

함수의 그래프에서 학생의 개념 발달과정에 대한 특성

고 호 경¹⁾

본 연구에서는 그래핑 계산기를 이용한 협동학습에서 학생들의 수학적 개념 발달과정을 조사하였다. 학생들은 해결해야 할 과제가 주어졌을 때, 한 가지 개념을 형성 한 후에는 다른 개념으로의 전이를 시도하면서 최종적으로는 일반화되고 추상화된 수학적 개념을 형성해 나아갔다. 여기서 처음엔 일상 개념에 머물러 있는 모호한 혼합적 응집체로 시작하여 복합적 사고의 단계들을 거쳐 진성 개념에 이르는 특징들을 파악하였다. 구체적이고 사실적인 특성을 위주로 연합 유형과 수집 유형을 반복해 나갔는데 이 과정에서 언어와 도구가 부분적인 과정을 통제하고 수행하는데 계획적으로 사용되고, 더불어 교사가 학생이 관찰한 바를 확인시켜주는 과정을 거쳐 발달을 이루어 나아갔다. 또한 의사 개념의 수준에서 '사고의 위기'에 직면하게 되었을 때에는 비슷한 유형의 문제들을 다시 제시하며 개념을 확고하게 해 나갈 수 있도록 유도하는 것이 필요하였다.

주요용어 : 그래핑 계산기, 개념 발달 과정, 비교초기

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

Vygotsky는 인간 경험을 위한 기회를 결정하는 역사적인 조건들이 끊임없이 변화하고 있기 때문에, 발달의 내적·외적 측면간의 역동적 관계를 적절히 나타내는 보편적 도식은 존재할 수 없다하였다. 따라서 어떤 발달 단계에서의 유사성은 보일 수 있을지라도 한 학생의 기능적 학습 체제가 다른 학생들과 같을 수는 없다. 그러나 수학을 가르치는 데 있어 개념적인 교수방식이 되려면 그 현상을 일반화시킬 수 없다 할지라도 다양한 상황에서 어떠한 교수학습 상호작용이 일어나고 학생들은 어떻게 개념을 형성해 나아가는가에 대한 많은 이해가 있어야 한다.

Pea(1987)는 대부분의 연구들이 프로그램 가능한 계산기 사용을 동반한 산술적 사고에서의 근본적인 변화를 고려하는 연구라기보다는, 소프트웨어와 매체가 가져오는 기본적인 수학적 원리를 학습하는 데 있어서 향상에 대한 양적 비교만을 하였다 주장하였다. 결과만을 보여주는 것은 어찌 보면 수반된 심리적 조작은 무시한 경향도 있으며, 사고가 발달되는 과정에서 관계된 연계로써 고찰하려는 적절한 시도가 부족하다 보았기 때문이다. 따라서 그 안의 관계나 과정에서 나타나는 구체적인 현상을 제시할 필요성을 제기하고 교육적 기술공학을 사용한 학습에 대한 연구에서 원인, 과정, 변화 모두를

1) 산본공업고등학교, shrine999@hanmail.net

연구할 수 있는 실천적 사례 연구에 대한 필요성을 제안하였다.

따라서 도구의 사용과 관련하여 Vygotsky의 이론이 주목받고 있는 시점에 그의 개념 발달 과정에 대한 이론에 맞추어 상호작용을 통한 수업에서의 학생들의 개념 발달 과정을 진단해 보는 것은 상당히 의의가 있으리라 본다. 학생들의 특정 수학적 개념 발생 단계의 초기에서부터 후에, 추상적이고, 기호화되고, 종합되어 과학적 개념으로 진보하게 되는 것을 직접 관찰해 보고, 스케폴딩의 역할을 하는 학습지와 행동을 자극해 줄 수 있는 도구를 가지고 일상적 개념을 거친 후에 교사와 혹은 서로간의 상호작용을 통해 발달해 가는 과정을 살펴보고자 한다.

이러한 것들은 또한 본 연구에 참여한 학생들과 같이 수학의 특정 개념을 구성해 나아가며 구체화시키거나 추상화시키는 데 있어 어려움을 겪고 있는 학생들을 이해하고 도움을 줄 수 있는 방법을 찾아내는 효과를 기대 할 수 있을 것이다.

2. 연구 문제

본 논문에서는 그래핑 계산기를 활용해 본인이 직접 조작하고 시각화 할 수 있는 학습환경이 주어졌을 때 함수의 그래프를 학습하는 과정에서 학생들이 어떠한 수학적 개념 발달 과정을 거치는가를 Vygotsky 관점에서 이해하고자 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

◆ Vygotsky 개념발달 이론을 바탕으로 한 수학적 개념 발달 과정의 특성은 무엇인가?

3. 용어의 정의

1) 개념 발달(concept development)

본 연구에서의 개념의 발달이란 Vygotsky(1962)의 고등 정신 기능(higher mental functions)에 의한 일련의 수학 학습 활동을 통하여 보다 상위의 정신 기능으로 나타나는 과정이다. 이것은 교사나 동료와의 상호작용을 통한 외적 활동으로부터 내적인 정신 기능으로의 변형을 말하는데, 개인 정신간 작용이 개인 내적 작용으로 정신기능이 형성되는 과정 즉, 개인 정신간 국면으로부터 개인 내적 차원에서 정신기능이 형성되는 과정을 의미하는 것으로써 외부의 것이 타인에 의해 주어지는 것이 아니며, 단순한 복사나 전이가 아니라 학습자가 개인정신간 기능이라는 노력을 거치면서 개인 안에서 형성되는 과정이며, 목표 지향적인 과정을 말한다. 이러한 과정에서 나중에 형성되는 수준은 언어의 내면화를 포함하며 개념의 발달은 세 단계를 거친다고 본다: 첫 단계는 혼합적 응집체(vague syncretic conglomeration)로 시작하여 두 번째 단계인 복합체적 사고(thinking in complexes) 단계를 거쳐 마지막 진성 개념(true concept or genuine concept)이 형성되는 것을 최종 단계라 하였다. 그러나 마지막 단계에 이르지 못했다 하여 개념의 발달이 이루어지지 않은 것으로 간주하지는 않는다.

