대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.2, 259-273. June 2003

초등학생의 분수이해[1)]에 관한 연구

권 성 룡*

본 연구는 Vinner와 Moore의 개념정의, 개념이미지, 개념이용의 이론적 체계를 활용하여 초등학생의 분수이해에 대해 조사하였다. 이를 위해 먼저 주어진 분수와 분수식으로 설명할 수 있는 상황을 설정하게 함으로써 아동의 개념이미지를 조사하였다. 두 번째로 분수가 포함된 문제해결이 분수개념이해를 바탕으로 하는 바, 다양한 분수 하위개념과 관련된 문제를 제시하고 이를 해결하게 하였다. 세 번째로 분수와 분수식으로 문장제 문제를 만들어 보게 함으로써 아동의 분수개념 이용을 살펴보았다. 연구한 결과, 분수에 대한 아동의 개념이미지가 부분-전체에 제한되어 있었으며 이로 인해 다른 하위개념에 대한 이해가 부족한 것으로 나타났다. 또 분수와 분수식을 효과적으로 적용할 수 있는 문제 상황을 설정하는데 익숙하지 못했다. 아동의 분수이해를 위해서는 다양한 하위개념에 대한 균형된 이해를 돕는 학습활동이 필요하며 교과서에 분수와 분수식을 활용한 문장제 문제만들기 활동이 더 많이 제공될 필요가 있다.

Ⅰ. 서론

초등학교 아동이 학습해야 하는 중요한 수학적 개념 중 하나가 분수이다. 분수는 일상적인 분배와 측정의 상황에서 발생된 바, 실생활 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 이해하고 다루는데 유용하게 이용될 수 있다. 다른 한편으로 분수학습은 곱셈구조와 같은 지적 발달에 필요한 정신 구조의 발달과 확장을 위한 풍부한 학습의 장을 제공하며, 이후에 접하게 될기본적인 대수 연산의 바탕이 된다(Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). 그러나 분수개념의 이해는 쉽지 않다. 그 이유는 다음의 세 가지로 생각할 수 있다. 첫째, 분수개념자체의 복잡성이다. 일반적으로 분수개념은 부분-전체, 몫, 비, 연산자, 측도 등으로 해석될 수 있는바, 분수개념을 이해하기 위해서는 각각의 하위 개념들을 이해해야 할 뿐만 아니라 이들을 통합하여야 한다(Behr et al., 1983; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976; Vergnaud, 1983). 둘째, 먼저 학습한 자연수와의 차이 때문이다.

아동들은 초등학교에 입학하기 전부터 일상적으로 분수와 관련된 다양한 경험[2)]을 하게 된

* 공주교육대학교(xenolord@gjue.ac.kr)

1) 본 논문에서 분수이해는 분수개념의 이해와 분수연산의 이해를 포괄하는 말이다. 두 가지 측면이 모두 중요하지만 분수연산의 이해가 분수개념의 이해를 바탕으로 이루어진다는 점에서 분수개념의 이해에 보다 비중을 둔 말로 이해할 수 있다.2) 이런 일상적인 경험으로부터 구성된 지식은 직관적 지식(Leinhardt, 1988), 상황적 지식(Brown et al., 1989), 비형식적 지식(Saxe, 1988)으로 불리며, 아동들에 의해서 구성된 실생활 상황의 지식으로 옳은 것과 옳지 않은 지식 모두가 포함된다.

2) 분수개념을 제대로 이해하지 못한 경우 학습자는 먼저 학습한 자연수의 산술규칙을 분수에 적용하려는 유혹을 강하게 받게 되는데 자연수에 관해 학습한 이전의 경험이 분수학습에 미치는 이런 부정적인 영향을 N-distractor(Streefland, 1984)라 한다.

다. 그러나 취학 후 먼저 학습한 자연수와 달리 분수는 표기법, 크기 비교, 연산 방법 등이 더잡하기 때문에 아동이 이해하는데 더 많은 시간이 소요된다. 자연수의 입장에서 분수를 이해하려는 시도는 분수학습을 어렵게 하며 오개념[3]을 발생시키기도 한다.

셋째, 개념적 이해보다는 절차적인 기능과 계산을 강조하는 수업 실제이다. 분수학습에서는 개념적인 이해보다는 추상적인 기호와 연산에 비중을 두어 실생활 문제 상황과 분리된 기호를 다루는 기능적 측면을 강조해 왔다(Bezuk & Bieck; 1992, Hiebert & Behr; 1988).

이런 경우 개념적인 이해에 필요한 구체적인 경험이 부족하거나, 추상적인 절차가 구체적인 경험과 어떻게 관련되는지를 알지 못하게 된다. 결과적으로 분수가 포함된 계산은 할 수 있지만 분수개념을 실생활의 구체적인 상황에 의미 있게 적용할 수 없게 된다.

분수학습의 궁극적인 목표는 분수개념의 이해라고 할 수 있다. 7차 교육과정에서는 이전에 2학년에서 도입되던 분수개념을 시기를 늦추어 3-가 단계에서, 4학년에서 다루었던 동치분수를 5-가 단계에서, 5학년에서 다루었던 소수와 분수의 관계 및 대소비교를 6-가 단계에서 다룸으로써 아동들의 분수개념이해를 도우려 하고 있다.

이를 바탕으로 분수연산에 대한 학습도 이루어진다. 문제는 분수개념을 이해한다는 것이 무엇이며 또 아동의 분수개념이해를 어떻게 평가할 수 있는가이다. 분수가 포함된 계산문제를 해결하는 것이 분수개념이해의 척도라고 보기는 어렵다.

마찬가지로 분수에 대한 수학적 정의를 아는 것을 분수개념의 이해라고 할 수도 없다.

