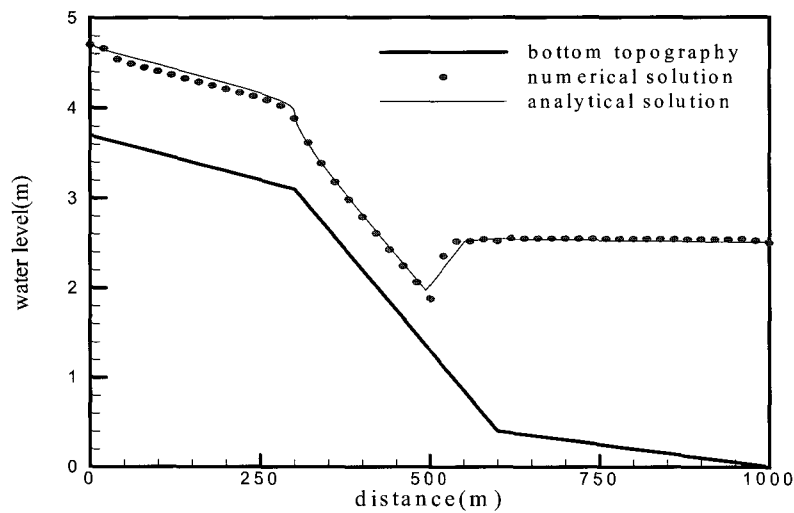


그림 4. 하상경사 급변화 구간에 나타나는 천이류의 수위 변화

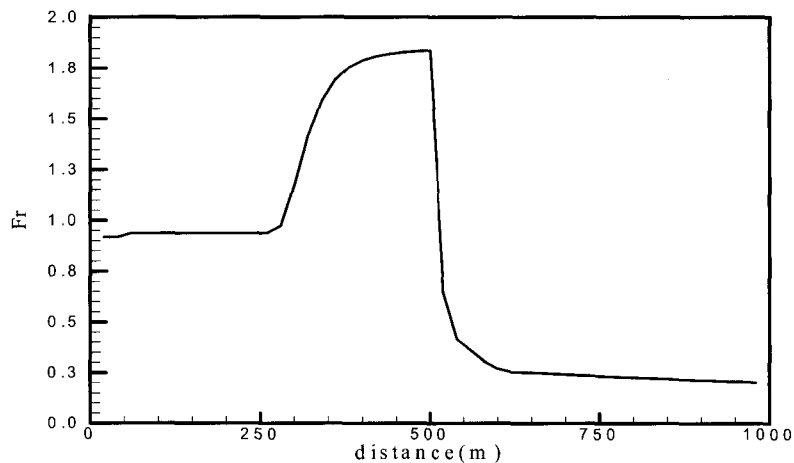


그림 5. 하상경사 급변화 구간에 나타나는 천이류의 Froude수 변화

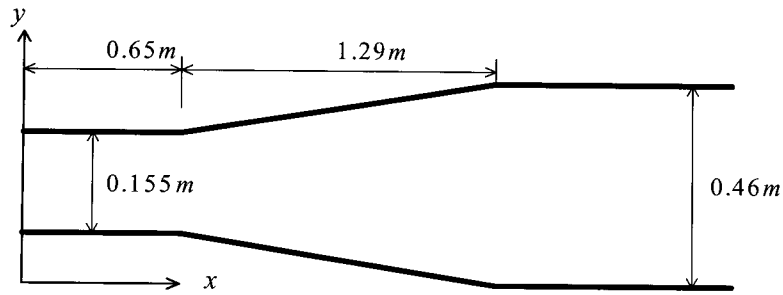


그림 6. 확대수로 수치모형 적용 지형

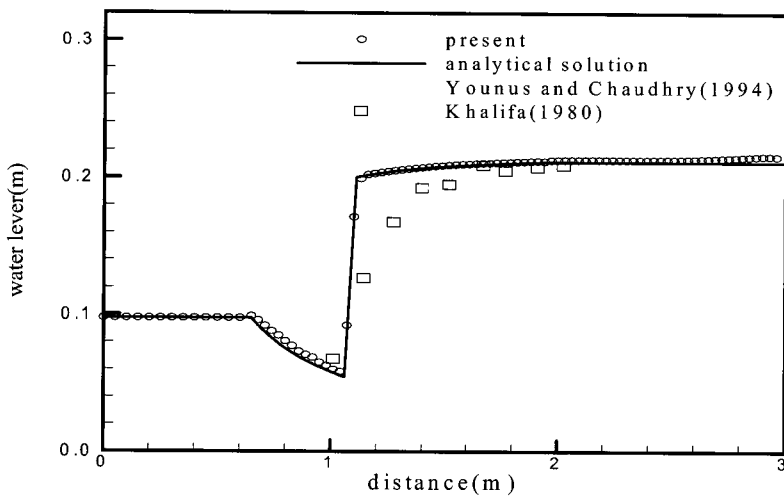


그림 7. 확대수로에서 발생하는 천이류의 수위 변화

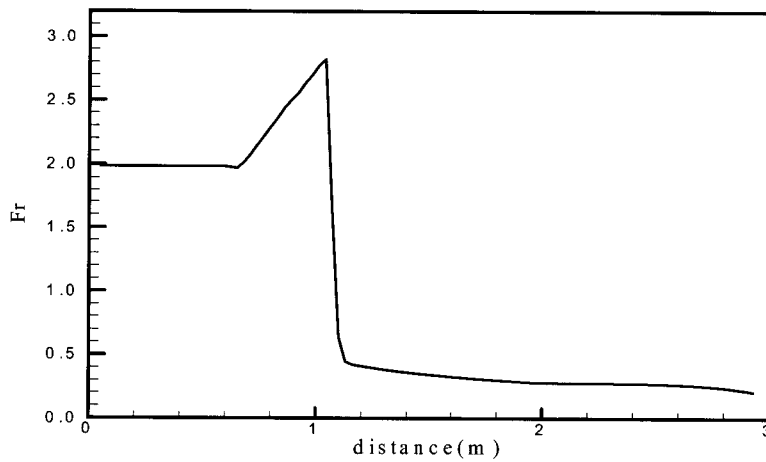


그림 8. 확대수로에서 발생하는 천이류의 Froude수 변화

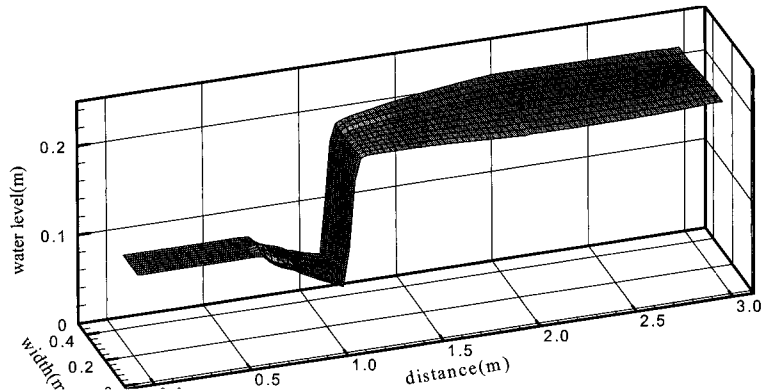


그림 9. 확대수로에서 발생하는 천이류의 3차원 수위 변화

용하여 1차원으로 해석한 바 있는 수로의 협착부에서 발생하는 천이류에 대하여도 수치모형을 적용시켜 보았다.

확대수로의 단면형태는 그림 6과 같이 변화한다. 조도계수는 Younus와 Chaudhry의 연구와 마찬가지로 0.0062를 이용하였으며 격자 크기를 0~0.65m 구간에는 $\Delta x = 0.05$ 를 이용하였으며, 확대부 이후 부분에는 $\Delta x = 0.03$ 을 이용하였다. 또한, 상류경계조건으로는 $h = 0.0946$ m, $u = 1.94$ m/s, $v = 0.00$ m/s를 이용하였으며 하류경계조건으로는 $u = 0.302$ m/s를 이용하였다. 단면변화를 나타내는 y방향 방정식을 해석하고 격자 구성과 경계 처리에서 발생하는 문제점을 해결하기 위하여 변화하는 단면을 균일한 격자계로 전환하는 좌표변환을 도입하였다.