4. 연구의 제한점

1) 본 연구는 실업계 고등학교 학생들을 대상으로 한 질적 사례 연구이므로 연구 결과를 일반화하는데 제한점을 지닌다.

2) 본 논문에서는 그래핑 계산기 환경에서 학생들의 개념 발달과정이 어떠한 양상을 띄는가를 살펴보고자 하는 것이 목적이므로 연구자의 개인적 경험에서 비롯한 그래핑 계산기에 대한 신념에 의해 영향을 받을 수 있음을 배제할 수 없다.

II. 문헌의 고찰

1. 개념발달과정

개념은 불변적인 구조로 격리되고 경직되어 있는 것이 아니라 소통과 이해 그리고 문제해결을 돕는 지적 과정에서의 적극적 역할을 하며 따라서 개념 형성은 수동적이지 않은 발생적 과정으로 보았다(Vygotsky, 1962). 발달의 과정은 '고등정신기능(higher mental functions)'이라고 하는 지각, 주의집중, 논리적 기억, 계산하기, 개념형성, 사고하기, 의식 등과 같은 인간의 심리학적 능력들의 정신 작용들로 변화하는 발생적 관계이며, 이는 하위 기능인 외적인 활동으로서의 조작이 내적으로 재구성되어 보다 상위의 정신 기능으로 변형되는 과정이라 보았다. 그는 또한 발달의 결과뿐 아니라 고등 정신기능으로 발달되어 가는 과정과 절차에 관심을 두었다(Vygotsky, 1978).

Vygotsky가 제시한 개념 발달에 관한 다양한 발생 형태 중에 학생들의 수학적 개념의 이해나 발달의 측면으로 생각해보면, 이해와 개념 발달이란 수학적인 대상과 상황을 일반화하거나 대상의 요소와 특징, 그리고 대상이 포함되어 있는 상황 확인, 대상과 대상의 특징 구분, 대상에 대한 다양한 판단 그리고 대상들 사이의 관계를 종합하는 사고가 내포됨을 의미한다(Sierpiska, 1993).

Vygotsky(1962, pp. 63-81)는 새로운 것을 이해하거나 새로운 개념을 구성하는 사고의 과정을 두 가지 방법으로 연구하였는데, 그것은 실험적 연구와 실제 개념의 발달인 비-실험적 방법으로 나누었다. 아동에게 주어진 대상과 대상사이의 인위적인 개념을 구성해 가는 실험적 자료에서 그는 대상사이의 분명한 차이를 구분하지 못한 채 낮은 수준에서의 뭉뜨려진 개념에서 시작하여 사고의 발달 단계와 그 특징에 대한 설명을 하였다. 그에 의하면 개념 형성의 단계는 크게 세 가지 단계로 나누었는데, 그 첫 번째 단계를 비체계화된 범주(Unorganized categories)의 단계라 하고, 그 다음은 아동의 경험의 증가에 따른 구체적이며 사실적인 관계들을 형성해 나아가는 복합체적 사고의 단계라 하였다. Vygotsky는 복합체적 사고를 진성 개념에 도달하기까지 정교화 수준이 낮은 것부터 다섯 단계를 제시하였다.

먼저 첫 번째 복합체적 사고에는 연합적 유형(associative type)이 있는데, 여기에서는 여러 가지 사물을 그 복합의 핵심을 이루는 어떤 것과 연계하는 형태를 갖춘다. 여기서는 다양한 결합에 기초하여 새로운 사물을 추가하는 것으로 연합을 해 나가는데 그 연계가 동일하거나 공통적인 속성일 필요는 없고 유사, 대비 또는 공간상의 근접 등도 연계를 이룰 수 있다.

두 번째 복합적 사고는 수집(collection) 유형으로써 아주 근접한 것들을 구체적인 인상으로 그룹화 한다. 연합 유형이 대상 사이의 유사성에 근거하여 구성되는 반면, 수집 유형은 대상 사이의 대비에 근거하여 구성된다. 수집 유형을 거치면서 학생들은 특성 사이의 구별이 생겨나고 구체적이고 익숙한 상황 속에서 대상의 기능이 가지고 있는 수준을 구별하게 된다.

세 번째 유형은 연쇄-복합(chain complex)유형으로 개별적인 연계들을 역동적이며 연속적으로 하나의 연쇄로 결합시키는 것이며, 그 의미가 한 연계에서 다른 연계로 넘어간다. 연쇄-

복합 유형은 가장 순수한 유형의 복합적 사고로 간주될 수 있는데, 이는 사물들이 한 사물-복합체적 사고의 핵-을 통해 상호 관련되는 연합 유형과는 달리 연쇄-복합 유형에는 핵이 없고 개별 사물들 간의 관계만이 있을 뿐이다.