수학적 개념의 이해에 관해서 우리는 Vinner의 이론에서 시사점을 얻을 수 있다. Vinner (1991)는 개념의 수학적 정의와 그 개념에 대한 이미지를 구별하여 다음과 같이 설명한다:

> 개념이미지란 개념의 이름과 연결된 비언어적인 어떤 것이다. 개념을 시각적으로 표현할 수 있는 경우라면 개념이미지는 시각적 표상이 될 수 있다; 이것은 경험과 인상의 총체이다(1991, p.68).

개념정의에 관한 지식은 개념이미지의 형성과는 별개이다. 따라서 개념정의를 안다는 것이 개념의 이해를 의미하지는 않는다. 개념을 획득한다는 것은 개념이미지를 형성하는 것(Vinner, 1991)이므로 개념이미지의 존재는 개념이해의 필요조건이라 할 수 있다. 이런 측면에서 분수개념에 대한 개념이미지를 살펴보는 것이 아동의 분수개념이해를 살펴보는 한 가지 방법이 될 수 있다. 분수에 대한 개념이미지란 분수개념에 대해 아동이 가진 표상이다. 아동들은 여러 상황에서 분수의 다양한 의미를 학습한 바, 아동의 분수표상에는 자신이 이해한 분수의 여러 가지 의미가 포함되어 있다. 아동의 분수표상을 고찰함으로써 아동의 분수개념의 이해를 평가할 수 있을 것이다.

한편 Moore는 개념이해에 대한 Vinner의 아이디어를 개념이해도식(concept understanding scheme)으로 확장시켰다. 개념이해도식에는 개념

---

3) 이런 일상적인 경험으로부터 구성된 지식은 직관적 지식(Leinhardt, 1988), 상황적 지식(Brown et al., 1989), 비형식적 지식(Saxe, 1988)으로 불리며, 아동들에 의해서 구성된 실생활 상황의 지식으로 옳은 것과 옳지 않은 지식 모두가 포함된다.

정의, 개념이미지, 개념이용의 세 가지가 포함된다. 이 중 개념이용이란 개념을 이용하여 예를 만들거나 예를 이용하거나 증명하는 것을 말한다(Moore, 1994). 개념을 이해했다면 이를 이용하여 예를 만들거나 활용할 수 있다는 것을 의미한다. 분수개념의 경우 주어진 분수나 분수식에 해당하는 예나 문제를 만들 수 있어야 할 것이다.

본 연구에서는 개념이해에 대한 Vinner와 Moore의 이론적 체계를 활용하여 아동들의 분수개념이해에 대해 조사하고자 한다. 구체적으로 분수로 나타낼 수 있는 상황을 아동들이 어떻게 인식하고 있는지, 다양한 분수의 하위개념과 관련된 문제를 해결할 수 있는지 그리고 분수와 관련된 문제를 만들 수 있는지 등을 살펴봄으로써 아동들의 분수개념이해를 조사할 것이다.

II. 연구문제 및 방법

아동들의 분수개념에 대한 이해정도를 살펴보기 위해서 본 연구에서는 다음을 연구문제로 설정하였다.

첫째, 초등학생은 분수에 대해 어떤 개념이미지를 가지고 있는가? 구체적으로 아동들에게 분수를 제시하고 그에 알맞은 상황을 설정하라고 했을 때 아동들의 반응은 어떠한가?

둘째, 초등학생은 분수의 하위개념(부분-전체, 몫, 비, 연산자, 측도)과 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

셋째, 초등학생은 분수나 분수계산식에 알맞은 문제 상황을 설정할 수 있는가? 구체적으로 분수나 분수계산식을 제시하고 그와 관련된 문장제 문제를 설정하라고 했을 때 아동들의 어떤 반응을 보이는가?

위 문제에 대한 답을 얻기 위해서 서울 성북구에 위치한 J초등학교 6학년 1개반(31명), 5학년 1개반(33명), 서울 금천구의 D초등학교의 6학년 1개반(34명)을 대상으로 선정하였다. 초등학생의 분수이해를 조사하는 것이므로 분수학습을 모두 마친 6학년 2개반을 대상으로 선정하였다. 5학년 1개반을 대상으로 선정한 것은 6-가 단계에서 학습한 비와 비율에 관한 내용이 6학년 아동들의 반응에 어떤 영향을 미치는가를 알아보기 위함이다. 6학년 아동들이 비와 비율에 관한 내용을 충분히 이해했다면 그들의 반응에서 분수에 대한 비와 비율의 의미를 발견할 수 있을 것으로 기대된다. 두 학교에서 선정된 학생들을 대상으로 2002년 12월 18일과 19일에 각각 약 50분간에 걸쳐서 조사를 실시하였다.

첫 번째 문제에 대한 답을 얻기 위해서 아동들에게 <보기 1>과 같은 문제를 제시하고 그에 대한 아동들의 반응을 분석하였다.

<보기 1> 분수 $\frac{1}{2}$로 나타낼 수 있는 상황을 3가지 들어보아라.

위 문제의 반응을 통해 학생이 가진 분수의 의미 중 어떤 것이 가장 두드러지는지를 알 수 있다.

두 번째 문제에 대한 답을 얻기 위해서 각 하위개념(부분-전체, 몫, 비, 측도, 연산자)과 관련된 문제를 제시하고 해결하게 하였다.

분수와 관련된 문제의 해결이 분수개념의 이해를 바탕으로 하는 바, 아동들의 반응을 통해

서 분수이해에 관한 정보를 얻을 수 있을 것이다.

세 번째 문제에 대한 답을 얻기 위해서 <보기 2>와 같은 문제를 제시하고 그에 대한 아동들의 반응을 분석하였다.

