크기가 제한된 제어기를 갖는 가변구조제어 시스템의 점근 안정 영역 추정

Estimation of the Asymptotic Stability Region for the Uncertain Variable Structure Systems with Bounded Controllers

최 한 호*, 국 태 용
(Han Ho Choi and Tae-Yong Kuc)

Abstract : This paper deals with the problem of estimating the asymptotic stability region(ASR) of uncertain variable structure systems with bounded controllers. Using linear matrix inequalities(LMIs) we estimate the ASR and show the exponential stability of the closed-loop control system in the estimated ASR. We give a simple LMI-based algorithm to get estimates of the ASR. We also give a synthesis algorithm to design a switching surface which will make the estimated ASR big. Finally, we give numerical examples in order to show that our method can give better results than the previous ones for a certain class of uncertain variable structure systems with bounded controllers.

Keywords : linear matrix inequality(LMI), variable structure system, bounded control, switching surface, asymptotic stability region

I. 서론

가변구조제어 시스템의 가장 중요한 특성은 소위 정합조건(matching condition)을 만족시키는 변수변동이나 외란에 대하여 시스템이 영향을 받지 않는 스위칭평면에서의 슬라이딩 모드(sliding mode)가 존재한다는 것이다[1]. 실제 제어 시스템 구현에서 제어 입력 크기는 물리적인 구속조건들 때문에 제한이 된다. 최근 크기가 제한된 입력을 갖는 가변구조제어 시스템의 점근안정영역(ASR, Asymptotic Stability Region)을 추정하기 위한 방법들이 소개되었다[2][3]. 논문 [2]에서는 상태변수 변환을 사용하여 여러 개의 리아푸노프 함수를 결합하는 개념이 소개되었다. 여러 개의 리아푸노프(Lyapunov) 함수들을 사용하여 3개의 어트랙션 영역(domain of attraction)을 찾아내고 ASR을 보다 크게 얻기 위해 이들 3개의 어트랙션 영역을 조합하였다. 결국 추정된 ASR은 볼록(convex)하지 않으며 부시스템(subsystem) 행렬 놈(norm)을 사용하였기 때문에 어느 정도의 conservativeness가 존재한다. [3]에서는 상태 변환 행렬과 decoupling 행렬을 사용하여 좀더 향상된 결과를 도출하여 같은 조건 밑에서 [2]의 결과를 사용할 때 보다 더 큰 ASR을 구할 수 있음을 수치적인 예를 들어 보였다. 그러나 [2]와 [3]의 결과 모두 상태변환 행렬을 사용하였기 때문에 두 방법 모두 간접적이며 복잡하다. 그리고 두 방법 모두 추정된 ASR이 될 수 있으면 크게 하는 스위칭 평면의 설계 문제에는 적용이 어려워 보인다.

본 논문에서는 최근 [4]에서 제안된 LMI 기반 가변구조제어기 설계방법을 참고하여 크기가 제한된 입력을 갖는 가변구조제어 시스템의 ASR을 추정하는 방법을 제시한다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2003. 3. 27., 채택확정 : 2003. 5. 7.
최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)
국태용 : 성균관대학교 전기공학부(tykuc@yurim.skku.ac.kr)
※ 책임저자의 연구는 2003년도 동국대학교 신임교원연구비 지원으로 이루어졌음.

II. 문제 설정과 보조정리들

우리는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 고려한다

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + \zeta(t)] \tag{1}$$

여기에서 $x(t) \in R^n$은 상태이고 $u(t) \in R^m$은 제어 입력이고 $\zeta(\cdot): R^+ \to R^m$는 불확실성을 일괄적으로 표현한 것이고 $A \in R^{n \times n}$은 시스템 특성 행렬이고 $B \in R^{n \times m}$은 입력 행렬이다. 위의 시스템 방정식은 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $\|\zeta(t)\| \le \rho$를 만족하는 상수 ρ가 존재한다.

A2: 입력행렬 B는 rank가 m이고 $m < n$이다.

A3: 입력은 $\|u\| \le \bar{u}$ 그 크기가 제한되어 있다.

A4: $\bar{u} - \rho = \mu > 0$ 를 만족시킨다.

A5: 쌍 (A, B)는 안정가능하다.

다음과 같이 선형 스위칭 평면을 정의하기로 하자.

$$\Omega = \{x : \ \sigma(x) = Sx = 0\}$$

여기에서 $S \in R^{m \times n}$는 rank가 m인 행렬이다. 이전의 가변구조제어기 관련 논문들 [1-4]를 참조하여 우리는 S가 다음의 성질들을 만족시킨다고 가정하는 것이 타당함을 알 수 있다.

P1: SB는 nonsingular 행렬이다. 이론전개의 복잡함을 피하기 위해 $SB > 0$이라고 가정한다.