네 번째 유형은 확산적 복합(diffuse complex) 유형이다. 사물이 무엇인가가 공통적인 게 있을 것이라는 애매한 인상을 갖게 되며 요소들을 하나로 결합시키는 속성의 유동성으로 특징지을 수 있다. 여기에는 현실적 경험 세계의 경계 밖으로 나아갈 때면, 즉 현실적 인지의 영역 밖의 사물을 포함하게 되면 그 연계들은 자연적으로 모호하고 비현실적이며 불안정한 속성들에 근거하게 된다. 그러나 사실 매우 폭 넓은 추론 위에서 추론하며 논리적 혹은 경험적 제한점에 의한 한계를 느끼지 못한다. 이때에는 전제와 결론 사이에 어떤 연결을 시키는 것도 가능하다.

마지막 유형은 의사개념(pseudo-concept) 유형이란 부른다. 이는 마음 속에서 형성된 일반화가 표면상으로는 개념을 닮았지만 심리적으로는 진정한 개념과는 다른 상태이므로 본질적으로 복합체적 사고 단계에 속한다. 그러나 이 단계는 진정한 개념 형성간의 전이적 연계로써 중요한 역할을 하며 이미 개념을 나름대로의 방식으로 갖춘 상태로 개념을 명확히 깨닫기 이전에 개념을 조작하며 개념적 사고를 시작하는 단계이다.

세 번째 단계인 진성 개념(true concept)의 형성은 연합의 상호작용을 통해서가 아니라 모든 기초적인 심리 기능이 특정한 결합 내에서 사물을 분석하고 공통적인 특성을 추상화하고 사물들을 종합하는 것과 사물들에 내재한 특징을 분석하고 추상화하는 등의 지적 과정을 통해서 이루어진다 하였다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구방법

질적 연구를 이용하는 정당성이나 효율성은 제기된 연구문제의 유형에 따라 뒷받침된다. Yin(1994)은 다음과 같은 영역에서 연구를 하고자 할 때 사례연구가 적절하고 유용하다고 하였다.

- 실제 일어나는 상황 내에서 현실적으로 발생하는 현상을 연구하고자 할 때,
- 그 때 현상과 상황간의 경계가 명백하지 않을 때, 즉 그들 사이를 명백하게 밝히고자 할 때(Yin, 1994, p. 13).

본 연구에서 다루는 사례연구는 학생들이 보이는 개념발달 과정을 그래핑 계산기를 이용한 학습 환경이라는 상황에서 조사하는 것이다. 따라서 관찰, 참여, 질문, 청취, 의사소통을 포함하여 다양한 형태의 행위와 사고를 파악하기 위한 사례연구를 사용하는 것이 가장 적합하다.

2. 연구 절차

본 연구는 2002년 1학기 본교 2학년 전기과 수업을 이용하여 진행하였으며 한 조를 3~4명씩 조를 편성하여 그래핑 계산기를 이용하여 수업을 진행하였다. 자료수집을 위하여 그 중 특정한 조(3명)를 택하여 예비 연구에서 얻어진 분석 틀을 바탕으로 상호작용을 분석하였다. 자료 수집은 분수함수(4차시)와 삼각함수(4차시)에 대한 녹음과 비디오 녹화를 실시하였으며, 관찰자이자 연구자가 수업 중 녹음되어진 자료를 글로 녹취하였다.

3. 연구 대상

본 연구의 참가자를 선정하는 기준은 연구자가 근무하는 S공업고등학교 2학년 학생 중에서 a)지원자를 대상으로 b)수업에 적극적으로 참여하는 학생들로 c) 수학의 사칙연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)의 알고리즘 지식을 획득한 학생들로 구성되었다. 참가자들은 각각 학급에서 상위 30%의 성적을 받고 있으나 모두들 각자 가정환경이 다르고 중학교 때부터 수학학습에 어려움을 느끼고 있는 학생들이다. 그러나 참가자들은 선수학습이 있었다던가 수학적 개념이 잡혀 있는 학생들이 아니기 때문에 수학적 개념 발달의 특징을 오히려 잘 나타내어줄 수 있다는 특징이 있었다.

단구(S1): 수학에 대한 이해도가 떨어지는 반면 책은 많이 읽는 편이며 자부심이 강한 학생이다. 중학교 때는 수학 공부를 하지 않아서 성적이 안 좋게 나올 뿐이지 자신은 하면 잘할 수 있을 것이란 확신을 가지고 있다.

민구(S2): 수학적 지식이 많이 부족한 편이나 많은 관심이 있고 성실한 성격이다. 평소 수업 시간에도 수업 태도가 좋은 편이며 말수는 많지 않다. 역시 대학진학을 하고자 하며 꾸준히 공부를 해본 일이 없는 것이 자신의 문제점이라 한다.

상구(S3): 말수가 적고 이해가 빠르진 않으나 점수에 관심이 많고 수업시간에 배운 것을 꼭 알고 넘어가려 하였다. 중학교 때는 1학년 이후에 수학 공부를 한 일이 없다 하였으며 계산하는 것을 특히 싫어한다.

IV. 연구 결과 및 분석

1. 학생들의 개념 발달의 과정은 어떻게 이루어지는가?

본 논문에서는 학생들에게 해결해야 할 과제를 단계적으로 제시하며 한 가지 개념이 형성된 후에는 다른 개념으로의 전이를 시도하며 최종적으로 일반화시켜 정의해보도록 하여 숙고되고, 매개되고 내면화된 고등정신 기능들을 학습과 교수를 통해 획득되는 인지과정으로 관찰하였다. 이러한 관찰을 통해 학생들이 특정한 개념을 형성하는 데 있어서 보다 정교하거나 추상적인 방법으로 이해 할 수 없는 이유가 무엇인가를 설명할 수 있었다.