<보기 2> 분수 $\frac{1}{3}$이 포함되는 문장제 문제를 만들고 문제의 풀이과정을 자세히 써라.

아동들이 주어진 분수를 포함하는 문제를 만들 수 있는지, 만들어진 문제에서 분수와 분수 연산이 의미 있게 적용되었는지, 문제에 대한 풀이과정이 옳은지를 분석하였다.

III. 연구결과 및 분석

아동들의 분수이해를 조사하기 위해서 모두 15문제를 제시하였다. 그 중 1, 2번 문제는 분수에 대한 아동의 개념이미지를 조사하기 위한 것이다. 이 두 문항에 대해서는 5학년과 6학년 아동의 반응을 비교하여 제시하였다. 그 이유는 6-가 단계에서 비와 비율을 학습하게 되는 바, 비와 비율의 학습이 두 학년 아동의 분수에 대한 개념이미지에 어떤 영향을 미쳤는지를 살펴보기 위함이다. 3번에서 10번까지의 문항은 분수의 여러 가지 하위개념과 관련된 문제를 제시하여 해결하도록 하였고 전체 대상자의 반응을 표로 제시하였다. 마지막으로 11번에서 15번까지의 문제는 제시된 분수가 포함된 문장제 문제를 만들게 함으로써 아동들이 분수개념을 어떻게 이용하는지를 조사하였다.

1. 분수의 개념이미지

분수를 이용해서 나타낼 수 있는 실생활 상황은 다양하다. 상황이 다양할수록 분수에 대한 다양한 의미를 가지고 있는 것이다. 일반적으로 분수는 부분-전체, 몫, 비, 연산자, 측도의 하위개념[4]으로 구성되어있는데 각각은 다음과 같다.

▶ 부분-전체 - 어떤 대상을 똑같은 크기를 가지는 부분으로 등분하는 상황이다. 분할되는 대상은 연속량(예. 도형영역)과 이산량(예. 사탕) 모두 가능하다. 예를 들면, 피자를 다섯 조각으로 나눈 것 가운데 세 조각은 $\frac{3}{5}$로 나타낼 수 있다.

▶ 몫 - 등분할과 관련되어 있으며 어떤 대상을 몇 개의 부분으로 나누어 분배하는 상황이다. 예를 들면 피자 세 판을 다섯 명이 똑같이 나누어 먹으면 한 사람은 $\frac{3}{5}$판의 피자를 먹게 된다. 몫의 경우에는 두 가지 서로 다른 양(피자, 사람)이 포함된다.

▶ 측도 - 거리를 측정하기 위해서 $\frac{1}{a}$이 반복적으로 이용되는 상황이다. 100m를 똑같이 다섯 구간으로 나누어 그 중 3구간을 뛰었다면

4) 우리나라의 경우 분수는 등분할 분수, 양의 분수, 비율분수, 몫의 분수의 의미를 가지는 것으로 본다. 등분할 분수에서 $\frac{2}{3}$는 한 물건을 삼등분한 것 중의 2개를 의미한다. 또 $\frac{2}{3}m$, $\frac{1}{2}L$ 등에 분수를 사용하는 것은 양의 크기를 나타내고 있으므로 양의 분수라고 한다. 두 양 A, B에 대해서 A는 B의 $\frac{3}{5}$이라고 하는 경우는 B를 1로 보았을 때 A가 차지하는 비율을 나타내므로 비율 분수라고 한다. 마지막으로 $\frac{2}{4}$를 2÷4의 몫을 나타내는 것으로 보는 것을 몫의 분수라 한다(유병림, 1983).

내가 뛴 거리는 전체의 $\frac{3}{5}$이다.

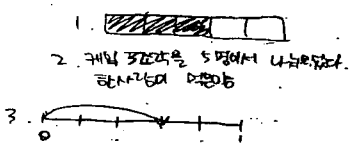
▶ 비 - 서로 관련된 두 양이 포함되는 상황으로 어떤 대상의 분할을 나타내지는 않는다. 대신 하나의 양을 다른 양과 비교하는 상황이다. 예를 들면, 커피 다섯 수저에 설탕 세 수저를 넣을 때 설탕의 양은 커피의 $\frac{3}{5}$이다.

▶ 연산자 - 이 상황에서 분수는 함수기계의 역할을 맡아서 어떤 양에 작용하여 새로운 양을 발생시킨다. 예를 들면 사과 10개의 $\frac{3}{5}$은 6개이다.

분수에 대한 아동의 개념이미지를 알아보기 위해서 분수와 분수식을 제시하고 어떤 상황에 적용할 수 있는지를 제시하게 하였다.

문제 1. 분수 $\frac{3}{5}$로 나타낼 수 있는 상황을 3가지 들어보아라.

위 문제는 아동이 분수에 대해 어떤 표상을 가지고 있는지를 알아보려고 한 것이다. 아동이 보인 표상은 분수에 대한 개념이미지이다. 아래 그림은 아동의 반응 가운데 하나를 예로 제시한 것이다. 이 아동은 분수가 적용되는 상황을 부분-전체, 몫, 측도의 세 가지로 설정한 바, 분수에 대한 개념이미지가 다양한 것으로 볼 수 있다.



[그림 Ⅲ-1] 6학년 아동의 반응

문제 1에 대한 5학년과 6학년의 반응을 분석한 결과는 다음의 표와 같다.

<표 Ⅲ-1> 문제 1에 대한 아동들의 반응

5학년	빈도수	백분율(%)
부분-전체	41	41.4
몫	4	4.0
측도	0	0.0
비	0	0.0
연산자	0	0.0
오답[1)]	54	54.5
계	99[1)]	100.0

6학년	빈도수	백분율(%)
부분-전체	125	64.1
몫	4	2.1
측도	7	3.6
비	2	1.0
연산자	0	0.0
오답	57	29.2
계	195	100.0

표에서 알 수 있는 바와 같이 반 정도의 아동이 분수가 적용되는 상황을 제시하지 못하였다. 개념이해의 필요조건이 개념이미지의 형성이라고 본다면 조사대상의 반 정도의 아동은 분수개념이해를 위한 필요조건이 형성되어 있지 않은 것이다.

