The Korean Communications
in Statistics Vol. 10 No. 2, 2003
pp. 257-266

Estimation of slope β using the Sequential Slope in Simple Linear Regression Model

Yong Choi[1], Dongjae Kim[2]

Abstract

Distribution-free estimation methods are proposed for slope β in the simple linear regression model. In this paper, we suggest the point estimators using the sequential slope based on sign test and Wilcoxon signed rank test. Also confidence intervals are presented for each estimation methods. Monte Carlo simulation study is carried out to compare the efficiency of these methods with least square method and Theil's method. Some properties for the proposed methods are discussed.

Keywords : Regression, Point estimation, Sequential slope

1. 서론

의학, 사회학 등 많은 분야의 연구에서 두 변수 또는 여러 변수들을 측정하여 상호관련성을 알아보는 시험을 하게 된다. 단순히 두 변수 사이의 관계정도를 나타내는 것이라면 상관분석이 되고 두 변수의 관계를 선형관계로 나타내고 다음 관찰 값의 예측에 목적을 두는 것은 회귀분석이라 하겠다.

의학 조사에서는 때때로 한 변수의 값이 다른 변수의 값을 예측하는 것에 사용될 수 있도록 수학적인 함수식을 얻고자 한다. 예를 들면, 내과의사들은 환자의 나이에 기초하여 심장 발작을 일으켰을 때 환자의 생존시간을 예측할 수 있기를 바란다. 또는 주어진 고혈압 약의 용량에 대해서 환자의 혈압을 예측하고자 한다. 이 때에 나이 간격이 같고 또는 고혈압 약의 용량을 일정 간격을 가지고 투여하여 혈압을 측정하는 실험을 한다고 했을 때 이 두 변수들 사이의 직선식을 구하는 방법은 여러 가지가 있다.

모수적 방법의 하나인 최소제곱추정법은 오차들의 제곱합을 최소가 되게 하는 값을 추정량으로 하는데 모수적 방법의 단점은 모집단의 분포함수에 대해서 확실한 정보가 있을 때 적합하고 또 이상점이 존재하는 경우에 추정치는 이상점의 영향을 많이 받게 된다는 것이다. 따라서 모집단

1) Clinical Data Manager, Clinical Development Team, Yuhan Corporation, Seoul,156-754, Korea
2) Corresponding Author. Associate Professor, Department of Biostatistics, The Catholic University of Korea, Seoul, 137-701, Korea
E-mail : djkim@catholic.ac.kr

의 분포형태에 대해 가정을 하지 않고 측정치를 순위로 바꾸어서 이상점에 큰 영향을 받지 않는 비모수적 방법이 보다 좋은 방법이 될 수 있다. 그 방법 중의 하나로 서로 다른 두 점 사이의 기울기들의 중앙값을 회귀직선의 기울기의 추정량으로 사용하는 Theil(1950) 의 방법이 있다. Sen(1968) 은 Theil 의 통계량을 일반화시켜서 독립변수인 x가 동일한 값을 가질 경우에도 추정할 수 있는 방법을 제안하였다. 그러나 Theil 과 Sen 의 추정 방법은 모든 점들 사이의 기울기를 구해야하는 등 계산이 많아진다는 단점이 있다.

본 논문에서는 모수적 방법의 단점도 보완하며 적은 정보를 이용하여 계산을 단순하게 할 수 있도록 하는 비모수적 방법을 제시한다. 연속된 점들 사이($x_1 < x_2 < \cdots < x_n$)에서 순차기울기(Sequential slope), 즉

$$S_i = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

를 이용하여 회귀직선의 기울기를 추정하는 방법을 제안한다. 이러한 순차기울기로부터 Wilcoxon 의 부호검정(sign test)과 부호순위검정(signed rank test)에 근거한 추정법을 제안하였다. 또한 최소제곱추정법(Least Square Estimation), Theil 추정법과 몬테카를로 모의실험(Monte Carlo Simulation)을 통하여 추정치들의 평균들을 비교하고 구간 추정을 통해서 경험신뢰계수(Empirical Confidence Level)를 비교하였다.

2. 제안한 추정법

일반적인 단순선형 회귀모형은 독립변수의 정해진 값 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 에서 측정되는 종속변수 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$에 대하여, 다음의 관계식이 성립한다고 가정한다.

단순 선형 회귀모형.