P2: $(n-m)$차의 슬라이딩 모드 동역학이 점근적으로 안정하다.

결국 우리의 첫 번째 문제는 주어진 S에 대하여 ASR을 추정하는 방법을 제안하는 것이고 두 번째 문제는 위의 성

질 P1과 P2를 만족시키며 추정된 ASR을 크게 하도록 하는 S를 설계하는 알고리즘을 제안하는 것이라 할 수 있다.

다음에 주어지는 보조 정리들은 주요 결과를 유도하는데 필수적인 것들이다.

보조정리 1[5]: 주어진 하나의 행렬 N와 두 개의 대칭 행렬 Q와 R에 대하여 다음의 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} > 0$$

위의 LMI가 성립할 필요충분조건은 다음 중 하나이다.

1) $R > 0, \quad Q - NR^{-1}N^T > 0$

2) $Q > 0, \quad R - N^T Q^{-1} N > 0$

보조정리 2[6]: 주어진 두개의 행렬 G, N와 한 개의 대칭행렬 W에 대하여 다음의 행렬 부등식을 만족시키는 해 행렬 K를 찾는 문제를 생각하자.

$$W + G^T K^T N^T + NKG < 0$$

만약 $\widetilde{G}^T$와 $\widetilde{N}$의 행들이 행렬 G와 N^T의 널 공간의 기저(bases of the null spaces)들로 이루어진 행렬들이라고 할 때 위의 문제가 해 행렬을 존재할 필요충분조건은 다음 행렬 부등식이 성립하는 것이다.

$$\widetilde{G^T}^T W \widetilde{G}^T < 0, \qquad \widetilde{N}^T W \widetilde{N} < 0$$

여기에서 만약 $\widetilde{G}^T = 0$거나 $\widetilde{N} = 0$이면 거기에 대응하는 부등식은 자동적으로 성립하는 것으로 간주된다. 주어진 G와 N에 대하여 $\widetilde{G}^T$와 $\widetilde{N}$이 유일하게 주어지지 않고 여러 개가 될 수 있는 데 이들 중 어떤 것을 취해도 위의 사실은 성립된다.

보조정리 3 : 주어진 양수 θ, 양한정 행렬 X와 행렬 K에 대하여 만약 $X > \theta I$가 성립하면 부등식 $k(2\theta X - \theta^2 I) > KK^T$를 만족시키는 임의의 양수 k 에 다음이 성립한다.

$$k > \|X^{-1}KK^T X^{-1}\|$$

증명 : $X > \theta I$가 성립한다고 가정하고 양수 k가 부등식 $k(2\theta X - \theta^2 I) > KK^T$를 만족시킨다고 가정하자. 그러면 $(X - \theta I)^2 = X^2 - 2\theta X + \theta^2 I \ge 0$를 이용하여 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$kX^2 \ge k(2\theta X - \theta^2 I) > KK^T \ge 0$$

위의 부등식은 $kX^2 > KK^T$를 의미하고 또 이 것은 $k > \|X^{-1}KK^T X^{-1}\|$가 성립함을 뜻한다. ■

III. 모든 슬라이딩 평면과 LMI 존재 조건

정리 1 : 불확실성을 갖는 시스템 (1)을 고려하자. 성질 P1과 P2를 보장하는 슬라이딩 평면 행렬 S가 존재할 필요충분조건은 다음의 LMI를 만족시키는 해 행렬 X가 존재하는 것이다.

$$X > 0, \quad \Phi^T (AX + XA^T) \Phi < 0 \tag{2}$$

여기에서 $\Phi \in R^{n \times (n-m)}$은 $B^T \Phi = 0$와 $\Phi^T \Phi = I$를 만족시키는 rank가 $(n-m)$인 행렬이다.

증명 : (=>) 역행렬이 존재하는 변환 행렬 M과 이에 대응하는 벡터 $v = Mx$를 다음과 같이 정의하자.

$$M = \begin{bmatrix} \Phi^T \\ (B^T B)^{-1} B^T \end{bmatrix} \in R^{n \times n}, \quad v = Mx = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

그러면 우리는 $M^{-1} = [\Phi \ \ B]$가 성립하고 (1)은 다음과 같은 regular form으로 변환시킬 수 있다.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \Phi^T A \Phi & \Phi^T AB \\ (B^T B)^{-1} B^T A \Phi & (B^T B)^{-1} B^T AB \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} [u + \zeta(t)]$$

성질 P1-2를 만족시키는 스위칭 평면 $Sx = SM^{-1}v = S\Phi v_1 + SBv_2 = 0$가 존재한다고 가정하자. 그러면 $(SB)^{-1}$이 존재하고 위의 미방에서 $S\Phi v_1 + SBv_2 = 0$를 만족시키는 스위칭평면에 구속된 슬라이딩 모드 동역학이 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1 = (\Phi^T A \Phi - \Phi^T AB(SB)^{-1} S\Phi) v_1$$