반응한 아동들의 경우에도 분수개념은 부분-전체에 지나치게 편중되어 있다.

옳은 반응 중 부분-전체가 차지하는 비율은 5학년과 6학년이 각각 91.1%와 90.6%였다.

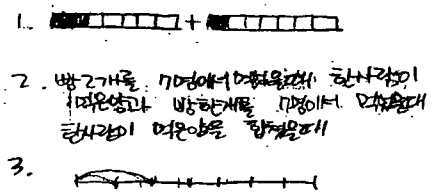
문제 2. $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}$로 나타낼 수 있는 상황을 3가지 들어보아라.

<표 Ⅲ-2> 문제 2에 대한 아동들의 반응

5학년	빈도수	백분율(%)
부분-전체	36	36.4
몫	1	1.0
측도	2	2.0
비	0	0.0
연산자	0	0.0
오답	60	60.6
계	99	100.0

6학년	빈도수	백분율(%)
부분-전체	77	39.5
몫	2	1.0
측도	6	3.1
비	0	0.0
연산자	0	0.0
오답	110	56.4
계	195	100.0

문제 2의 경우는 문제 1보다 오답률이 더 높은 것을 알 수 있다. 아래 그림 3과 같이 여러 가지 상황을 설정한 아동도 있었지만, 대개는 하나의 분수가 포함되는 상황을 설정하는 문제 1보다 더 어려워했고 따라서 오답률도 더 높게 나타났다.



[그림 Ⅲ-2] 문제 2에 대한 6학년의 반응

옳은 반응 중 부분-전체가 차지하는 비율은 5학년과 6학년이 각각 92.3%와 90.6%로 1번과 마찬가지로 대부분의 아동들이 부분-전체의 상황을 설정하였다. 부분-전체 상황에 분수를 적용하는 비율이 압도적으로 높은 것은 분수가 처음 도입되는 상황이 부분-전체라는 것과 다른 하위개념보다 쉽게 상황을 설정할 수 있다는 사실에서 기인된 것으로 생각할 수 있다.

분수개념의 이해를 위해서는 분수의 다양한 의미, 즉 다양한 하위개념을 이해하는 것이 필요하다. 문제 1과 2의 반응결과로 볼 때, 아동들의 분수개념의 이해는 제한되어 있다고 볼 수 있다. 다른 한편으로 5학년의 경우 측도, 비, 연산자와 관련된 상황이 없었던 것에 비해서 6학년에서는 소수이기는 하지만 반응이 나타났다. 그러나 6-가 단계에서 비와 비율을 학습한 것을 고려한다면 비와 비율의 학습이 6학년 아동들의 분수에 대한 개념이미지를 변화시키는데 큰 역할을 하지 못한 것으로 판단된다.

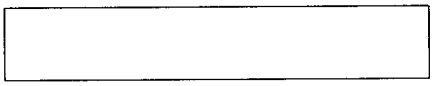
분수개념의 이해를 위해서는 부분-전체뿐만 아니라 몫, 비, 측도, 연산자 등의 하위개념에 대한 이해도 필요하므로 각 하위개념에 익숙해질 수 있는 여러 가지 상황을 아동들이 경험할 수 있도록 해 주는 것이 필요하다. 특히 부분-전체의 입장에서 분수개념을 이해한 아동들이 다른 하위개념이 도입되었을 때 기존의 개념과 새로운 개념을 통합하여 분수에 대한 개념이해를 넓힐 수 있는 충분한 시간과 활동이 제공될 필요가 있다.

2. 분수와 관련된 문제해결

아동이 분수의 하위개념과 관련된 문제를 얼마나 잘 해결할 수 있는지를 알아보기 위해서

8개의 문제를 제시하고 그 반응을 조사하였다. 각 문제에 따른 아동들의 반응은 아래의 표에 제시된 것과 같다.

문제 3. 아래 도형의 $\frac{2}{3}$만큼을 칠하여라.



<표 Ⅲ-3 >문제 3에 대한 아동들의 반응

문제 3	빈도수	백분율(%)
정답	96	98.0
오답	2	2.0
계	98	100.0

문제 4. 다섯 개의 공이 있다. 이 가운데 농구공이 셋, 축구공이 둘이다. 전체 공 가운데 축구공은 얼마인가?

<표 Ⅲ-4> 문제 4에 대한 아동들의 반응

문제 4	빈도수	백분율(%)
정답	80	81.6
오답	18	18.4
계	98	100.0

문제 5. 피자 3판을 다섯 명이 똑같이 나누어 먹었다. 한 사람이 먹은 피자의 양은 얼마인가?

<표 Ⅲ-5> 문제 5에 대한 아동들의 반응

문제 5	빈도수	백분율(%)
정답	46	47.0
오답	52	53.0
계	98	100.0

문제 6. 4L의 물을 일곱 사람이 똑같이 나누어 마셨다. 한 사람이 마신 물의 양은 얼마인가?

<표Ⅲ-6> 문제 6에 대한 아동들의 반응

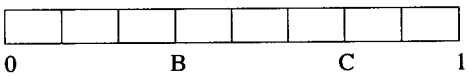
문제 6	빈도수	백분율(%)
정답	45	45.9
오답	53	54.1
계	98	100.0

문제 7. 0에서 A까지의 거리는 얼마인가?