최근에 Vygotsky의 이론에 따른 개념발달을 교과교육에 도입하려는 시도는 활발히 이루어지고 있다. 그러나 많은 연구가 Vygotsky의 개념 발달과정 연구가 이중자극 방법에서 시행된 연구임을 간과하고 있다. 따라서 단일자극의 상황에서도 Vygotsky가 제시한 개념발달 과정이 이루어지는 것이 가능한가는 면밀한 검토가 이루어져야 할 것이다. 그러나 본 논문에서는 학생들에게 제시된 방법은 행위를 체계화하기 위해 제시된 학습지와 행위 자체를 자극할 수 있는 도구사용이 따르므로 이중 자극 방법²⁾이라 볼 수 있다. 여기서는 자극의 한가지 방법인 도

2) Vygotsky (1962)는 개념형성 과정을 연구하기 위해 공동연구자 중 한사람인 L. S. Sakharov가 개발한 방법으로써 두 세트의 자극을 대상자에게 제공하는데, 행동의 대상으로써의 한 세트와 행동을 체계화하기 위해 제공할 수 있는 신호이다.

구(계산기)를 학생들이 주어진 식들을 입력하며 자유롭게 탐구하다가 그 주어진 식들의 특징이 무엇인가를 발견할 수 있는 근거를 획득한다. 학생들이 이것을 발견하게 되면 새로운 개념이 형성된다. 학생들이 획득한 개념은 과제를 수행하기 위한 명확한 기능적 가치를 갖는다. 학생들이 문제를 해결하기 위해서 정말로 개념을 획득하였는가 하는 여부는 제시된 또 다른 분류항목이 유사한 문제를 도구 없이 추론에 의해 해결할 수 있는 가이다. 본 연구에서 다음의 네 가지 단계를 거쳐 학습이 이루어지도록 의도적이고 의식적인 학습 활동을 구성하여 유도하였다.

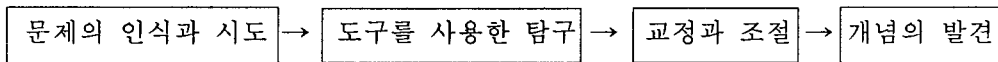


그림 1. 학생들에게 제시한 학습 단계

계산기로 그래프를 관찰 한 후 모방하여 해결 할 수 있는 순전히 기계적인 과정에서도 초기에 학생들은 혼란스러워 하였으며 이는 자신의 발달 수준 내에서만이 모방할 수 있다는 가정에서 본다면 처음 학생들의 실제적인 발달 수준은 그래프를 이해할 수 있는 단계가 아니었다. 전체적으로 볼 때 연구에 참여한 학생들이 기본적인 아이디어를 얻는 것은 계산기를 이용하는 것이 유용했고 학생들도 그렇게 생각은 하나, 여전히 교사가 문제를 일목요연하게 해결 해 주는 것을 더 편하게 생각했고 그것을 요구하기도 했다.

학습자가 “외적 활동으로부터 내적 활동으로의 변환”을 통한 지식의 내면화는 경험을 통해 발전된 지식을 내적 문맥으로 발달해 나아가는 것에 대해 언급한 것인데 본 연구대상자들에게는 전이나 확장적 사고의 어려움으로 인해 학생들 스스로 구성해 나아가기는 어려웠다. 즉 ‘내가 본 것’은 인식하는데 ‘본 것으로 인한’으로의 변화가 어려웠다. 어떤 부분에서는 계산기로 탐구를 마친 후 계산기 없이도 주어진 문제를 해결할 수 있는 단계에 이르지 못했던 부분도 있었다. 그러나 교수나 학습이 있다 없다는 구분을 ‘의도’와 ‘과정’으로 판단해야지 ‘결과’로 판단해서는 곤란하다는 조용환(1997)의 관점에 입각해 판단한다면, 결과만을 가지고 평가하기에 앞서 학생들이 고등 정신 기능을 가지고 탐구하며 문제를 해결하려는 과정 자체를 수학적 개념의 발달로 보아야 할 것이다.

Vygotsky는 개념 형성을 위한 첫 단계는 혼합성(syncretism)이라 하여 마음속에 하나의 심상으로 묶여진 사물들의 모호한 혼합적 응집체(vague syncretic conglomeration)로 시작된다 하였다

성인은 보통 새로운 개념을 형성함으로써 문제를 해결하지만 아동의 개념형성의 첫 단계는 많은 대상들을 비체계적 덩어리(unorganized congeries)나 더미(heap)로 밀어 넣는 것으로 시작된다(Vygotsky, 1962, p. 59).

이 시기에서는 학생들은 지각, 사고, 활동에서 처음 인상의 강도에 따라 매우 다양한 요소들을 혼합해 버리는 경향이 있었다. 학생들은 \sin 함수나 \cos 함수를 관찰하고 특징을 쓰라는 질문에 “물결 모양이다” 또는 “뱀이 기어가는 모양”이라 답을 하였으며, x 의 간격을 더 좁게 한다면 그래프가 어떻게 그려지겠는가 의 질문에 학생 모두가 “좁아질수록 물결 모양이 선명하게 나타난다.”고 하였다. 이는 상당히 주관적인 연계를 형성하며 아직 과학적 개념 단계에 이르지 못하고 일상 생활적 개념에 머물러 있었다. 이 시기에 학생들의 그래프에 대한 개념은 직접적인 상징이 아니라 개념의 이미지이며 한 편의 그림에 불과한 것이다. 그러나 Vygotsky는 개

념 발생(genesis)은 사물의 특징을 확인하며 비교하고 분화시켜서 사고를 통합시키는 것과 같은 지적 조작의 발생이라 했는데 그에 따르면 분명히 학생들은 개념 발생 단계의 초기에 놓여 있으며 발달해 가는 과정에 놓인 것이라 볼 수 있다.