P2는 위 식이 점근적으로 안정함을 보장하므로 다음의 리아푸노프 방정식을 만족시키는 양한정 행렬 H_0의 존재를 보장한다.

$$(\Phi^T A \Phi - \Phi^T AB(SB)^{-1} S\Phi) H_0 + * < 0$$

여기에서 $*$는 대칭성에 의해서 쉽게 유추될 수 있는 행렬 블록을 의미한다. $n \times n$ 행렬 X를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} X &= [\Phi, B] \begin{bmatrix} H_0 & * \\ -(SB)^{-1} S\Phi H_0 & \overline{X_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T \\ B^T \end{bmatrix} \\ \overline{X_{22}} &= \varepsilon (SB)^{-1} + (SB)^{-1} S\Phi H_0 \Phi^T S^T (SB)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

여기에서 ε은 임의의 양수이다. 그러면 보조정리 1을 사용하여 행렬 X가 양한정임을 알 수 있다. X를 (2)에 대입함으로써 우리는 (3)의 양한정 행렬 X가 (2)를 만족함을 알 수 있다.

(<=) (2)을 만족시키는 양한정 행렬 X가 존재한다고 가정하자. 그리고 슬라이딩 평면 행렬이 $S = B^T X^{-1}$이라고 가정하자. 그러면 $SB = B^T X^{-1} B > 0$으로 P1이 성립한다. 결국 우리는 $S = B^T X^{-1}$가 성질 P2를 보장하는 것을 보이기만 하면 된다. 그런데 최근의 논문 Choi[4]에 따르면 슬라이딩 평면 $Sx = B^T X^{-1} x = 0$에 구속된 슬라이딩 모드 동역학이 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1 = A_{11} v_1 = \Phi^T AX\Phi (\Phi^T X \Phi)^{-1} v_1, \quad v_1 = \Phi^T x \tag{4}$$

(2)은 $H_0 = \Phi^T X \Phi > 0$가 다음의 리아푸노프 행렬 부등식을 만족시킴을 의미한다.

$$A_{11} H_0 + * = \Phi^T AX\Phi (\Phi^T X \Phi)^{-1} H_0 + * < 0$$

결국 위의 리아푸노프 행렬 부등식은 $S=B^TX^{-1}$가 성질 P2를 보장하는 것을 의미한다. ■

주 1 : 보조정리 2를 참조하여 우리는 (2)의 해가 존재할 필요충분조건은 다음 LMI를 만족시키는 해 (X,K)가 존재하는 것이라는 것을 보일 수 있다.

$$X>0,\ AX-BK^T+*<0 \tag{5}$$

(5)의 해가 존재할 필요충분조건은 쌍 (A,B)가 안정가능한 것이다. 결국 우리는 다음의 S1-4는 동치임을 알 수 있다: S1) 쌍 (A,B)가 안정가능하다; S2) LMI식 (2)를 만족시키는 양한정 행렬 X가 존재한다; S3) LMI식 (5)를 만족시키는 해가 존재한다; S4) 성질 P1-2를 보장하는 슬라이딩 평면 행렬 S가 존재한다.

위의 주와 정리1의 증명과정을 참조하여 우리는 다음의 따름 정리들을 유도할 수 있다.

따름정리 1 : 시스템 (1)에서 쌍 (A,B)가 안정가능하면 (5)은 해가 존재하고 슬라이딩 평면 행렬 $S=B^TX^{-1}$은 성질 P1-2를 보장한다.

따름정리 2 : 시스템 (1)에서 성질 P1-2를 보장하는 슬라이딩 평면 행렬 S가 존재하면 다음 행렬식을 만족시키는 해 (ε,K,X)가 존재한다.

$$\begin{aligned}&X>0,\quad AX-BK^T+*<0,\\&\varepsilon B^T=SX,\quad \varepsilon>0\end{aligned} \tag{6}$$

주 2 : 따름정리1과 2는 성질 P1-2를 만족시키는 모든 S가 (5)의 해 X와 임의의 양수 ε을 사용하여 다음처럼 매개변수화 될 수 있음을 의미한다.

$$S=\varepsilon B^TX^{-1} \tag{7}$$

주 3 : (ε_0,K_0,X_0)가 (6)의 해이면 임의의 양수 β에 대하여 $(\beta\varepsilon_0,\beta K_0,\beta X_0)$ 역시 (6)의 해가 된다. 그러므로 우리는 성질 P1-2를 만족시키는 슬라이딩 평면 행렬 S가 존재하면 $X>I$와 (6)을 만족시키는 해 행렬 X가 존재함을 알 수 있다.

