

예조건화된 Navier-Stokes 방정식에서의 풍상차분법의 수치특성

길재흥*, 이두환*, 손덕영*, 최윤호†, 권장혁**, 이승수***

(2003년 1월 25일 접수, 2003년 6월 18일 심사완료)

Numerical Characteristics of Upwind Schemes for Preconditioned Navier-Stokes Equations

Jae-Heung Gill, Du-Hwan Lee, Duk-Young Sohn, Yun-Ho Choi,
Jang-Hyuk Kwon and Seung-Soo Lee

Key Words : Time-Derivative Preconditioning Method (시간항 예조건화기법), Compressible Flow (압축성 유동), Upwind Algorithm (풍상차분법), Stability Analysis (수치안정성 해석), Aspect Ratio (격자중횡비), Convergence Characteristics (수렴특성)

Abstract

Numerical characteristics of implicit upwind schemes, such as upwind ADI, line Gauss-Seidel (LGS) and point Gauss-Seidel (LU) algorithms, for Navier-Stokes equations have been investigated. Time-derivative preconditioning method was applied for efficient convergence at low Mach/Reynolds number regime as well as at large grid aspect ratios. All the algorithms were expressed in approximate factorization form and von Neumann stability analysis was performed to identify stability characteristics of the above algorithms in the presence of high grid aspect ratios. Stability analysis showed that for high aspect ratio computations, the ADI and LGS algorithms showed efficient damping effect up to moderate aspect ratio if we adopt viscous preconditioning based on min-CFL/max-VNN time-step definition. The LU algorithm, on the other hand, showed serious deterioration in stability characteristics as the grid aspect ratio increases. Computations for several practical applications also verified these results.

1. 서 론

Navier-Stokes 방정식에 대한 초기의 CFD 알고리즘은 대류항의 이산화시 주로 중심차분법을 이용하였다. 이와 같은 이산화 시스템은 본질적으로 내재항이 대각지배적이지 않으므로 Jacobi나 Gauss-Seidel 등의 일반적인 완화기법(relaxation)을 사용할 경우 불안정하게 된다. Beam과 Warming⁽¹⁾ 및 Briley와 MacDonald⁽²⁾의 근사분해기법(approximate factorization)은 이와 같은 시스템의 내재항에 대한 역행렬을 성공적으로 구한 대표적인 방법이며, 이는 ADI (alternating direction implicit) 기법⁽³⁾으로부터

확장되었다. 1980년대 중반부터 충격파와 같은 유동장 중의 심한 불연속 현상을 잘 예측할 수 있는 풍상차분법이 널리 쓰이기 시작하였다. 이와 같은 풍상차분법은 내포하고 있는 대각지배적 특성으로 인하여 내재변의 역행렬을 구하는데 있어, 다양한 근사분해 방법을 적용할 수 있는 장점을 가지고 있다.⁽⁴⁾

현재 이러한 풍상차분법은 압축성 유동을 해석하는 데 가장 적합한 전산해석 기법으로 알려져 있는 시간전진법과 함께 널리 사용되고 있다. 그러나 이와 같은 시간전진법은 고속의 유동과 Re수가 큰 유동의 해석에는 적합하지만, 저속 및 저 Re수의 유동에서는 수렴성이 크게 저하되는 단점이 있는 것으로 알려져 있다. 이러한 문제를 해결하고자 다양한 예조건화 방법이 개발되었으며, 이는 현재 상당한 응용 범위에서 적용되고 있다.^(5,8)

본 연구에서는 압축성 유동 수치기법의 수렴성 가속을 위해 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식에

* 아주대학교 대학원 기계공학과
† 책임저자, 회원, 아주대학교 기계공학과
Email : ychoi@ajou.ac.kr
TEL : (031)219-2346 FAX : (031)213-7108
** 회원, 한국과학기술원 항공우주공학전공
*** 인하대학교 기계항공공학부

Choi와 Merkle⁽⁹⁾의 예조건화 방법을 적용하였고, 이와 같은 예조건화 시스템에 풍상차분법을 이용한 다양한 근사분해기법을(ADI 근사분해기법, point Gauss-Seidel 기법,^(9,10) line Gauss-Seidel 기법^(11,12)) 적용하여 그 수치 특성을 조사하고자 하였다. 이를 위하여 von Neumann 수치안정성 해석을⁽¹³⁾ 통하여 각 기법 및 격자종횡비에 따른 안정성 특성을 알아보았으며, 또한 실제 계산을 통하여 이들 기법의 수렴특성을 검토하였다.