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \qquad i = 1, \cdots, n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 은 기지의 상수이고 α, β는 회귀모수

가정 1. e 들은 서로 독립이다.

가정 2. e 들은 같은 연속분포를 갖는 확률변수이다.

가정 3. $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

가정 4. $x_j = x_i + a$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, $j = i+1$, a 는 상수이다.

이와 같은 모형에서 회귀계수 기울기 β를 순차기울기를 이용한 추정방법을 제안한다.

Theil 의 방법은 $N = \frac{n(n-1)}{2}$ 개의 기울기를 구하는데 본 논문에서 제안하는 방법은 좀 더 적은 정보를 이용하여 기울기를 추정하고자 한다. 데이터로부터 기울기를 구하기 위해서 먼저 $m = n-1$ 개의 순차 기울기 S_i 구한다.

$$S_i = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 1, \cdots, n-1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

이때 S_i 는 모형 (1)으로부터

$$S_i = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta x_{i+1} + e_{i+1}) - (\alpha + \beta x_i + e_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$= \beta + \frac{e_{i+1} - e_i}{x_{i+1} - x_i}$$

이므로,

$$E(S_i) = \beta$$

$$Var(S_i) = \frac{2\sigma^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

이다.

x들이 등간격이므로 S_i 들의 분산은 모두 같다. 그러므로 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 은 동일한 서로 독립인 분포를 갖는 확률 표본이다. 이로부터 기울기 β의 추정치를 구하는 것은 일표본 위치문제와 같은 상황이 된다. 일표본 위치모수를 추정하는 비모수적 방법으로 부호검정(sign test)과 부호순위검정(signed rank test)에 기초한 방법이 있다. 기울기 β의 추정치를 구하기 위해 위의 두 가지 방법을 이용한 추정법을 제안한다.

2.1 부호검정(sign test)에 기초한 추정량

먼저 부호검정(sign test) 에 기초한 추정량은

$$\widehat{\beta} = median\ \{S_i\}, \qquad i = 1, \cdots, m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

이므로, $S^{(1)} \leq \cdots \leq S^{(m)}$을 $m = n-1$개의 순서통계량이라고 할 때 $\widehat{\beta}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\widehat{\beta} = \begin{cases} S^{(k+1)} & m = 2k+1 \\ \dfrac{S^{(k)} + S^{(k+1)}}{2} & m = 2k \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

이 방법에서의 신뢰구간은 다음과 같이 구한다.

이항분포표(송문섭, 박창순. 비모수통계학개론. 부록 표.5)로부터 다음을 만족하는 C_α를 구한다.

$$C_\alpha = n+1-b(\frac{\alpha}{2}, n, \frac{1}{2}) \cdots\cdots (5)$$

여기에서 $b(\frac{\alpha}{2}, n, \frac{1}{2})$은 반복수는 n이고 $p=\frac{1}{2}$인

이항분포에서의 $100\times\frac{\alpha}{2}\%$ 백분위수이다.

이 때, C_α 는 부호검정통계량 B의 귀무가설 $H_0: \beta=\beta_0$ 하에서 다음을 만족하는 상수이다.

$$P_0\{C_\alpha \le B \le m-C_\alpha\} = 1-\alpha. \cdots\cdots (6)$$

순서통계량 $S^{(1)} \le \cdots \le S^{(m)}$ 중에서 β_L, β_U 의 값을 정할 수 있다.

$$\beta_L = S^{(C_\alpha)}, \quad \beta_U = S^{(n+1-C_\alpha)} \cdots\cdots (7)$$

주어진 신뢰구간 (β_L, β_U)의 신뢰계수는 다음을 만족한다.

$$P_\beta(\beta_L < \beta < \beta_U) = 1-\alpha$$

표본의 크기 n의 수가 큰 경우, C_α 는 다음과 같이 대표본 근사를 이용하여 구할 수 있다.

$$C_\alpha \approx \left(\frac{n}{2}\right) - z_{(\alpha/2)}\left(\frac{n}{4}\right)^{1/2} \cdots\cdots (8)$$