IV. 점근안정영역의 추정치

성질 P1-2를 만족시키는 슬라이딩 평면 $Sx=0$가 주어졌고 스위칭 궤한 제어입력 입력의 크기가 $\|u\|\le\bar{u}$의 형태로 제한되어 다음과 같이 주어졌다고 가정하자.

$$u(t)=-\bar{u}\frac{Sx}{\|Sx\|} \tag{8}$$

그러면 따름정리 2는 (6)을 만족시키는 양한정 행렬 X와 행렬 K가 존재함을 의미한다. 리아푸노프 함수를 $V(x)=x^TX^{-1}x$라고 정의하자. (1)과 (8)의 폐회로 응답 궤적을 따른 리아푸노프 함수의 도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\dot V=-x^TQx-2x^TX^{-1}B(\bar{u}\frac{Sx}{\|Sx\|}-K^TX^{-1}x-\zeta)$$

여기에서 행렬 Q는 다음과 같이 주어진다.

$$-Q=X^{-1}(AX-BK^T+*)X^{-1}$$

따름정리 2는 $S=\varepsilon B^TX^{-1}$, $Q>0$을 의미하기 때문에 가정 A1과 A4를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot V\le-\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\frac{2}{\varepsilon}\|Sx\|(\|K^TX^{-1}x\|-\mu)$$

그러므로 $\{x:\|x\|\le\mu\|K^TX^{-1}\|^{-1}\}$영역에서 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\dot V\le-\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2\le 0 \tag{9}$$

또한 $V(x)$가 다음과 같이 크기가 제한되기 때문에

$$\lambda_{\max}^{-1}(X)\|x\|^2\le V(x)\le\lambda_{\min}^{-1}(X)\|x\|^2$$

우리는 다음의 공식을 얻을 수 있다.

$$\|x(t)\|\le\frac{\lambda_{\max}(X)}{\lambda_{\min}(X)}\|x(0)\|^2\exp[-\lambda_{\min}(Q)\lambda_{\min}(X)t]$$

결국 우리는 아래의 영역이 (1)과 (8)의 폐회로 시스템에 대한 ASR의 추정치로 삼을 수 있고 아래의 영역에서 $x=0$가 지수함수적으로 안정함(exponential stability)을 알 수 있다.

$$\left\{x:\|x\|\le\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(X)}{\lambda_{\max}(X)}}\frac{\mu}{\|K^TX^{-1}\|}\right\} \tag{10}$$

행렬 X가 유한하고 양한정이므로 $\theta I<X<\tau I$ 만족시키는 양수 θ,τ가 존재한다. 그러면 다음이 성립한다.

$$\sqrt{\lambda_{\min}(X)/\lambda_{\max}(X)}>\sqrt{\theta/\tau}$$

보조정리 3은 $k(2\theta X-\theta^2I)>KK^T$를 만족시키는 임의의 양수 k에 대하여 $k>\|X^{-1}KK^TX^{-1}\|$가 성립함을 의미하기 때문에 우리는 또 다른 ASR의 추정치를 다음과 같이 구 할 수 있다.

$$\Xi=\left\{x:\|x\|\le\frac{\mu}{\sqrt{k\cdot\tau/\theta}}\right\}$$

여기에서 θ,τ,k는 (6)식과 다음 식들을 만족시키는 양수이다.

$$I-\frac{1}{\theta}X<0,\quad X-\frac{\tau}{\theta}I<0,\quad k(\frac{2}{\theta}X-I)>\frac{1}{\theta^2}KK^T$$

주 3을 참조하면 (ε,K,X)가 해이면 $(\frac{\varepsilon}{\theta},\frac{1}{\theta}K,\frac{1}{\theta}X)$도 (6)의 해가 되기 때문에 τ/θ를 l로 변수 치환하면 일반성의 훼손없이 $\theta^{-1}X$를 X로 $\theta^{-1}K$는 K로 ε/θ는 ε으로 놓아 다음 식과 정리를 얻을 수 있다.

$$I-X<0,\quad X-lI<0 \tag{11}$$

$$k(2X-I) > KK^T \tag{12}$$

정리 2 : 가정 A1-5가 성립한다고 하자. 성질 P1-2를 만족시키는 슬라이딩 평면 $Sx=0$가 주어졌다고 가정하자. (1)과 (8)의 폐회로 응답을 고려하자. 만약 시스템 행렬 A가 안정한 행렬이라면 $x=0$는 모든 영역에서 지수함수적으로 안정하다. 만약 A가 안정한 행렬이 아니라면 $x=0$는 지역적으로 지수함수적으로 안정(locally exponentially stable)하고 ASR의 추정치는 (13)과 같이 주어진다

$$\Xi=\left\{x: \|x\| \le \frac{\mu}{\sqrt{l\cdot k}}\right\} \tag{13}$$

여기에서 l, k는 (6),(11),(12)를 만족시키는 수들이다.