이러한 것들이 후에, 추상적이고, 기호화되어 종합되어 과학적 개념으로 진보하게 되는데, 이것은 직접 관찰되거나 경험에 의한 형성 뿐 아니라 하향식으로 학습되어 형성됨을 보인다.

다음 단계로 “sin함수의 값을 그래핑 계산기를 이용하여 대응 표에 완성시킨 후 그 특징을 서술하라”는 질문에 “-1과 1을 넘지 않는다”라는 진보된 개념을 이끌어 낼 수 있었다. 이것은 교사가 일방적으로 개념을 전수한 것도 아니고 학생 스스로 이끌어 낼 수 있었던 것은 더더욱 아니었다. 학생들은 스케폴딩의 역할을 하는 학습지와 행동을 자극해 줄 수 있는 도구를 가지고 일상적 개념을 거친 후에 교사와 혹은 서로간의 상호작용을 통해 발달되었다.

개념 형성의 두 번째 단계는 복합체적 사고(thinking in complexes)의 단계로 이 단계에서는 다양한 사물들 사이의 구체적이며 사실적인 관계들이 직접적인 경험을 통해 형성되며 특징들을 서로 연결시킨다

복합적 사고단계에서는 아동들은 주관적 인상뿐만 아니라 사물들간에 실제로 존재하는 연계로써 사물들을 하나로 묶는다. 이는 새로운 성과이며 보다 고등한 수준으로의 진보이다 (Vygotsky, 1962, p. 61)

여기서는 부분적이라도 자기 중심성에서 벗어나게 되고 개별 사물들을 자신의 인상으로 인한 일상생활개념으로 묶는 일은 하지 않는다. 이 복합적 사고 단계에서는 사실적 연계를 그래핑 계산기를 사용한 직접적 경험을 통해 사실적 연계를 찾아내기 때문에 구체적이고 사실적 특징을 지니고 있다.

Vygotsky는 복합체적 사고의 단계를 다섯 가지의 사고 유형으로 나누었는데, 본 연구에서 학생들이 보인 개념 형성의 단계는 다섯 가지 사고 체계가 모두 나타났으나 일관성 있게 나타나는 것도 아니며 순차적으로 나타나지도 않았다.

$y = A \sin x$ 그래프의 특성을 파악하는 것에서 학생들은 공통점을 “x축이 같음”, “만나는 점이 모두 같다”고 하고 차이점은 “y값이 다르다”, “폭이 다르다”, “y축이 다르다”라고 대답하여 사실적 연계를 직접적인 경험을 통해 그래프의 핵심을 이루는 원리를 모으고 그 특징을 구체적으로 얻어 나갔다. 즉 처음 복합적 사고에서 학생들이 보인 것은 연합적 유형과 수집 유형이 거의 동시에 나타났다. 그래핑 계산기를 이용해서 연합적 유형에 쉽게 다다를 수 있었고 가장 많이 보이는 유형이며 또한 계산기가 가장 많이 활용되었다. 즉, 계산기를 이용하여 공통적인 특징을 찾아봄으로써 그래프간의 특성을 인지할 수 있는 것이다. 이 단계에서는 학생들간의 상호작용만으로 이루어지는 경우가 많으며 교사의 개입이 거의 필요 없었다. 그러나 $y = -A \sin x$ 와 $y = A \sin x$ 의 그래프의 관계에서의 특징을 알아보는 문제에서 학생들은 수집 유형 복합체 발달이 이루어지기 어려웠다. 이것은 $y = \tan x$ 와 $y = -\tan x$ 에서 그 현상이 다시 나타났으며, 【프로토콜 3, 4】에서 보이는 바와 같이 연구 끝까지 학생들이 보인 유형은 유사성에 주목을 하는 연합적 유형보다는 차이점에 근거한 개념 발달이 어려웠음을 알 수 있었다.

【프로토콜 3】

981 S1 뭐가 틀린 게 뭐가 있냐?

982 S2 몰라 난 아무리 봐도 모르겠다

983 S1 모르겠어도 해야지

- ∴
- 986 S1 이거 여기가 - 붙으니깐 뒤집혔잖아
야 비교하는데 그래프를 또 왜 그려~ 이걸 뭐라고 해야 되지?
- 987 S2 x축 대칭
- 988 S3 3번?
- 989 S2 응 x축 대칭
- 【프로토콜 4】
- 1058 S1 됐어~ 선생님 4단계 공통점 차이점 전부 써요?
- 1059 T 응
- 1060 S2 야 뭐라구 써야돼?
- 1061 S1 나 공통점뿐이 모르겠어 차이점 뭐지?
- 1062 S1 이 그래프가 뭐가 다르냐?
- 1063 S1 공통점은 와이축 좌표가 같다~. 차이점은 엑스축 좌표가 이번에는 틀리다 그렇지?
그런 거 같지?

그러나 이러한 수집 유형의 발달은 계산기를 사용한 다양하고 시각적인 경험을 바탕으로 그리고 교사가 학생이 관찰한 바를 확인시켜주는 과정으로 인하여 학생들은 수집 유형의 복합체 형성을 이루었다.