2.2 부호순위검정(signed rank test)에 기초한 추정량

Wilcoxon의 부호순위검정(signed rank test) 에 기초한 추정량을 구하기 위해서 앞 절에서 구한 $m=n-1$개의 S_i 로 부터 $M=\frac{m(m+1)}{2}$ 개의 모든 $i \le j$ $(i,j=1,2,\cdots,m)$에 대하여 $W_{ij}=\frac{S_i+S_j}{2}$ 를 구한다. 이때의 평균 W_{ij}를 Walsh average라고 한다. 이때의 추정량은

$$\hat{\beta} = median\{W_{ij}\}, \quad i \le j \quad i,j=1,2,\cdots,m \cdots\cdots (9)$$

이고, $W^{(1)} \le \cdots \le W^{(M)}$을 M개의 순서통계량이라고 할 때 $\hat{\beta}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\beta} = \begin{cases} W^{(k+1)} & M=2k+1 \\ \frac{W^{(k)}+W^{(k+1)}}{2} & M=2k \end{cases} \cdots\cdots (10)$$

이때 회귀모형의 오차분포가 대칭인 연속분포라고 가정하고 신뢰구간은 다음과 같이 구한다.

부호순위 통계량(W^+) 분포표(송문섭, 박창순. 비모수통계학개론. 부록 표.6)로부터 다음을 만족하는 C_α를 찾는다.

$$P_0\left\{C_\alpha \le W^+ \le (\frac{m(m+1)}{2} - C_\alpha)\right\} = 1-\alpha \cdots\cdots (11)$$

이때 $[m(m+1)/2]-C_\alpha+1=w(\frac{\alpha}{2},m)$ 이다.

순서대로 나열된 W_{ij} 들 즉, $W^{(1)}\le\cdots\le W^{(M)}$ 중에서 β_L, β_U 의 값을 정할 수 있다.

$$\beta_L=W^{(C_\alpha)}\ ,\ \beta_U=W^{(M+1-C_\alpha)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

주어진 신뢰구간 (β_L, β_U)의 신뢰계수는 다음을 만족한다.

$$P_\beta(\beta_L<\beta<\beta_U)=1-\alpha$$

표본의 크기 n 의 수가 큰 경우, C_α 는 다음과 같이 대표본 근사를 이용하여 구할 수 있다.

$$C_\alpha\approx\left(\frac{n(n+1)}{4}\right)-z_{(\alpha/2)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right)^{1/2} \quad \cdots\cdots (13)$$

3. 모의 시험 및 결과

순차기울기를 이용한 기울기 β 의 추정 방법들을 기존의 방법들과 비교하기 위하여 몬테카를로 모의실험(Monte Carlo Simulation)을 도입하였다. 난수 발생과 기울기 추정을 위해서 SAS V.6.12를 이용하였다. 난수발생 조건은 다음과 같이 한다. x_i는 등간격으로 정해주고 Y_i의 값을 발생하기 위해서 절편 α 는 0인 경우만을 생각한다. 기울기 β = -1, 5 인 경우와 표본 수 n = 6, 11, 16, 31, 50 그리고 오차항 e_i 의 분포는 정규분포 $N(0,1)$, 이중지수분포, Cauchy분포 (place parameter=0.2, scale parameter=0.1) 와 균일분포(-1,1) 의 경우를 고려한다. 각 경우에서 10,000번씩 난수를 발생시킨 후 추정방법들을 비교한다.

여기에서 절편 α 의 값을 고정시킨 이유는 이 논문에서 관심을 가지고 있는 부분이 기울기 β 의 추정이기 때문에 절편 α 값의 변화는 그리 중요하지 않다. 기울기 β 의 조건은 음의 경우와 양의 경우를 비교하고자 하였고 표본 수 n의 조건은 작은 경우와 큰 경우에서 방법들의 차이를 알아보기 위함이고 오차항의 분포는 꼬리의 분포가 점점 커지는 분포를 정해서 오차항의 분포에 따라서 추정에 오차가 발생하는지를 알아보고자 한다. 각 표본 수 n 에서 비모수적 방법에 의한 기울기 β 의 신뢰구간은 95%가 넘지 않는 가장 가까운 신뢰수준(confidence level)을 이용하였고 표본수 n 이 30 이상일 경우는 대표본 근사에 의하여 95% 신뢰수준에서 신뢰구간을 구하였다.