<표 Ⅲ-7>문제 7에 대한 아동들의 반응

문제 7	빈도수	백분율(%)
정답	76	77.6
오답	22	22.4
계	98	100.0

문제 8. B에서 C까지의 거리는 얼마인가?



<표Ⅲ-8> 문제 8에 대한 아동들의 반응

문제 8	빈도수	백분율(%)
정답	62	63.3
오답	36	36.7
계	98	100.0

문제 9. 빵을 만드는데 물은 밀가루의 $\frac{1}{3}$만큼 필요하다고 한다. 밀가루가 여섯 컵이라면 물은 몇 컵이 필요한가?

<표 Ⅲ-9> 문제 9에 대한 아동들의 반응

문제 9	빈도수	백분율(%)
정답	75	76.5
오답	23	23.5
계	98	100.0

문제 10. 밀가루 한 컵에 물이 $\frac{2}{3}$컵이 필요하다고 한다. 밀가루가 $\frac{3}{4}$컵이 있다면 물은 얼마가 필요하겠는가?

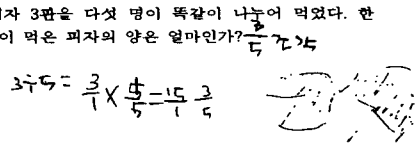
<표 Ⅲ-10> 문제 10에 대한 아동들의 반응

문제 10	빈도수	백분율(%)
정답	56	57.1
오답	42	42.9
계	98	100.0

초등학교에서 이루어지는 분수학습을 마친 6학년 아동들의 경우 분수와 관련된 문제를 쉽게 해결할 것으로 예상했었다. 그러나 제시된 문제를 제대로 해결하지 못하는 아동들이 많았다. 아동들의 반응에서 다음과 같은 사실을 알 수 있었다.

첫째, 부분-전체와 관련된 문제를 가장 잘 해결한 반면 몫의 분수와 관련된 문제를 가장 어려워했다. 피자문제의 경우, 피자가 몇 조각으로 나누어졌는지를 알 수 없기 때문에 답을 구할 수 없다거나 똑같이 나누어 먹을 수 없다는 반응도 있었다. 이런 반응은 문제 상황을 제대로 이해하지 못한 것으로 볼 수 있다.

둘째, 단위에 대한 이해가 부족했다. 아래에 제시된 예에서와 같이 전체에서 부분이 차지하는 값을 분수로 나타내기는 했으나 단위를 잘못 제시하는 경우가 많았다.



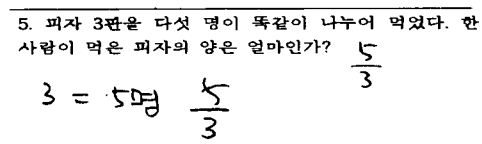
[그림 Ⅲ-3] 단위를 잘못 사용한 예 1

[그림 Ⅲ-4] 단위를 잘못 사용한 예 2

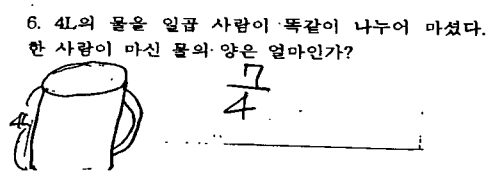
문제 5의 경우 '한 사람이 먹은 피자의 양은 몇 판인가?'와 '한 사람이 먹은 피자는 몇 조각인가?'라는 질문은 먹은 양을 묻는다는 측면에서는 같은 문제이지만 답은 전혀 다르다.

전자의 경우에는 분수가 발생하지만 후자는 그렇지 않다. 이런 문제에 올바른 답을 하기 위해서는 단위를 바르게 인식하는 것이 필요하다. 예를 들어, 연필 3자루와 연필 $\frac{3}{12}$다스는 같은 양을 나타낸다. 하지만 단위가 무엇인가에 따라서 양을 나타내는데 이용되는 수는 다르다.

셋째, 분수를 나타내는 상황에서 분자와 분모를 혼동하는 경우가 있었다. 이런 반응은 아동들이 나눗셈 상황에서 제수와 피제수를 제대로 파악하지 못한 이유 때문이다.



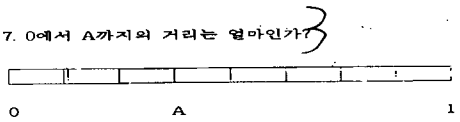
[그림 Ⅲ-5] 분자와 분모를 바꾸어 쓴 예 1



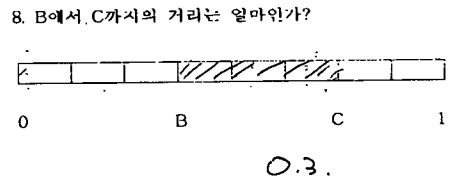
[그림 Ⅲ-6] 분자와 분모를 바꾸어 쓴 예 2

넷째, 분수에 대한 양감이 부족했다. 그림 6에 제시된 문제 5의 경우, 세 판의 피자를 다섯 명이 똑같이 나누어 먹는다면 한 사람은 한 판보다 적은 양을 먹게 된다. 문제 6의 경우도 마찬가지이다. 문제를 풀기 전에 간단한 어림만 해 보아도 자신이 제시한 답이 틀렸다는 것은 쉽게 알 수 있다.

다섯째, 문제 상황에서 전체를 제대로 인식하지 못하는 경우가 있었다. 전체의 인식은 단위의 인식과도 밀접한 관련을 가진다.