학생들은 $y = A\sin x$ 와 $y = A\cos x$ 그래프를 통하여 주기를 학습하였는데, 연구의 대상 학생들은 $f(x+p) = f(x)$ 를 만족하는 상수 p 의 값 중에서 최소의 양수를 함수 f 의 주기라고 하는 일반적인 수학의 추상화 개념으로 접근한 것이 아닌 $y = \sin x$ 의 값은 2π 간격으로 같은 값이 반복되는 것을 계산기의 trace 기능을 사용하여 확인하여 인식한 후, 같은 유형의 함수들의 주기를 구하는 문제에 적용을 시켜보며 주기에 대한 개념이 완전히 형성된 듯 하였다. 그러나 학생들은 새로운 유형의 그래프나 함수의 식이 주어졌을 때 새로 추가된 마지막 대상에 초점을 맞추며 이전에 추가된 대상과 관련하여 발생할 수도 있는 모순에는 주목하지 않으며 오직 새로운 대상과 마지막 대상 사이의 결합만을 만족시키기도 했다. 즉, $y = \sin Bx$ 의 그래프의 주기를 구하는데 있어서 '다시 돌아와 제자리로(x축 위에서 만난 점)'을 가지고 주기를 확인한 사실에만 초점을 맞추고 나머지 것들은 무시한 듯 보였다.

【프로토콜 5】

- 1120 T 단구는 주기가 전부 똑같아?
(단구는 모양이 모두 같은 것을 주기가 모두 같다고 생각하고 있었다)
- 1121 S1 예~ 전부 똑같은 거 아니 예요?
- 1123 S1 이 3개가 이점에서 다 만나니까
- 1124 T 민구는 어떻게 생각해? 너도 주기가 다 똑같다고 생각하니?
- 1125 S2 그런 건가...

【프로토콜 5】는 전에 형성한 개념에 따른 모순된 관점은 생각지 않고 방금 전 복습한 내용 중 본인들이 기억하는 한가지 핵심적 사실에 계산기에 나타난 그래프의 특성사이의 결합만 가지고 결정을 지어 버렸다. 이러한 특징은 한 가지를 학습한 후 비슷한 유형의 문제를 여러 개를 한꺼번에 다룰 때 주로 나타났다. 이는 연쇄-복합 형성의 특징으로 아직 학생들은 주기에 대한 개념을 형성하지 못한 것으로 보였다. 그러나 이러한 사고 과정이 길게 나타나는 것은 아니며 현재 이해하고 있는 것은 다른 행동의 연쇄 속에 개념의 종합이 가능해졌으며, 여기에

는 도구를 사용하여 적극적으로 주의를 집중시키고 특정한 성질들을 추출하여 종합하며 특성들을 단일화해 나갔다. 이 단계에서는 계산기를 토대로 한 교사의 참여가 비슷하게 어우러졌던 시기이다.

【프로토콜 6】

1129 T 자! 우리가 탐색 해 본.. 이 함수의 주기는?

1130 S1 아 F4 눌러 보자 어디서부터 어디까지야? 어디서부터 어디까지 반복되고 있는 것 같냐?

(S1과 S3가 같은 계산기를 가지고 눌러 보며 관찰하고 있다)

1131 S3 이거요? 여기서부터 여기요...이건 3이고 이건...1.5...

⋮

1180 T 상구는 그려보지도 않고 (주기를) 어떻게 알았니?

1181 S3 이거는요, 사인 엑스일때는 약 6, 그니깐 이파이잖아요, 사인 2엑스일 때는 지금 하나 들어갈 때 두 개 들어가서 약 3이. 파이고...

【프로토콜 6】에서 학생들은 그려보지도 않고 함수의 식만 가지고도 여러 사인 함수의 주기를 파악할 수 있었다. 그러나 이 단계의 개념들은 서로의 관계를 불안정하게 파악한 것이며, 다시 대상이 바뀌어 코사인과 탄젠트 함수로 들어가면 다시 혼돈을 겪으며 구체적이고 사실적인 특성을 위주로 또 다시 관계를 형성해 나가야 했다. 즉 연합 유형과 수집 유형을 반복해 나갔는데 여기서의 한 가지 특징은 그러한 한 영역을 수행하는 데 걸리는 시간이 전보다는 짧아진다는 것이다. 또한 이 과정에서 언어와 도구가 부분적인 과정을 통제하고 수행하는데 계획적으로 사용되어질 수 있었기 때문에 개념의 발달을 도울 수 있었다.

탄젠트 함수의 주기를 구하는 부분에서도 학생들은 $y = \tan \frac{1}{2} x$ 의 주기를

$\tan(\frac{1}{2} x + \pi) = f(x + 2\pi)$ 가 되어 주기가 2π 라는 일반화된 식으로 구한 것은 아니나 자신

이 관찰한 그래프와 식에서 관계의 보편성을 얻어내어 $\tan Bx$ 에서 B와 주기와 관계를 파악하고 다른 모든 수에 적용해내고 있었다.

탄젠트함수의 점근선을 구하는데서 확산적 복합 사고 유형이 나타났다. 학생들은 그래프에서 나타난 점근선에 먼저 “요 선이 뭐지?”하고 궁금증을 보였으며 이것은 점근선의 식을 나타내는 학습으로 이어졌다. 이러한 개념의 확장은 교사에 의해 주어진 것이 아니라 계산기가 그 원인을 제공한 것이었다. 확산적 복합 사고는 학생 스스로 그 사고 유형에 접근한 것이나, 정확한 개념을 바로 얻어낼 수는 없었고 그것들은 다시 반복된 실험과 토론에 의하여 후에 형성이 될 수 있었다.

또한 점근선을 다룰 때 확산적 복합의 개념 특징을 나타냈는데, 현 함수에서 시각적으로 감지할 수 있는 사실을 분수함수에서 얻은 개념과 연결하여 추론하였다.