그림 7에서 해석하는 에너지 방정식을 이용하여 모든 격자점에서의 수심을 구한 후, 확대부 상류에서 구한 사류 수심과 확대부 하류에서 구한 상류 수심을 연

결하였다. 그림 7에서 보여지는 바와 같이 Khalifa의 실험 결과와 Younus와 Chaudhry의 수치모의 결과와 유사한 경향을 보이며, 해석해에 더욱 근접한 결과를 보인다.

하천의 단면이 갑자기 좁아지면 상류에서 사류로, 다시 사류에서 상류로 변화하는 천이류가 발생하게 된다. Garcia-Navarro 등(1992)과 김원(1999b)은 각각 TVD-MacCormack 기법과 ENO 기법을 이용하여 수로의 협착부에서 발생하는 천이류에 대하여 1차원으로 해석한 바 있다.

본 연구에서는 Garcia-Navarro 등과 김원의 연구에서 적용된 단면을 이용하여 수로의 단면축소부에서 발생하는 천이류를 2차원으로 수치모의하였다. 수로의 총 길이는 500m로 0~100m 구간과 400~500m 구간에서는 하폭이 5m로 일정하고, 100~400m 구간에서는 식 (24)와 같이 하폭이 변화한다. 하폭이 가장 좁은 곳은 250m 지점으로 3.587m이다. 이 수로의