2. 지배방정식

2.1 예조건화 Navier-Stokes 방정식

예조건화된 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같은 벡터식으로 쓸 수 있다.

$$\Gamma_p \frac{\partial Q_p}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = LQ_p \quad (1)$$

여기서 Γ_p 는 예조건화 행렬이며, 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \rho'_p & 0 & 0 & \rho'_T \\ u\rho'_p & \rho & 0 & u\rho'_T \\ v\rho'_p & 0 & \rho & v\rho'_T \\ h_0\rho'_p - (1-\rho h_p) & \rho u & \rho v & h_0\rho'_T + \rho h_T \end{pmatrix} \quad (2)$$

식 (1)의 종속변수벡터 Q_p 와 플럭스벡터 E , F 는 다음과 같다.

$$Q_p = [p, u, v, T]^T$$

$$E = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u]^T$$

$$F = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e+p)v]^T$$

또한 Navier-Stokes 방정식에 일반적으로 사용하는 종속변수 벡터는 다음과 같다.

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$$

여기서 위 식에 나타나는 모든 변수는 밀도 ρ , 속도성분 u, v , 압력 p , 온도 T 그리고 단위부피당 총에너지 e 를 포함하여 표준 기호로 정의되어 있다. 또한 예조건화 행렬에는 가상적인 물성치 ρ'_p 과 ρ'_T 이 포함되어 있으며, $\rho'_p = \rho_p$, $\rho'_T = \rho_T$ 로 정의하면, $\Gamma_p = \partial Q / \partial Q_p$ 가 되어 식 (1)은 일반적인 Navier-Stokes 방정식으로 되돌아가게 된다. 여기서 ρ_p 및 ρ_T 는 완전기체에서 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_p = \partial \rho / \partial p = 1/RT, \quad \rho_T = \partial \rho / \partial T = -\rho/T$$

식 (1)의 우변은 점성항을 나타내며, 다음과 같은 연산자 L 에 의해서 표현된다.

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \left(R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + R_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(R_{yx} \frac{\partial}{\partial x} + R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu u & \mu v & k \end{bmatrix}, \quad R_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu v & -\frac{2}{3}\mu u & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{yx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & \mu & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu v & \mu u & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{yy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu u & \frac{4}{3}\mu v & k \end{bmatrix}$$

여기서 R_{ij} 는 각각 점성계수 μ 와 열전도계수 k 로 이루어진 확산계수 행렬이다.

2.2 예조건화 변수의 정의

식 (1)을 종속변수 Q_p 에 대한 식으로 나타내기 위하여 대류항에 chain rule을 적용하고 양변에 Γ_p^{-1} 를 곱하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q_p}{\partial t} + \Gamma_p^{-1} \frac{\partial E}{\partial Q_p} \cdot \frac{\partial Q_p}{\partial x} + \Gamma_p^{-1} \frac{\partial F}{\partial Q_p} \cdot \frac{\partial Q_p}{\partial y} = \Gamma_p^{-1} L Q_p \quad (4)$$

식 (4)의 물리적, 수치적 특성은 행렬 $\Gamma_p^{-1} \partial E / \partial Q_p$ 의 고유치들로부터 예측될 수 있으며, 또한 빠른 수렴특성을 위하여는 고유치들이 모두 비슷한 크기를 가져야 한다. 위의 행렬 $\Gamma_p^{-1} \partial E / \partial Q_p$ 는 4개의 고유치(λ_+ , λ_0 , λ_- , λ_{\pm})를 가지며, λ_+ , λ_- 는 다음 식과 같다.

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[u \left(1 + \frac{d}{d'} \right) \pm \sqrt{u^2 \left(1 - \frac{d}{d'} \right)^2 + 4 \frac{\rho h_T}{d'}} \right], \quad (5)$$

$$d = \rho h_T \rho_p + \rho_T (1 - \rho h_p),$$

$$d' = \rho h_T \rho'_p + \rho'_T (1 - \rho h_p)$$

여기서 음속의 정의($c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s = \rho h_T / d$)를 이용하여 다음과 같이 가상음속 V_p 를 정의한다.

$$V_p^2 = \frac{\rho h_T}{d'}$$

이를 이용하면 식 (5)로부터 ρ'_p 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\rho'_p = \frac{1}{V_p^2} - \frac{\rho'_T (1 - \rho h_p)}{\rho h_T} \quad (6)$$

또한 본 연구에서 사용한 Choi와 Merkle의 예조건화 시스템에서는 $\rho'_T = 0$ 이며,⁽⁹⁾ 이를 이용하면 $\rho'_p = 1/V_p^2$ 이 된다.

한편, 식 (5)에서 d/d' 은 가상음속과 실제음속의

비의 제곱이 되며, 편의상 이 값을 예조건화 매개변수 $\varepsilon = d/d' = V_p^2/c^2$ 으로 정의하면, $\rho'_p = 1/\varepsilon c^2$ 이 되어 식 (5)의 고유치는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[u(1+\varepsilon) \pm \sqrt{u^2(1-\varepsilon)^2 + 4\varepsilon c^2} \right] \quad (7)$$

본 예조건화 방법에서는 가상음속 $V_p = \text{Min}(V_{inv}, c)$, $V_{inv} = \sqrt{u^2 + v^2}$ 로 선택함으로써 예조건화 매개변수는 다음과 같이 된다.

$$\varepsilon = \text{Min}(M_{inv}^2, 1), \quad M_{inv} = \sqrt{u^2 + v^2}/c \quad (8)$$

이는 아음속 유동에서는 가상음속을 입자속도와 같게 하여 고유치를 같은 크기로 유지하고, 초음속 유동에서는 실제음속과 같게 조절하여 본래의 예조건화되지 않은 시스템으로 되돌아가게 한다.