[그림 Ⅲ-7] 전체를 제대로 인식하지 못한 예



[그림 Ⅲ-8] 전체를 제대로 인식하지 못한 예

그림 8의 경우, A까지의 거리는 전체를 8개로 나눈 것 가운데 3개이므로 $\frac{3}{8}$이 되어야 한다. 그러나 나누어진 한 칸을 1로 보고 3이라고 답하였다. 그림 9의 경우도 전체가 8개로 등분되었다는 것을 알았다면 0.3이라고 답하지 않았을 것이다. 등분할이 바탕이 되는 부분-전체나 측도와 관련되는 분수 문제를 해결함에 있어서는 전체를 올바로 인식하는 것은 무엇보다 중요하다.

3. 분수와 관련된 문제 만들기

아동이 분수를 적절한 상황에 적용할 수 있는지를 알아보기 위해서 분수와 분수식을 제시하고 그와 관련된 문장제 문제를 만들도록 하였다. 이것은 예를 만드는데 분수를 이용할 수 있는지를 알아보기 위한 문제들이다. 문제 11에서 13번까지는 분수만을 제시하였고 14, 15의 경우는 분수식을 제시하였다.각 문제에 대한 아동들의 반응은 아래의 표에 제시된 것과 같다.

문제 11. $\frac{2}{3}$가 포함된 문장제 문제를 만들고 문제의 풀이과정을 자세히 써라.

<표 Ⅲ-11> 문제 11에 대한 아동들의 반응

문제 11	빈도수	백분율(%)
정답	66	67.3
오답	32	32.7
계	33	100.0

문제 12. $1\frac{3}{5}$이 포함된 문장제 문제를 만들고 문제의 풀이과정을 자세히 써라.

<표 Ⅲ-12> 문제 12에 대한 아동들의 반응

문제 12	빈도수	백분율(%)
정답	57	58.2
오답	41	41.8
계	98	100.0

문제 13. $\frac{7}{4}$이 포함된 문장제 문제를 만들고 문제의 풀이과정을 자세히 써라.

<표 Ⅲ-13> 문제 13에 대한 아동들의 반응

문제 13	빈도수	백분율(%)
정답	48	49.0
오답	50	51.0
계	98	100.0

문제 14. $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$이 포함된 문장제 문제를 만들고 문제의 풀이과정을 자세히 써라.

<표 Ⅲ-14> 문제 14에 대한 아동들의 반응

문제 14	빈도수	백분율(%)
정답	38	38.8
오답	60	61.2
계	98	100.0

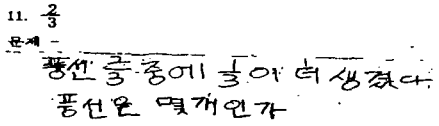
문제 15. $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$이 포함된 문장제 문제를 만들고 문제의 풀이과정을 자세히 써라.

<표 Ⅲ-15> 문제 15에 대한 아동들의 반응

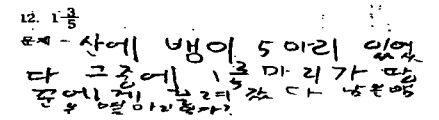
문제 15	빈도수	백분율(%)
정답	39	39.8
오답	59	60.2
계	98	100.0

분수가 포함된 문제 만들기에 대한 아동들의 반응에서 다음과 같은 사실을 알 수 있었다.

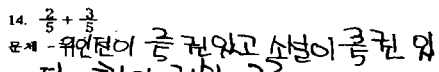
첫째, 실제로 분수를 적용할 수 없는 상황을 활용해 문제를 만든 경우가 많았다.



[그림 Ⅲ-9] 분수 사용이 적합하지 않은 예 1



[그림 Ⅲ-10] 분수 사용이 적합하지 않은 예 2



[그림 Ⅲ-11]분수 사용이 적합하지 않은 예 3

위의 예에서 제시된 예들의 문제구조는 옳으나 문제에 도입된 상황은 실제적으로 분수가 적용될 수 없는 상황이다. 이런 반응을 보인 아동들은 분수계산에는 익숙하지만 분수를 이용하여 예를 만드는 것에는 익숙하지 않거나 잘못 적용한 것이다. 이 외에도 다음과 같은 분수 사용이 적절하지 않은 반응을 보였다.

- 엘리베이터 정원이 1이다. 1이상 타면 소리가 난다. 정원이 됐는데 $\frac{3}{5}$이 더 타면 몇 명인가?
- 구슬 $\frac{3}{4}$개에서 누나가 $\frac{4}{4}$개를 주어 $\frac{7}{4}$개가 되었다. 그 중 $\frac{2}{4}$개를 동생에게 주었다면 남은 구슬은?
- 일주일 전에 산 공책의 $\frac{7}{4}$을 썼다. 남은 공책은?
- 나무가 $\frac{7}{4}$그루가 있는데 그 중에서 3그루는 베었다. 남은 나무는 몇 그루인가?

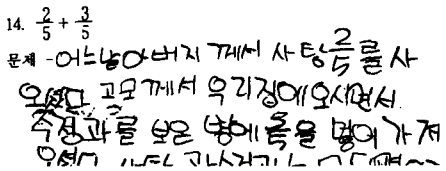
- 학교에 컴퓨터가 20대 있다. 그런데 $\frac{7}{4}$이 고장났다고 한다. 남은 컴퓨터는 몇 대인가?
- 사슴 5마리가 있었는데 사냥꾼이 $\frac{7}{4}$마리를 잡아갔다. 남은 사슴은?
- 혜진이가 포장리본을 1m샀다. $\frac{7}{4}$을 썼다. 남은 리본은 몇 m인가?
- △공장에서 $\frac{5}{7}$대를 팔았고 □공장에서 $\frac{2}{7}$대의 자동차를 팔았다. △공장과 □공장에서 판 자동차의 차는 얼마인가?
- 포도가 $\frac{5}{7}$개가 있다. 그런데 동생이 $\frac{2}{7}$를 먹어버렸다. 그러면 남은 포도는 몇 개인가?
- 지금 돈이 $\frac{5}{7}$만큼 있다. 그런데 친구에게 $\frac{2}{7}$만큼 빌려 주었다. 지금 있는 돈은?
- 전깃줄에 $\frac{5}{7}$마리의 참새가 있다. 여기서 $\frac{2}{7}$가 날아가면 지금 전깃줄에 있는 참새는?