【프로토콜 7】

1494 S1 계속 가면 붙을까?

1495 S2, S3 안 붙는 거 같은데.

1496 T 계속 가도 안 닿을 것 같니?

1497 S3 닿지 않을 것 같아요, 조금씩 느니깐 이렇게 계속 갈 것 같아요.

1498 T 그래? 그럼 이 그래프(탄젠트)가 이 선에 계속 가까이 가는 거면 이 선을 뭐라 불러야 되지?

1499 S2 아! 우리 이거하면서 배웠나요? 중학교 때?

1500 T 아니.

1501 S3 분수함수 때 배웠죠? 세 글자. 그죠?

...

1505 S3 점근선! 맞죠?

1506 T 그렇지 점근선이야 친구야, 분수함수 때 배운 점근선의 특징이 뭐였지?

1507 S3 그럼 이게 다 점근선들 이겠네요?

확산적 복합에서 나타난 사고를 그 뒤에 다시 확실히 시각적으로 확인해 보고자 하는 시도는 이어졌으나 학생들은 더 이상 시각적인 것에 의존하지 않고 타당성에 동의를 하였고 점근선의 식을 구하는 것에 몰두 할 수 있었다. 이러한 것들은 연속적인 경험과 다양한 상호작용으로 인해 새로운 개념과 부합되어 여러 복합체적 개념 특징들을 다시 보이게 되며 최종 목표를 향하여 진보되고 있는 것이다.

마지막 단원인 $y = A \sin Bx$, $y = A \cos Bx$, $y = A \tan Bx$ ($B \neq 0$)의 그래프를 그리고 특성을 탐구하는 문제에서 연구자는 그동안 학생들이 형성한 개념으로 인하여 논리적이고 일관성 있게 어려움 없이 접근 할 수 있으리라 여겼으나 또다시 학생들은 구체적이고 사실적인 특성을 시각적으로 확인하고자 하였다. $y = A \sin x$ 와 $y = \sin Bx$ 를 따로 따로 그래프를 그리고 특성을 이해하였지만 전에 학습한 것을 연결해 내지 못하며 $y = A \sin Bx$ 의 그래프를 그리고 특징을 파악하는 것에 곤란함을 겪는 것은 '사고의 위기'에 직면하게 된다. 이것은 개념화가 확실히 이루어지지 않은 단계로서 추상적 개념을 적용하는 데 어려움을 겪는 것이다. $y = A \sin x$ 와 $y = A \sin Bx$ 그래프의 특성들을 학습하였으나 그 개념들은 의사개념이었음을 알 수 있었다. 이러한 경우는 일반 수업에서도 쉽게 나타나는 현상이어서 교사들은 학생들이 진성 개념을 획득하였으리라 여기나 실제로는 의사개념 수준에 머물러 있는 경우가 많다는 것을 염두해 두어야 한다. 그러나 이 단계에서 교사는 답을 주지 않았으며, 학생들끼리 먼저 상호작용을 할 수 있도록 하였다.

Vygotsky는 사회적 상호작용이 복합적 사고 및 의사개념의 수준에서 개념적 사고 수준으로 전환할 수 있게 해주는 동기적 요인으로 보고 있으며, 학생들이 진성 개념을 획득하기 위해서는 복합적 사고와 결합된 추상화의 숙달이 있어야 완전한 개념의 발달로 이어질 수 있다 하였다.

추상화된 특성들이 새롭게 종합되어지고 추상적 종합 결과가 사고의 주요 수단이 될 때야만 개념이 출현된다(Vygotsky, 1962, p. 78).

따라서 '사고의 위기'에 직면하였을 경우, 비슷한 유형의 문제들을 다시 제시하며 다시 개념을 확고하게 해 나갈 수 있도록 유도하는 것이 필요하다. 이 때에는 교사가 학생들의 지식 확인 진술과 오류 확인 진술을 통하여 학생의 사고를 진단 할 수 있었음은 물론이거니와 학생들 스스로 자신의 개념을 점검하고 새로이 확립할 수 있는 기회가 될 수 있었다. 학생들이 보이는 의사개념은 인위적 개념에 속하는 '전 개념'과 사물의 특성을 주관적으로 외양만 근거로 결정하는 경우로 나누어 보여졌다.

두 의사개념 모두 복합적 사고 내에서 다른 사고 유형과 혼합되어서 나타나는 경우가 많으며 이 사고 단계에서 교사와의 상호작용을 가장 필요로 하며 이를 통해 극복할 수 있게되었다.

학생들은 위의 세 식에 대한 특성을 계산기를 가지고 다시 입력하여 파악하는데 많은 시간

이 걸리지 않았으며 그 다음부터 다른 식의 전이가 용이하였고 코사인과 탄젠트 함수에도 체계적으로 연결해 나갔다.

1990 T 이거 어떻게 그린 건대? ($y = 4 \cos \frac{1}{2} x$ 의 그래프)

1991 S3 어떤 거요? 아 폭(최대최소)이랑 주기로요... 4와 -4가 최대, 최소구요, 주기가 2분의 1분에 2파이니까 4파이. 그래서...

학생들은 마지막 단계에 이르자 주어진 식만 가지고 코사인과 탄젠트 그래프를 계산기 없이 맞게 그려냈으며 그래프의 특징들을 기술해 나갔다. 자신들이 그린 그래프를 계산기를 가지고 두 번 확인을 해 보았을 뿐 다른 어려움을 겪지 않은 것으로 보였다. 이것은 도구를 사용하여 학생들이기리 상호작용을 하며 점차 의식적이고 체계적인 사고를 한 것이었으며, 교사와의 언어적인 상호작용의 과정 중에 체계화함으로써 일반화가 이루어진 것이라 볼 수 있다. 진성 개념에 다다르기까지 부분적으로 복합적 사고를 여러 번 반복하면서 더딘 진행을 했으나, 마지막에는 도구 없이도 자신이 획득한 개념들을 바탕으로 마지막 단계의 문제들을 스스로 추상화시킬 수 있었고, 기호로 상징화된 개념만을 가지고 주어진 문제들을 해결하였으므로 진성 개념이 형성된 것이라 볼 수 있다.