주 4 : (10)에서 쓰인 K^TX^{-1}는 [3]에서 사용된 decoupling 행렬 $(SB)^{-1}S(\gamma I+A)$에 해당된다. [3]에서 사용된 decoupling 행렬 $(SB)^{-1}S(\gamma I+A)$에서는 γ만이 ASR 추정치를 최대화하기 위한 tuning 변수로 사용될 수 있는 반면에 (10)에서 쓰인 K^TX^{-1}는 X와 K가 (6)을 만족시키기만 하면 아무거나 사용될 수 있어 (13)에 주어진 ASR의 추정치 최대화를 위한 충분한 여유 자유도를 제공하여 conservativeness를 줄이는 데 활용될 수 있다.

V. 안정도 해석 알고리즘

다음에 주어진 최소화문제를 고려해보자.

$$\begin{aligned}\Pi:\ &\text{minimize } f(l,k)=l\cdot k\\ &\text{subject to } \ (6),(11),(12)\end{aligned} \tag{14}$$

위 문제를 해결하는 최적값 $f^*=l^*\cdot k^*$ 를 사용하면 (13)을 최대로 할 수 있고 그 값은 다음과 같다.

$$\Xi^*=\left\{x: \|x\| \le \frac{\mu}{\sqrt{f^*}}=\frac{\mu}{\sqrt{l^*\cdot k^*}}\right\} \tag{15}$$

보조정리 1은 (12)식이 다음 LMI와 동치임을 의미한다.

$$\begin{bmatrix}2X-I & K\\ * & kI\end{bmatrix} > 0 \tag{16}$$

결국 (14)는 다음과 같이 다시 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi:\ &\text{minimize } f(l,k)=l\cdot k\\ &\text{subject to } \ (6),(11),(16)\end{aligned} \tag{17}$$

한편 (3)을 참조하여 (6)의 해는 주어진 S를 사용하여 다음과 같이 매개변수화할 수 있음을 알 수 있다.

$$X=\Theta\Phi H\Phi^T\Theta^T+\varepsilon B(SB)^{-1}B^T$$

여기에서 ε은 양수이고 $\Theta=I-B(SB)^{-1}S$이고 H는 다음의 LMI를 만족시키는 $(n-m)\times(n-m)$ 양한정 행렬이다.

$$A\Theta\Phi H\Phi^T\Theta^T+\varepsilon AB(SB)^{-1}B^T-BK^T+*<0$$

결국 구속조건 (6), (11) 와 (16)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$A\Theta\Phi H\Phi^T\Theta^T+\varepsilon AB(SB)^{-1}B^T-BK^T+*<0 \tag{18}$$

$$H>0,\quad \varepsilon>0 \tag{19}$$

$$\Theta\Phi H\Phi^T\Theta^T+\varepsilon B(SB)^{-1}B^T-lI<0 \tag{20}$$

$$I-\Theta\Phi H\Phi^T\Theta^T-\varepsilon B(SB)^{-1}B^T<0 \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}2\Theta\Phi H\Phi^T\Theta^T+2\varepsilon B(SB)^{-1}B^T-I & K\\ * & kI\end{bmatrix}>0 \tag{22}$$

그러므로 우리는 최소화 문제 (17)은 다음의 최소화 문제와 동치임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\Gamma:\ &\text{minimize } f(l,k)=l\cdot k\\ &\text{subject to } \ (18),(19),(20),(21),(22)\end{aligned} \tag{23}$$

위의 최소화 문제의 구속조건들은 LMI들이고 목적함수 f는 임의의 주어진 feasible 값 (l_0,k_0)에서 다음과 같이 선형화할 수 있다.

$$f(l,k)\approx \text{constant}+l_0k+k_0l$$

결국 선형화 방법으로 위의 최소화문제 Γ에 대하여 근사해(approximated solution)와 ASR의 추정치를 구할 수 있다.

ASR 추정 알고리즘:

Step 1: (18)-(22)를 만족시키는 feasible 값 (l_0,k_0)를 찾고 $i=0$으로 놓아라.

Step 2: 다음 LMI 문제의 feasible 값 (l,k)를 찾아라.

$$\begin{aligned}\Gamma_i:\ &\text{minimize } f_i=l_i\cdot k+l\cdot k_i\\ &\text{subject to } \ (18),(19),(20),(21),(22)\end{aligned}$$

Step 3: 만약 $i>0$이고 최적값 f_i^*가 주어진 작은 값 δ에 대해 $|f_i^*-f_{i-1}^*|\le\delta$가 만족되면 Step 4로 가고, 아니면 $i=i+1$으로 하고 Step 2로 가라.