분수의 의미를 제대로 이해하고 있는 경우라면 위에 제시된 예와 같은 상황을 설정하지 않을 것이다.

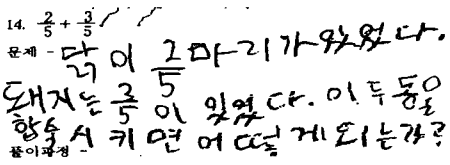
분수가 적용되는 적절한 상황을 알기 위해서는 분수를 바르게 이해하고 이를 제대로 이용할 수 있어야 한다.

더불어 분수를 상황에 적용하여 문제를 만들어보는 활동을 경험하는 것이 필요하다.

둘째, 연산을 적용할 수 없는 상황에 연산을 적용하는 경우가 있었다.



[그림 Ⅲ-12] 연산이 잘못 적용된 예 1



[그림 Ⅲ-13] 연산이 잘못 적용된 예 2

두 경우 모두 문제 상황에서는 연산을 할 수 없을 뿐 아니라 연산을 해도 의미가 없는 경우이다. 이 아동들의 경우 분수가 포함된 계산은 해 보았지만 이를 활용하여 문제를 만들거나 분수식이 적용되는 상황을 설정해보는 경험은 부족한 듯 하다.

Ⅳ. 결론

본 연구에서는 초등학교 아동들의 분수이해를 조사하기 위해서 아동들이 분수에 대해 어떤 개념이미지를 가지고 있는지와 그들이 분수개념을 어떻게 이용하는지, 분수가 포함된 문제를 해결할 수 있는지를 살펴보았다. 그 결과 다음과 같은 사실들을 알 수 있었다.

첫째, 아동들의 분수에 대한 표상은 부분-전

5) 6학년 아동들의 분수개념이해에 관한 김옥경(1997)의 연구에서도 분수를 적용한 문제만들기의 결과가 본 연구에서의 반응과 비슷하였다. 이 결과들로 미루어볼 때, 분수와 분수계산이 포함된 문장제 문제를 만들 때 아동들은 일반적으로 이런 오류를 범하는 것으로 여겨진다.

체와 관련된 상황이 대부분이었다. 반응 아동의 90%이상이 부분-전체 하위개념과 관련된 상황을 분수가 적용되는 상황으로 응답하였다. 분수개념의 도입이 부분-전체 상황에서 이루어지고 부분-전체 하위개념이 몫이나 측도와 같은 다른 하위개념의 바탕이 된다는 측면에서 아동들의 분수표상에 큰 영향을 미치는 것은 당연하게 여겨진다. 그러나 분수에 대해 아동이 가진 개념이미지가 부분-전체에만 국한된다면 아동의 분수개념도 제한될 수밖에 없다.

둘째, 분수와 관련된 문제해결에서 아동들은 부분-전체와 관련된 분수문제는 잘 해결하였으나 다른 하위개념과 관련된 문제에서는 부분-전체에 비해 성취도가 낮았다. 특히 몫의 분수와 관련된 문제는 다른 문제들에 비해서 성취도가 더 낮았다. 이 결과 역시 아동의 분수이해가 부분-전체에 국한되어 있음을 보여준다.

셋째, 분수를 의미있게 적용할 수 있는 상황을 설정하여 문장제 문제를 만드는 것에 능숙하지 못했다. 반 정도의 아동들만이 분수와 관련된 문제를 만들고 해결할 수 있었다. 분수가 포함된 문제를 만든 경우에도 분수이용이 적절치 않은 상황을 도입하는 오류5)를 보이는 경우가 많았다. 이런 아동의 경우에도 분수계산은 올바르게 하는 경우가 많았다.

아동의 분수개념이해를 위해서 처음부터 다양한 분수의 하위개념을 함께 도입해서 학년이 지나면서 점차 심화시키는 것이 효과적이라는 주장도 있을 수 있다. 그러나 지금처럼 하나의 하위개념으로부터 분수개념을 도입하고 이후에 다른 분수의미가 도입되는 상황에서 아동이 분수개념을 이해하기 위해서는 부분-전체의 측면에서 이해한 분수개념이 이후에 새롭게 도입되는 하위개념과 통합 및 조정하여야 한다. 이를 위해서는 다양한 분수하위개념을 통합된 개념체계로 연결짓는 공통요소를 강조하여 지도하는 것이 필요하다.

분수의 여러 하위개념을 통합된 개념체계로 연결지을 수 있는 공통요소는 단위(unit), 분할(partitioning), 양(quantity)의 개념이다(Carpenter et al., 1993). 분수의 여러 가지 하위개념은 어떤 단위를 선택하고 어떻게 변형(재구성)하는가의 차이만 있을 뿐 모두 단위와 밀접하게 관련되어 있다.

뿐만 아니라 단위는 측정이나 자리 값과 같은 수학적으로 중요한 개념의 이해에도 기본이 된다. 세기(counting)가 자연수 개념 및 연산 개념의 발달에 있어 핵심적인 역할을 하듯이 분할은 분수개념의 발달에서 중요한 역할을 한다. 부분-전체의 의미에서 분수개념을 도입할 때, 아동은 연속량을 등분할한 후 전체의 분할수와 그 중 일부분이 차지하는 부분의 수를 세는 활동을 하게 된다.