순차기울기를 이용하여 제안된 방법을 기존 방법과 두 가지 측면에서 비교하였다. 기울기 β 의 점 추정량의 비교는 10000번 반복하여 구해진 추정값의 평균과 표준편차를 제시하였고, 구간 추정에서는 신뢰구간의 평균 길이와 추정된 신뢰구간에 참값 β 의 포함 여부, 즉 경험신뢰계수로 제시하여 비교하였다. 경험신뢰계수는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{경험신뢰계수}=\frac{\text{신뢰구간에 포함된 개수}}{\text{반복수}(=10000)}$$

단순선형 회귀모형에서 기울기 β 의 추정 방법들의 모의실험 결과를 표로 제시하였다. 점 추

정의 결과는 추정값의 평균과 표준 편차를 표본 수, 모집단의 분포 및 방법별로 β 의 값이 -1인 경우와 5인 경우로 나누어서 표 1에 정리하였다. 구간 추정의 결과는 같은 방법으로 신뢰구간의 평균 길이를 표 2에 정리하였고, 경험신뢰계수를 표 3에 정리하였다.

점 추정의 결과에서, 기울기 β 의 변화에 따른 추정 방법들의 차이를 보면 β 의 값이 음수인 경우와 양수인 경우 모두 추정값의 차이가 없었다. 표본 수 n 의 값의 변화에 따라서 추정되는 값을 보면 최소제곱추정법(Least Square Estimation)은 표본 수 n 의 값이 커질수록 추정값의 평균들이 난수 발생시 주어진 참값 β 와의 차이가 줄어드는 것을 알 수 있다. 그러나 비모수적 방법인 Theil 의 추정법과 순차기울기를 이용한 두 가지의 방법은 표본 수 n 의 값에 관계없이 일정한 추정량을 나타내고 있다. 오차항의 분포에 따른 차이를 보면 최소제곱추정법(Least Square Estimation)은 정규분포에서 표본 수 n 의 값에 관계없이 모든 추정치가 참값 β 에 가깝게 추정되고 있는 반면에 순차기울기를 이용한 두 개의 추정법은 조금의 차이를 보이고 있다. 이중지수분포의 경우, 표본 수 n의 값이 작은 경우에 모든 방법들이 참값 β 와 조금의 차이를 보이고 있다. Cauchy 분포의 결과를 보면 최소제곱추정법(Least Square Estimation)의 기울기의 추정치는 다른 방법들에서 추정되는 값보다 참값과 큰 차이를 나타내고 있고, 표본 수 n 의 크기가 커져도 참값 β 와 큰 차이를 보이고 있는 반면에 비모수적 방법은 표본 수 n 의 크기에 관계없이 평균값이 참값 β 에 일치하는 추정치를 구할 수 있다.

구간 추정의 결과를 보면 점 추정의 결과와 마찬가지로 참값 β 의 변화에 따른 차이는 나타나지 않았다. 최소제곱추정법(Least Square Estimation)과 Theil 의 추정치의 평균 신뢰구간의 길이는 비슷한 길이를 나타내고, Wilcoxon 의 부호검정(sign test)과 부호순위검정(signed rank test)을 이용한 추정치의 평균 신뢰구간의 길이가 비슷하게 나타난다. 순차기울기를 이용한 두 개의 방법은 다른 방법들보다 적은 정보를 이용하였기 때문에 신뢰구간의 길이가 크게 나온다. 그런데 점 추정에서 나온 결과처럼 오차항의 분포가 Cauchy 분포를 따를 경우에 최소제곱추정법(Least Square Estimation)에 의해서 추정된 기울기 β에 대한 평균 신뢰구간의 길이가 길어지는 것을 볼 수 있다. 또한 순차기울기를 이용한 두 방법에서의 신뢰구간의 길이는 최소제곱추정법(Least Square Estimation)에 의한 길이보다 짧게 나오는 것을 볼 수 있다.

마지막으로 경험신뢰계수(Empirical Confidence Level)의 결과를 보면, 앞의 평균 신뢰구간의 길이에서 보았듯이 순차기울기를 이용한 방법은 그 길이가 길어지므로 그 구간 안에 실제 β 가 포함되는 개수가 많아진다. 즉, 경험신뢰계수(Empirical Confidence Level)가 1에 가까운 값을 갖는다. 그러나 최소제곱추정법(Least Square Estimation) 과 Theil 의 방법은 신뢰수준(Confidence level) 만큼의 개수가 신뢰구간에 포함되는 것을 볼 수 있다.