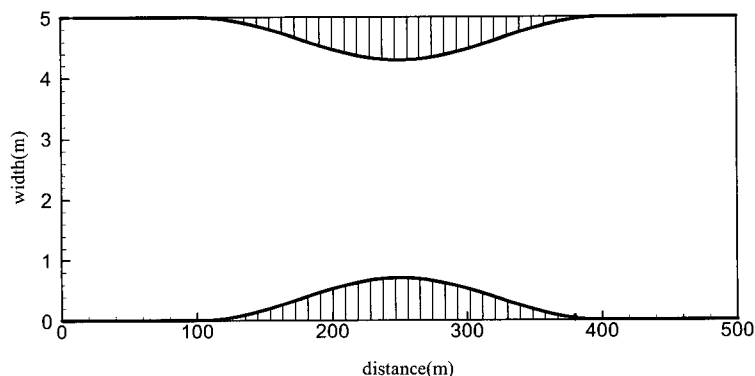


그림 10. 단면축소부가 존재하는 수로의 수치모형 적용 지형

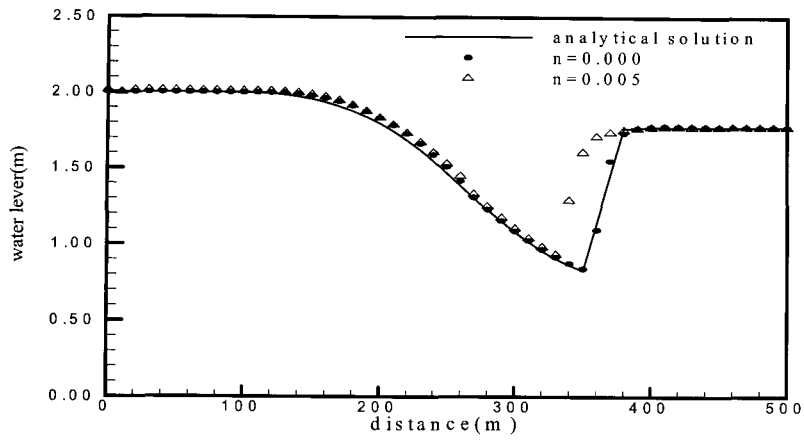


그림 11. 수로의 단면축소부에서 발생하는 천이류의 수위 변화

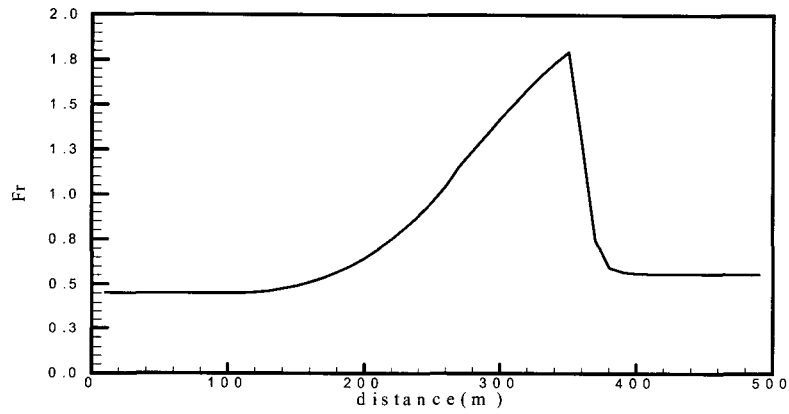


그림 12. 수로의 단면축소부에서 발생하는 천이류의 Froude수 변화

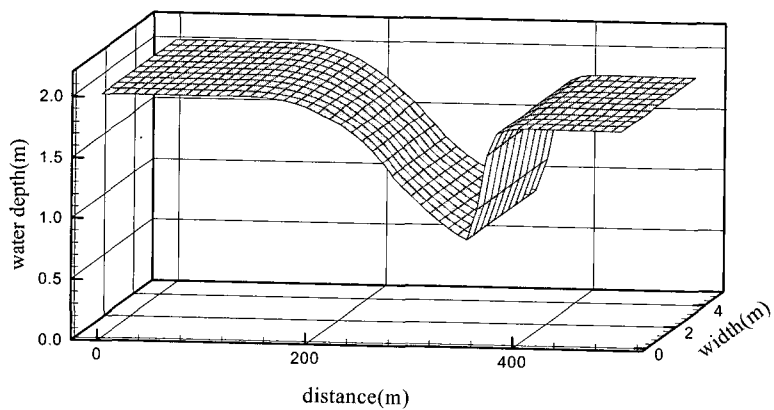


그림 13. 수로의 단면축소부에서 발생하는 천이류의 3차원 수위 변화

모양을 도식적으로 나타내면 그림 10과 같다. 경계조건으로는 상류에서 $h=2.00\text{ m}$, $u=2.00\text{ m/s}$, 하류에서 $h=1.775\text{ m}$ 이 사용되었다.

$$B = 5 - 1.413 \left\{ \sin \left[\pi \left(\frac{x-100}{300} \right) \right] \right\}^2 \quad (24)$$

그림 11의 해석에는 에너지 방정식을 적용하여 구한 3차 방정식을 모든 격자 지점에서 Newton-Raphson 방법으로 풀어 구하였다. 수로폭이 가장 좁은 250 m 이전 구간에서 상류수심을 구하고, 250 m 지점의 직하류부에서는 사류수심, 하류부에서는 상류수심을 계산하여 연결하여 구하였다. 그림 11에 나타난 바와 같이 수치모의 결과 얻어진 천이류의 수심은 해석해에 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

6. 결론

상류와 사류가 혼재하는 하천의 흐름에는 사류에서 상류로 전환되는 부분에서 불연속 구간이 존재하는 천이류가 발생한다. 본 연구에서는 천수방정식을 이용하여 하상경사와 하폭이 변화하는 2차원 개수로에서 발생하는 천이류를 수치모의하였다. 불연속 구간에서 발생하는 수치진동을 제어하면서 시간과 공간에 대한 2차 정확도를 확보하기 위하여 TVD 조건을 만족하는 흐름물 제한자를 도입한 TVD형 WAF 기법을 이용하였다. 또한, Riemann해를 구하기 위하여 3개의 전파속도를 고려한 HLLC 기법을 이용하였다.

수로 바닥의 경사가 변화하는 경우에 발생하는 천이류와 하폭이 변화하는 구간에서 발생하는 천이류를 2차원 천수방정식으로 해석한 결과, 기존의 연구나 해석해와 잘 일치하는 결과를 보였다. 그러나 본 연구에서는 가상의 수로에서 발생하는 흐름을 모의한 것이므로 실제 자연 지형에서 발생하는 흐름에 대하여 모의해 불필요가 있다.