이런 과정에서 분수개념을 이해하기 위해서는 세기와 분할을 통합하는 것이 필요하다. 세기와 분할을 통합한다는 것은 분할된 대상을 셈의 대상으로 인식하면서 동시에 각 부분을 하나의 양으로 인식하는 것을 의미한다.

그러나 대부분의 아동은 이것을 통합하지 못하고 세기에만 의존하게 됨으로써 분할된 결과를 새로운 수(분수)로 나타낼 수 있는 양으로 인식하지 못한다. 따라서 분할된 수와 각 부분의 차지하는 양 사이의 상보적인 관계를 이해할 수 있는 활동이 제공되어야 할 것이다.

아동의 분수이해를 돕기 위해서 다음과 같은 활동들을 제안할 수 있다.

* 아동들의 비형식적 지식 활용하기
* 기호보다는 의미 강조하기
* 다양한 분할활동 하기
* 활동을 통한 동치분수 만들기
* 다양한 표상 경험하기

* 분수의 양적인 개념 강조하기
* 연산에서의 의미 강조하기

결국 여러 하위개념의 통합은 아동들이 분수에 대한 다양한 개념이미지를 가지도록 돕는 것이다. 이는 아동이 가진 비형식적 경험을 활용하는 것으로부터 시작되어야 한다.

부분-전체의 경우 등분할 활동이 기본이 되는 바, 아동이 경험한 일상적인 분배상황이 이해의 기초가 된다. 이와 마찬가지로 다른 하위개념의 경우에도 아동의 일상적인 경험을 활용하는 것이 이해에 도움이 될 것이다. 다양한 개념이미지를 구성한다는 것은 다양한 표상을 구성하는 것이다.

위에서 제시된 여러 가지 활동에서 교사가 관심을 가져야 할 것도 바로 아동들의 표상이다. 아동이 분수에 대해서 어떤 표상을 가지고 있는지, 분수와 관련된 상황을 어떻게 표상하는지에 관한 분석을 통해서 아동들의 분수개념의 이해에 대한 많은 정보를 얻을 수 있기 때문이다.

이와 더불어 분수학습활동에 분수와 분수식을 제시한 후 이를 이용하여 이야기를 만들거나 문장제 문제를 만드는 활동이 포함될 필요가 있다. 문제 만들기와 같은 활동을 통해서 기존에 만들어진 문제를 제시하고 해결하는데 익숙해진 아동들이 스스로 문제를 만들고 그것을 해결함으로써 분수가 효과적으로 적용되는 상황을 이해할 수 있기 때문이다.

문장제 문제를 만드는 활동의 경우 교과서에 활동이 포함되어 있기는 하지만 매우 부족하다. 개념을 이용해서 예를 만들거나 문장제 문제를 만드는 활동만으로도 분수를 의미없는 상황에 적용하거나 의미없는 연산을 적용하는 오류를 줄일 수 있을 것이다.

참고문헌

김옥경(1997). **초등학교 6학년 학생들의 분수 개념 이해 및 분수 수업 방안에 대한 연구.** 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

유병림(1983). **산수과 교수법과 교재연구.** 동명사.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). *Rational number concepts.* In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp.91-128). New York: Academic.

Bezuk, N., & Bieck, M. (1992). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grade Mathematics* (pp.118-136). NY: Macmillan Publishing Company.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32-42.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Romberg, T. A. (1993). Toward a unified discipline of scientific inquiry. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An integration of research.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company.

Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp.1-18). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Eds.), *Numbers and measurement: Papers from a research workshop* (pp.101-144). Columbus, OH: ERIC /SMEAC

Leinhardt, G. (1988). Getting to know: Tracing students' mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist, 23*(2), 119-144.

Moore, R. C. (1994). Making transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Saxe, G. B. (1988). Candy selling and math learning. *Educational researcher, 17*(6), 14-21.

Streefland, L. (1984). *How to teach fractions so as to be useful.* Utrecht, Netherlands: OW & OC.

Vergnaud, P. (1983). Multiplicative Structure. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics Concepts and Processes*(pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vinner, S. (1991). The role of definition in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.65-81). Dordrecht: Kluwer.

A Study on Elementary School Students' Understanding of Fractions

Kwon, Sung Yong (Gongju National University of Education)

A fraction is one of the most important concepts that students have to learn in elementary school. But it is a challenge for students to understand fraction concept because of its conceptual complexity. The focus of fraction learning is understanding the concept. Then the problem is how we can facilitate the conceptual understanding and estimate it. In this study, Moore's concept understanding scheme(concept definition, concept image, concept usage) was adopted as an theoretical framework to investigate students' fraction understanding.

The questions of this study were a) what concept image do students have? b) How well do students solve fraction problems? c) How do students use fraction concept to generate fraction word problem?

By analyzing the data gathered from three elementary school, several conclusion was drawn.

1) The students' concept image of fraction is restricted to part-whole sub-construct. So is students' fraction understanding.

2) Students can solve part-whole fraction problems well but others less. This also imply that students' fraction understanding is partial.

3) Half of the subject(N=98) cannot pose problems that involve fraction and fraction operation. And some succeeded applied the con- cept mistakenly.

To understand fraction, various fraction subconstructs have to be integrated as whole one. To facilitate this integration, fraction program should focus on unit, partitioning and quantity. This may be achieved by following activities:

* Building on informal knowledge of fraction
* Focusing on meaning other than symbol
* Various partitioning activities
* Facing various representation
* Emphasizing quantitative aspects of fraction
* Understanding the meanings of fraction operation

Through these activities, teacher must help students construct various faction concept image and apply it to meaningful situation. Especially, to help students to construct various concept image and to use fraction meaningfully to pose problems, much time should be spent to problem posing using fraction.

* **key words: fraction, concept image, concept usage, representation**