결과적으로 순차기울기를 이용한 기울기의 추정법은 기울기를 추정하는데 있어서 모수적 방법이나 기존의 비모수적 방법들과 비교해서 계산방법이 간단하다는 것을 볼 수 있다. 그러나 추정의 오차는 그리 크지 않은 결과를 보였다. 그리고 오차항의 분포가 꼬리가 두터운 Cauchy 분포를 따를 때에는 모수적 추정법보다 좋은 추정을 할 수 있다는 장점이 있다.

4. 결론

오차항이 Cauchy 분포처럼 꼬리가 두터운 분포를 따를 경우에 순차기울기를 이용하여 단순선형 회귀식의 기울기를 구하는 방법은 모수적 방법인 최소제곱추정법(Least Square Estimation)에 의한 추정량보다 좀 더 좋은 추정량을 구할 수 있다는 것을 볼 수 있다. 그리고 기울기의 추정하는데 있어서 계산이 간단한 장점도 있다.

순차기울기를 이용한 추정량은 모수적 방법에 의한 추정량이나 Theil 추정량보다 적은 정보를 이용한다. 그래서 앞의 결과에서 살펴본 바와 같이 신뢰구간의 길이가 길어지므로 주어진 참값 β가 신뢰구간에 포함되는 개수, 즉 경험신뢰계수가 1에 가까운 값을 갖는 결과가 나온다. 즉 경험신뢰계수(Confidence Level)와 신뢰구간의 길이를 함께 고려하여 구간 추정법을 비교할 수 있는 측도 개발이 필요하다. 또한 동수(tie) 자료에 있어서 기울기를 구하는 방법을 생각해야한다.

순차기울기에 근거하여 절편을 구하는 방법을 연구하고, 이렇게 구해진 선형식이 주어진 자료를 얼마나 잘 설명해 주는지 알아보아야 하겠다. 더 나아가 두 회귀직선의 기울기가 같은가의 검정에서도 적은 정보를 이용할 수 있는 방법을 생각해 보아야겠다.

참고문헌

[1] 송문섭, 박창순(1997), 비모수통계학개론. 서울 : 자유아카데미

[2] Sen, P. K.(1968), Estimates of the regression coefficient based on Kendall's tau. *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 63, 1379-89.

[3] Theil, H.(1950), A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis, III. *Proceeding Ken. Ned. Akad Wetensch.* A 53, 1397-412.

[2003년 1월 접수, 2003년 7월 채택]