감사의 글

본 연구는 산학연 공동기술개발 컨소시엄 (과제: 과학의 최대 처오름높이 예측 기술)으로 수행되었기에 이에 사의를 포함합니다.

참고 문헌

강주완, 이길성 (1991). "X-Y 수치모형에 의한 하구의 염도분포 분석." *한국해안해양공학회지*, 제3권,

- 제4호, pp. 197-208.
 김원 (1999a). *고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발*. 박사학위논문, 경북대학교.
 김원 (1999b). "댐붕괴파 해석을 위한 수치기법 개발." *한국건설기술연구원 연구보고서*.
 오성택, 황승용, 이길성 (1998). "흐름물 분리방법에 의한 도수의 수치해석." *대한토목학회논문집*, 제18권, 제II-3호, pp. 215-221.
 윤태훈, 강석구, 이지승 (2002). "본류 수위 급상승에 의한 지류 역류 해석." *대한토목학회논문집*, 제22권, 제1-B호, pp. 33-41.
 윤태훈, 이종욱 (1999). "불연속흐름의 2차원 수치해석." *대한토목학회논문집*, 제19권, 제II-4호, pp. 445-454.
 이종욱, 조용식 (2001). "TVD 수치모형의 개발: II. 천수방정식." *한국수자원학회논문집*, 제34권, 제2호, pp.187-195.
 이종욱, 조용식, 윤광석, 윤태훈 (2001). "TVD 수치모형의 개발: I. 선형 이송방정식." *한국수자원학회논문집*, 제34권, 제2호, pp.177-186.
 Basco, D.R. (1983). "Introduction to rapidly-varied unsteady, free-surface flow computation." *USGS, Water Resour. Invest. Report No. 83-4284*, U.S. Geological Service, Reston, U.S.A.
 Chaudhry, M.H. (1993). *Open-channel flow*, Prentice Hall.
 Fraccarollo, L. and Toro, E.F. (1995). "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, pp. 843-864.
 Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F. and Saviron, J.M. (1992). "1-D open channel flow simulation using TVD-McCormack scheme." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 118, No. 10, pp. 1359-1372.
 Garcia-Navarro, P. and Alcrudo, F. (1993). "TVD scheme in finite volumes for the simulation of 2D discontinuous flows." *Proc. XXV Congr. of IAHR*, Vol. 1, pp. 1-8.
 Harten, A. (1983). "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No. 3, pp. 357-393.

- Henderson, F.M. (1966). Open channel flow, *The MacMillan Company, New York*.
- Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T. (1993). Computational fluid dynamics for engineers—Volume I, *A Publication of Engineering Education System, Wichita, Kansas, U.S.A*.
- Jha, A.K., Akiyama, J. and Ura, M. (1995). “First and second-order flux difference splitting schemes.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, No. 12, pp. 877-884.
- Khalifa, A. (1980). “Theoretical and experimental study of the radial hydraulic jump.” *Ph. D. dissertation, University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada*.
- Meselhe, E.A., Sotiropoulos, F. and Holly, F.M. (1997). “Numerical simulation of transcritical flow in open channels.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 9, pp. 774-783.
- Mingham, C.G. and Causon, D.M. (1998). “High-resolution finite-volume method for shallow water flows.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 6, pp. 605-614.
- Molls, T. and Chaudhry, M.H. (1995). “Depth-averaged open-channel flow model.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, No. 6, pp. 453-465.
- Rahman, M. and Chaudhry, M.H. (1995). “Simulation of hydraulic jump with grid adaptation.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 4, pp. 555-569.
- Toro, E.F. (2001). Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. *John Wiley & Sons, Ltd*.
- Younus, M. and Chaudhry, M.H. (1994). “A depth-averaged k- ϵ turbulence model for the computation of free-surface flow.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 32, No. 3, pp. 415-444.

(논문번호:03-18/접수:2003.02.14/심사완료:2003.06.19)