Step 4: (15)에 $f^*=0.5f_i^*$을 대입하여 ASR을 구하라.

주 5 : 따름정리 2는 (l_0,k_0)값이 항상 존재함을 의미한다. 그리고 $i>0$일 때 (l_i,k_i)는 LMI 문제 Γ_i의 최적값이기 때문에 우리는 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$f_{i-1}^*=l_{i-1}k_i+l_ik_{i-1}\ge f_i^*,\quad \forall i>0$$

(18)-(22)의 LMI 구속조건들은 $l_i>0$, $k_i>0$를 의미한다. 그러므로 f_i^*는 크기가 아래로 제한되어있다(bounded below). 결국 우리는 수열 f_i^*는 수렴함을 알 수 있다.

주 6 : 위 알고리즘의 Step 1과 매 Step 2는 풀기 쉬운 LMI 문제들이므로 [7]의 LMI Control Toolbox와 같은 LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 아주 쉽고 효율적으로 해를 구할 수 있다.

주 7 : 선형화 하였기 때문에 위 알고리즘은 최적화 문

제 Γ의 광역 최적값으로 수렴하는 것을 보장하지는 않는다. 그리고 광역 최적값으로의 수렴 여부가 초기치 (l_0, k_0)에 좌우될 수 있다. 이러한 문제는 광역 최적값에 가까운 초기치를 즉 $l_0 \cdot k_0$값이 작은 초기치를 사용함으로써 해결될 수 있다. $l_0 + k_0$가 작으면 $l_0 \cdot k_0$도 작게 된다는 것에 착안하여 Step 1의 초기치 (l_0, k_0)를 선택하는 것을 다음의 LMI 최적화 문제를 통해 구하여 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}: &\ \text{minimize} \quad l+k \\ &\ \text{subject to} \quad (18), (19), (20), (21), (22) \end{aligned} \tag{24}$$

위의 LMI 최적화 문제를 통해 구한 초기치 (l_0, k_0)를 사용하면 Step 2의 iteration 수를 줄이고 광역 최적값을 구할 가능성을 높이는 효과를 얻을 수 있다.

VI. 슬라이딩 평면 설계 알고리즘

주 3은 일반성의 훼손없이 (7)에 주어진 모든 선형 슬라이딩 평면의 매개변수 표현에서 사용된 행렬 X가 다음의 LMI 구속조건을 만족시킨다고 가정할 수 있다.

$$X > I, \qquad AX - BK^T + * < 0 \tag{25}$$

쌍 (A, B)가 안정가능하므로 (25)에 대한 유한한 해 (X, K)가 존재하고 다음을 만족시키는 양수 l, k가 존재한다.

$$X < lI, \qquad \begin{bmatrix} 2X - I & K \\ * & kI \end{bmatrix} > 0 \tag{26}$$

정리 2를 얻기 위해 사용된 과정을 참조하면 슬라이딩 평면 (7)과 제어기 (8)과 시스템 (1)로 이루어진 폐회로 시스템의 ASR 추정치가 (13)과 같이 주어짐을 쉽게 알수 있다. 이것은 다음의 최적화 문제가 최적값 f^*를 갖도록 하는 최적 argument X^*를 슬라이딩 공식 (7)에 사용되는 X로 사용하면 ASR 추정치 (13)을 크게 만들 수 있음을 의미한다.

$$\begin{aligned} \Sigma: &\ \text{minimize} \ f(l, k) = l \cdot k \\ &\ \text{subject to} \quad (25), (26) \end{aligned} \tag{27}$$

결국 다음에 제시되는 알고리즘을 사용하여 슬라이딩 평면을 설계할 수 있다.

설계 알고리즘:

Step 1: (25)와 (26)를 만족시키는 feasible 값 (l_0, k_0)를 찾고 $i=0$으로 놓아라.

Step 2: 다음 LMI 문제의 feasible 값 (l, k)를 찾아라.

$$\begin{aligned} \Sigma_i: &\ \text{minimize} \ f_i = l_i \cdot k + l \cdot k_i \\ &\ \text{subject to} \quad (25), (26) \end{aligned}$$

Step 3: 만약 $i > 0$이고 최적값 f_i^*가 주어진 작은 값 δ에 대해 $|f_i^* - f_{i-1}^*| \le \delta$이 만족되면 Step 4로 가고, 아니면 $i = i+1$으로 하고 Step 2로 가라.

Step 4: LMI 최적화 문제 Σ_i가 최적값을 갖도록 하는 최적 argument X^*를 슬라이딩 공식 (7)에 사용되는 X로 사용하여 슬라이딩 평면을 계산하라.