<표 1> 추정값의 평균과 표준편차

Beta	n	Method / Distribution	LSE	Theil	순차기울기 (sign test)	순차기울기 (signed rank test)
-1	6	Normal	-0.9999(0.2383)	-0.9999(0.2582)	-0.9944(0.5549)	-0.9966(0.3419)
		Double-Exp	-1.0022(0.2420)	-1.0006(0.2423)	-0.9947(0.4904)	-0.9996(0.3237)
		Cauchy	-1.0212(0.8314)	-1.0003(0.0209)	-1.0000(0.0309)	-1.0008(0.0347)
		Uniform	-0.9997(0.1382)	-0.9998(0.1483)	-0.9994(0.3164)	-0.9997(0.1902)
	11	Normal	-1.0010(0.0964)	-1.0000(0.1005)	-1.0049(0.3156)	-1.0011(0.1822)
		Double-Exp	-0.9987(0.0959)	-0.9987(0.0891)	-0.9976(0.2772)	-0.9976(0.1709)
		Cauchy	-0.9918(0.8596)	-0.9999(0.0052)	-0.9999(0.0142)	-0.9999(0.0115)
		Uniform	-1.0005(0.0549)	-1.0005(0.0592)	-0.9998(0.1843)	-1.0000(0.1033)
	16	Normal	-0.9996(0.0543)	-0.9996(0.0570)	-1.0006(0.2887)	-0.9999(0.1286)
		Double-Exp	-0.9993(0.0535)	-0.9997(0.0483)	-1.0011(0.2399)	-1.0015(0.1225)
		Cauchy	-0.9993(0.6762)	-1.0000(0.0025)	-0.9984(0.0116)	-0.9999(0.0082)
		Uniform	-0.9997(0.0311)	-0.9997(0.0333)	-0.9964(0.1633)	-0.9991(0.0703)
	31	Normal	-1.0000(0.0200)	-1.0000(0.0209)	-1.0018(0.1862)	-1.0007(0.0722)
		Double-Exp	-0.9998(0.0201)	-0.9999(0.0174)	-1.0008(0.1543)	-1.0001(0.0712)
		Cauchy	-1.0011(0.1406)	-0.9999(0.0008)	-0.9999(0.0071)	-0.9999(0.0047)
		Uniform	-0.9998(0.0115)	-0.9999(0.0120)	-0.9999(0.1073)	-0.9995(0.0387)
	50	Normal	-0.9999(0.0098)	-0.9999(0.0101)	-0.9989(0.1522)	-1.0005(0.0503)
		Double-Exp	-0.9999(0.0097)	-0.9999(0.0083)	-0.9999(0.1229)	-0.9997(0.0507)
		Cauchy	-1.0113(1.1291)	-1.0000(0.0004)	-1.0000(0.0056)	-1.0000(0.0035)
		Uniform	-1.0000(0.0056)	-0.9999(0.0060)	-1.0009(0.0865)	-0.9998(0.0262)
5	6	Normal	5.0015(0.2357)	4.9978(0.2563)	5.0101(0.5517)	5.0080(0.3375)
		Double-Exp	5.0011(0.2378)	4.9998(0.2409)	4.9993(0.4964)	4.9937(0.3229)
		Cauchy	4.832(25.4483)	5.0007(0.2378)	5.0010(0.3031)	5.0008(0.3983)
		Uniform	4.9997(0.1363)	4.9988(0.1471)	5.0003(0.3148)	4.9981(0.1911)
	11	Normal	5.0005(0.0958)	5.002(0.1018)	4.9993(0.3205)	5.0014(0.1852)
		Double-Exp	5.0015(0.0963)	5.0005(0.0894)	5.0019(0.2733)	5.0007(0.1736)
		Cauchy	4.9874(1.0221)	5.0000(0.0506)	5.0003(0.0316)	5.0007(0.0520)
		Uniform	4.9999(0.0550)	5.0003(0.0590)	5.0028(0.1845)	5.0005(0.1032)
	16	Normal	5.0002(0.0540)	5.0004(0.0568)	5.0001(0.2850)	5.0006(0.1293)
		Double-Exp	4.9993(0.0551)	4.9999(0.0489)	4.9981(0.2403)	5.0004(0.1231)
		Cauchy	4.987(11.9779)	4.9999(0.0249)	4.9998(0.1153)	4.9990(0.0798)
		Uniform	5.0005(0.0309)	5.0005(0.0330)	5.0005(0.1644)	5.0011(0.0710)
	31	Normal	4.9999(0.0116)	4.9999(0.0122)	4.9993(0.1067)	5.0003(0.0390)
		Double-Exp	5.0001(0.0199)	5.0001(0.0174)	4.9999(0.5130)	4.9987(0.0718)
		Cauchy	4.9964(0.7704)	4.9999(0.0008)	5.0000(0.0070)	5.0000(0.0048)
		Uniform	5.0002(0.0115)	4.9999(0.0122)	5.0007(0.1069)	4.9998(0.0388)
	50	Normal	5.0003(0.0096)	5.0001(0.0101)	4.9993(0.1488)	5.0002(0.0504)
		Double-Exp	4.9999(0.0097)	4.9999(0.0083)	4.9982(0.1211)	5.0004(0.0531)
		Cauchy	4.9973(0.4504)	5.0000(0.0038)	4.9999(0.0552)	4.9998(0.0350)
		Uniform	5.0000(0.0056)	5.0000(0.0060)	5.0001(0.0872)	5.0001(0.0260)