V. 결론 및 논의

개념의 형성 단계가 상황에 따라 그리고 대상에 따라 모두 다르게 나타난다고 할 수 있으나, 특정 연구 대상의 학생들의 개념 형성과정을 Vygotsky의 개념 발달 과정에 비추어 설명한다는 것 또한 의의가 있는 일이라 생각되어 본 연구에서 네 가지 단계를 거쳐 학습이 이루어지도록 의도적이고 의식적인 학습 활동을 구성하여 개념발달의 특징들을 파악하였다.

Vygotsky에 의하면 개념 발생은 일반화하고 사물의 특징을 확인하며 비교하고 분화시켜 사고를 통합시키는 것과 같은 지적 조작(operation)의 발생이라 할 수 있다. 어떤 특정시기의 한 개념에 대해 모두 같은 패턴을 밟아 가는 것은 아니지만 대략적으로 학생들은 처음 계산기를 이용하여 그래프를 접하였을 경우에 주관적이고 일상적인 개념의 관계에 의하여 연결시킨 대상들을 무질서하게 혼합되어 있다가 공통적인 어떤 상황에서의 역할에 기초하여 연결되고(이 부분은 계산기를 분석적 도구로 사용하면서 특정한 성질들을 인식한다) 다시 그것들은 공통적이고 추상적인 특성에 의하여 다시 연결된다(이 부분에서는 도구나 학생간의 상호작용의 역할보다는 교사의 역할이 가장 큰 것으로 나타난다).

따라서 Vygotsky가 개념 형성과정을 연구하기 위한 실험적 연구에서 이중자극방법은 행동을 체계화 해 줄 수 있는 자극물과 행동 자체에 자극을 줄 수 있는 도구가 모두 뒷받침 된 상황이었음을 감안한다면 정교한 수학적 개념을 이해하는 데 있어서는 계산기와 같은 도구와 학생들간의 상호작용뿐만 아니고 학생들이 해결 할 것들을 순차적으로 제시 해 줄 수 있으며, 행동을 체계화 해 줄 수 있는 학습자료와 더불어 교사의 역할이 필수적으로 뒤따라야 한다.

특히 '사고의 위기'에 직면하였을 경우 비슷한 유형의 문제들을 다시 제시하며, 다시 개념을 확고하게 해 나라 수 있도록 유도하는 것만이 그 시기를 넘어 진보할 수 있는 방법이었다.

또한, 본 연구를 통해서 확인한 바에 의하면, 개념 발달의 세 단계 즉, 비체계화된 범주단계에서 복합적 사고 단계 그리고 진성 개념 획득 단계는 선형적으로 발달이 이루어졌다. 그러나

개념 발달 단계 중 복합적 사고인 연합적 유형, 수집유형, 연쇄-복합 유형, 확산적 복합, 의사 개념 유형 등은 매우 순환적으로 진행되었고 이 다섯 단계의 과정은 매우 복잡하게 얽혀있었다. 특히 선수학습의 결손으로 인해 지식을 연결해 나아가는 힘이 부족한 부진아 학생들에게는 더더욱 그러하여서 어떠한 특징을 관찰함으로써 개념이 형성된 듯 보이나 실제로는 진성 개념이 획득된 것이라 볼 수 없었던 경우가 대부분이었다. 따라서 이러한 학생들에게는 다시 되돌아가는(back tracking) 수업환경 구성이 더욱 요구된다 할 수 있고, 적절한 시기에 획득한 개념을 되짚어 줌(오류확인진술이나 지식의 확인진술을 통하여)으로써 연결시켜 나아가도록 하는 역할을 교사가 수행하여야 한다.

참 고 문 헌

- 조용환 (1997). *사회화와 교육*. 서울: 교육과학사.
- Pea, R. D. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sierpinska, A. (1993). The development of concepts according to Vygotski. In J. Schmittau., & L. Taylor (Eds.), *Focus on Learning Problems in Mathematics* Spring & Summer Editions, 15(2 & 3), 87-107.
- Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language*. E. Hanfmann & G. Vakar (eds. & trans). Cambridge Massachusetts: M. I. T. Press.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society : The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Yin, R. K. (1994). Case study research: *Design and methods*(2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

The Processes of Developing Mathematical Concepts Based on the Vygotsky's Theory

Ko, Ho-kyoung¹⁾

Abstract

The research was aimed to find a special quality to the mathematical concept development using a graphing calculator in the collaborative learning. I could observe the process in which the students had formed the generalized and abstract mathematical concepts after they were given different concepts. I also observed the characteristics of how they started with a vague syncretic conglomeration and approached to the complicated thoughts and genuine concepts. The advance of the collection type was achieved in the process of teacher's confirming of what the students had observed with a calculator. The language and the instrument were used in order for students to control the partial process. Also, they were given similar types of problems to make them clear when the students confronted 'the crisis of thoughts' at the level of pseudo-concept.

Key words: Graphing calculator, Mathematical concept development, Vygotsky.

1) Sanbon Technical high school, shrine999@hanmail.net