주 8 : 우리는 주 5에서와 같은 방식으로 위의 알고리즘이 수렴함을 증명할 수 있다. 위 알고리즘의 Step 1과 매 Step 2는 풀기 쉬운LMI 문제들이므로 [7]의 LMI Control Toolbox와 같은 LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 아주 쉽고 효율적으로 해를 구할 수 있다. 그러므로 제안된 방법을 사용하면 ASR의 추정치가 커다랗게 되도록 하는 슬라이딩 평면 설계를 쉽게 수행할 수 있다.

주 9 : [4]에 주어진 LMI 영역 극점 배치 구속조건들을 최적화 문제 Σ에 포함시킨다면 슬라이딩 모드 동역학이 극점 배치 구속조건을 만족시키면서 ASR의 추정치가 커다랗게 되도록 하는 슬라이딩 평면 설계를 할 수 있다. 예를 들어 만약 최적화 문제 Σ와 Σ_i에 다음의 구속조건을 포함시킨다면 슬라이딩 모드 동역학이 최소 감쇠율 α를 보장하는 슬라이딩 평면을 설계할 수 있다.

$$\Phi^T(AX + XA^T + 2\alpha X)\Phi < 0 \tag{28}$$

만약 설계 알고리즘에 다음의 LMI 구속조건을 포함시킨다면 반지름 r과 중심 $(-c, 0)$을 갖는 원상에 슬라이딩 모드 동역학의 모든 극점이 위치하는 슬라이딩 평면을 설계할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -r\Phi^T X\Phi & c\Phi^T X\Phi + \Phi^T AX\Phi \\ * & -r\Phi^T X\Phi \end{bmatrix} < 0 \tag{29}$$

주 10 : 우리는 주 7에서와 같은 이유로 Step 1의 초기치 (l_0, k_0)를 선택하는 것을 다음의 LMI 최적화 문제를 통해 구하여 쓰면 Step 2의 iteration 수를 줄일 수 있는 효과와 더불어 더 좋은 값을 구할 수 있는 효과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Sigma_{00}: &\ \text{minimize} \quad l+k \\ &\ \text{subject to} \quad (25), (26) \end{aligned} \tag{30}$$

VII. 수치적 예

예 1 : [3]에서 다뤄졌던 다음의 시스템을 고려해보자.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

[3]에서 S가 다음과 같다고 가정했다.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

위의 슬라이딩 평면 행렬은 슬라이딩 모드 동역학이 $\dot{v}_1 = -v_1$, $v_1 = [1\ 0\ 0]x$로 주어지게 한다. ASR을 추정하기 위해 [3]에서는 다음과 같은 변환 행렬 M과 벡터 w를

사용했다.

$$M = M^{-1} = \begin{bmatrix} V^g \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^g x \\ Sx \end{bmatrix} = Mx$$

위에 주어진 변환행렬을 사용하여 [3]의 저자들은 다음의 값들을 구했다.

$$MAM^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad MB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad SM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

그리고 변환된 상태 변수 w에 대하여 다음과 같은 ASR의 추정치를 구하고 [2]의 방법을 사용해서 구한 추정치보다 훨씬 큼을 보였다.

$$\{w: \ \|w\| < 0.739\mu\} \tag{34}$$

우리의 방법을 사용하여 ASR의 추정값을 구해보겠다. V장에 주어진 ASR 추정알고리즘을 사용하여 변환된 값 (33)에 대하여 다음과 같은 최적 argument들을 구할 수 있다.

$$H^* = 1.001, \ \epsilon^* = 1.002, \ l^* = 1.004, \ k^* = 0.717$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 0.379 & 0.396 & 0.159 \\ 0.352 & 0.218 & 0.554 \end{bmatrix}^T$$

그리고 변환된 상태 w에 대하여 다음과 같은 추정치를 구할 수 있다.

$$\{w: \ \|w\| < 1.179\mu\} \tag{35}$$

이것은 [3]의 방법으로 구해진 추정치 (34)보다 1.6배 가량 큰 것이다. 제안된 방법으로 이전 방법들 [2]와 [3]보다 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

예 2 : 다시 한번 (31)의 값을 갖는 시스템 (1)을 고려해 보자. 제안된 ASR 추정알고리즘을 사용하여 변환되지 않은 값 (31)과 (32)에 대하여 다음과 같은 최적 argument들을 구할 수 있다.

$$H^* = 2.654, \ \epsilon^* = 4.209, \ l^* = 11.171, \ k^* = 1.621$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -1.163 & 2.517 & 1.795 \\ -1.548 & 2.250 & 3.770 \end{bmatrix}^T$$

그리고 원래 상태 x에 대하여 다음과 같은 ASR 추정치를 구할 수 있다.

$$\{x: \ \|x\| < 0.235\mu\} \tag{36}$$

ASR 추정알고리즘을 사용할 때 초기치를 주 7에서 주어진 것과 같이 Γ_{00}을 풀어 $(l_0, k_0) = (10.11, 2.02)$로 사용하였는데 Step 2의 iteration 수가 2이상일 때 위의 추정값으로 수렴하였다. 비교를 위해 ASR 추정알고리즘을 사용할 때 초기치를 $(l_0, k_0) = (392, 271)$로 사용도 해보았는데 Step 2의 iteration 수가 3이상일 때 위의 추정값으로 수렴하였다.