<표 2> 신뢰구간의 평균길이

Beta	n	Method / Distribution	LSE	Theil	순차기울기 (sign test)	순차기울기 (signed rank test)
-1	6	Normal	1.252	1.140	3.549	3.549
		Double-Exp	1.204	1.261	3.459	3.459
		Cauchy	0.390	0.278	1.118	1.118
		Uniform	0.738	0.806	2.093	2.093
	11	Normal	0.420	0.477	2.987	2.110
		Double-Exp	0.411	0.431	1.756	2.044
		Cauchy	0.206	0.030	0.249	1.305
		Uniform	0.245	0.283	1.818	1.243
	16	Normal	0.229	0.240	2.122	1.638
		Double-Exp	0.224	0.210	1.846	1.528
		Cauchy	0.131	0.012	0.106	0.065
		Uniform	0.133	0.142	1.295	0.972
	31	Normal	0.082	0.084	1.378	0.921
		Double-Exp	0.081	0.071	1.159	0.842
		Cauchy	0.050	0.004	0.056	0.053
		Uniform	0.047	0.050	0.827	0.547
	50	Normal	0.039	0.042	1.052	0.729
		Double-Exp	0.039	0.035	0.864	0.663
		Cauchy	0.075	0.002	0.040	0.039
		Uniform	0.023	0.025	0.626	0.434
5	6	Normal	1.249	1.348	3.571	3.571
		Double-Exp	1.200	1.253	3.479	3.479
		Cauchy	4.171	3.030	1.058	1.058
		Uniform	0.738	0.801	2.077	2.077
	11	Normal	0.419	0.477	2.985	2.110
		Double-Exp	0.407	0.430	1.743	2.034
		Cauchy	0.219	0.029	0.235	0.235
		Uniform	0.245	0.283	1.810	1.239
	16	Normal	0.228	0.239	2.167	1.638
		Double-Exp	0.225	0.209	1.846	1.530
		Cauchy	1.673	0.118	1.062	1.428
		Uniform	0.133	0.142	1.294	0.972
	31	Normal	0.047	0.082	0.827	0.548
		Double-Exp	0.080	0.071	1.156	0.839
		Cauchy	0.088	0.004	0.055	0.053
		Uniform	0.047	0.050	0.827	0.547
	50	Normal	0.039	0.042	1.053	0.727
		Double-Exp	0.039	0.035	0.863	0.663
		Cauchy	0.264	0.016	0.401	0.392
		Uniform	0.023	0.025	0.627	0.434

<표 3> 신뢰구간의 경험신뢰수준

Beta	n	Method / Distribution	LSE	Theil	순차기울기 (sign test)	순차기울기 (signed rank test)
-1	6	Normal	0.9509	0.9066	0.9978	0.9978
		Double-Exp	0.9531	0.9453	0.9968	0.9968
		Cauchy	0.9689	0.9440	0.9976	0.9976
		Uniform	0.9502	0.9478	0.9972	0.9972
	11	Normal	0.9514	0.9613	1	1
		Double-Exp	0.9551	0.9630	0.9919	0.9999
		Cauchy	0.9683	0.9609	0.9996	0.9999
		Uniform	0.9513	0.9621	0.9999	1
	16	Normal	0.9535	0.9518	0.9996	1
		Double-Exp	0.9553	0.9512	0.9997	1
		Cauchy	0.9697	0.9483	1	0.9804
		Uniform	0.9511	0.9519	0.9996	1
	31	Normal	0.9530	0.9505	0.9995	1
		Double-Exp	0.9500	0.9450	0.9994	0.9999
		Cauchy	0.9698	0.9458	0.9997	1
		Uniform	0.9551	0.9537	0.9996	1
	50	Normal	0.9546	0.9570	0.9992	1
		Double-Exp	0.9539	0.9558	0.9997	1
		Cauchy	0.9679	0.9581	0.9994	1
		Uniform	0.9512	0.9524	0.9994	1
5	6	Normal	0.9531	0.9473	0.9960	0.9960
		Double-Exp	0.9566	0.9455	0.9973	0.9973
		Cauchy	0.9672	0.9430	0.9973	0.9973
		Uniform	0.9500	0.9461	0.9964	0.9970
	11	Normal	0.9507	0.9578	1	1
		Double-Exp	0.9503	0.9600	0.9922	1
		Cauchy	0.9698	0.9602	0.9997	0.9998
		Uniform	0.9502	0.9587	1	1
	16	Normal	0.9501	0.9504	0.9999	1
		Double-Exp	0.9513	0.9511	0.9997	1
		Cauchy	0.9722	0.9525	0.9996	1
		Uniform	0.9507	0.9518	0.9995	1
	31	Normal	0.9492	0.9458	0.9995	1
		Double-Exp	0.9533	0.9498	0.9993	1
		Cauchy	0.9688	0.9473	0.9992	0.9997
		Uniform	0.9519	0.9501	0.9998	1
	50	Normal	0.9550	0.9575	0.9998	1
		Double-Exp	0.9535	0.9581	0.9994	1
		Cauchy	0.9658	0.9554	0.9991	1
		Uniform	0.9516	0.9560	0.9994	1