위의 추정치 (36)보다는 큰 ASR 추정치를 줄 수 있는 슬라이딩 평면을 구해보도록 하자. 슬라이딩 모드 동역학이 최소 감쇠율 1를 보장하는 슬라이딩 평면의 설계가 요구된다고 가정하자. 주 9를 염두에 두고 최적화 문제 Σ와 Σ_i에 (28)의 구속조건을 포함시킨 상태에서 VI장에 주어진 설계 알고리즘을 사용하면 다음과 같은 최적 argument들을 얻을 수 있다.

$$X^* = \begin{bmatrix} 1.004 & -0.002 & -0.006 \\ * & 1.007 & 0.000 \\ * & * & 1.011 \end{bmatrix}, \quad l^* = 1.014,$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -0.043 & 0.467 \\ 0.728 & 0.268 \\ 0.327 & 1.461 \end{bmatrix}, \quad k^* = 2.600$$

결국 다음의 슬라이딩 평면 행렬을 구할 수 있다.

$$S = \epsilon \begin{bmatrix} 0.0022 & 0.9932 & 0.0000 \\ 0.0055 & 0.0000 & 0.9888 \end{bmatrix} \tag{37}$$

그리고 다음의 ASR 추정값을 구할 수 있다.

$$\{x: \ \|x\| < 0.6158\mu\} \tag{38}$$

(4)는 (37)에 주어진 슬라이딩 평면 행렬은 슬라이딩 모드 동역학이 $\dot{v}_1 = -1.9944 v_1$로 주어짐을 의미한다. 최소 감쇠율 2가 보장되었음을 알 수 있다. 그리고 (32)에 주어진 S로 구해진 ASR 추정값 (36)보다 (37)에 주어진 S를 가지고 구해진 ASR 추정값 (38)이 대략 2.6배 큼을 알 수있다.

VIII. 결론

본 논문에서 입력의 크기가 제한된 가변구조제어시스템의 ASR을 추정하는 문제를 다루었다. 이전에 제안된 방법들 [2]와 [3] 모두 상태 변환 행렬을 사용하였기 때문에 두 방법 모두 간접적이며 추정된 ASR이 될 수 있으면 크게 하는 스위칭 평면의 설계 문제에는 적용이 어렵다. 반면에 우리가 제시한 LMI에 기반한 방법은 상태 변환을 요구하지 않기 때문에 직접적이며 상대적으로 덜 복잡하다. 그리고 LMI는 해석 뿐만 아니라 설계 문제에서도 다루기 쉽게 때문에 제안된 방법은 ASR을 크게 하는 스위칭 평면의 설계 문제에도 유용하다.

참고문헌

[1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.

[2] S. M. Madani-Esfahani, M. Hached and S.H. Zak, "Estimation of sliding mode domains of uncertain variable structure systems with bounded controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 446-449, 1990.

[3] H. H. Choi and M. J. Chung, "Estimation of asymptotic stability region of uncertain systems with bounded sliding mode controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39,

pp. 2275-2278, 1994.

[4] H. H. Choi, "On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties," *Automatica.*, vol. 35, pp. 1707-1715, 1999.

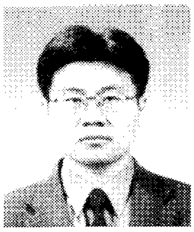
[5] A. Albert, "Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 17, pp. 434-440, 1969.

[6] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control," *Int. J. Robust and Nonlinear Control.*, vol. 4, pp. 421-448, 1994.

[7] P. Gahinet, A. Nemirovski and A. J. Laub, *LMI Control Toolbox User's Guide*, Natic, MA:The MathWorks Inc., 1995.

최 한 호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년 9월 ~ 1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원. 1998년 3월 ~ 2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수. 2003년 3월 ~ 현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 가변구조제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스.



국 태 용

1961년 11월 20일생. 1988년 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 포항 공대 전기 및 전자공학과(공학석사). 1993년 포항공대 전기 및 전자공학과(공학박사). 1993년 3월~1993년 8월 삼성항공 연구원. 1993년 9월~1995년 2월 목포대학교 전기공학과 교수. 1995년 3월~현재 성균관 대학교 전기전자 컴퓨터 공학부 교수. 관심분야는 로보틱스, 학습제어, 센서 데이터 융합등.