비점성 유동의 예조건화 시스템에서 시간 간격은 CFL수의 정의($CFL = \lambda \Delta t / \Delta x$)에 따라 다음 식에 의해서 결정된다.

$$\Delta t = \frac{2\Delta x CFL}{u(1+\varepsilon) + \sqrt{u^2(1-\varepsilon)^2 + 4\varepsilon c^2}}$$

이 방법은 고Re수의 점성 유동에서도 효율적인 수렴특성을 얻을 수 있다.

그러나 Re수가 작은 점성 유동에서는 점성 효과가 지배적일지라도 파동의 전파와 (wave propagation) 같은 비점성 특성이 여전히 중요한 영향을 미치므로 CFL수와 VNN ($VNN = v\Delta t/\Delta x^2$) 수를 함께 조절하여 시간간격을 결정해야 한다. CFL수와 VNN수를 함께 조절하는 방법은 Choi와 Merkle⁽⁹⁾이 처음으로 제시하였으며, 이 경우 ε 은 다음과 같이 다시 정의된다.

$$\varepsilon = \text{Min}[\text{Max}(\varepsilon_{inv}, \varepsilon_{vis}), 1] \quad (9)$$

여기서 비점성 예조건화 매개변수 ε_{inv} 는 식 (8)과 동일하고, 점성 예조건화 매개변수 ε_{vis} 는 중형비가 큰 격자계에서의 수렴속도 증진을 위하여 maximum-VNN 시간간격 정의에 따르면 다음과 같다.⁽⁷⁾

$$\varepsilon_{vis} = \text{Max}[\varepsilon_{vis}^x, \varepsilon_{vis}^y] \quad (10)$$

$$\varepsilon_{vis}^x = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-1 + \frac{\rho h_T}{du^2}}, \quad \varepsilon_{vis}^y = \frac{\beta(\beta-1)}{\beta-1 + \frac{\rho h_T}{dv^2}}$$

$$\alpha = \frac{CFL}{VNN} \frac{AR^2}{Re_{\Delta x}}, \quad \beta = \frac{CFL}{VNN} \frac{1}{AR^2 Re_{\Delta y}}$$

여기서 $AR = \Delta x/\Delta y$ 이고, $Re_{\Delta x} = u\Delta x/\nu$, $Re_{\Delta y} = v\Delta y/\nu$ 이다.

3. 수치해석 기법

식 (1)의 대류항을 플럭스 차분 분할법(flux difference splitting)을 이용하여 이산화하고, 시간에 대하여 Euler 내재적 차분을 수행하면, 다음과 같이 이산화된 식을 얻을 수 있다.

$$\left[\Gamma_p + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nabla_x A^+ + \Delta_x A^-) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\nabla_y B^+ + \Delta_y B^-) \right] \Delta Q_p = -\Delta t R^n \quad (11)$$

$$-\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta Q_p = -\Delta t R^n$$

여기서, Δ_x, ∇_x 는 1차의 전향과 후향차분을 나타내며, $A_i^{\pm} = (A_{pi} \pm \Gamma_p | \Gamma_p^{-1} A_p |_{i\pm 1/2})/2$ 로 정의되고, $A_p = \partial E / \partial Q_p$ 이다. 또, R^n 은 정상상태의 잔여항을 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$R^n = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(R_{xx} \frac{\partial Q_p}{\partial x} + R_{xy} \frac{\partial Q_p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(R_{yx} \frac{\partial Q_p}{\partial x} + R_{yy} \frac{\partial Q_p}{\partial y} \right) \quad (12)$$

식 (11)의 해는 다양한 근사적인 방법을 통해 효과적으로 얻을 수 있다. 본 연구에서는 보편적으로 사용되는 세가지 수치기법 ADI, line Gauss-Seidel과 point Gauss-Seidel 방법을 고려하였으며, 이들 알고리즘은 다음과 같은 근사분해식으로 표현할 수 있다.

$$N_1 D^{-1} N_2 \Delta Q_p = -\Delta t R^n \quad (13)$$

여기서 N_1, N_2, D 는 각 알고리즘마다 달리 정의되는 연산자로서 다음 절에 표시하였다. 또한 내재항은 1차 정확도의 풍상차분법, 잔여항은 대류항에 대하여는 3차 정확도의 풍상 편향차분법(upwind biased difference), 점성항에 대하여는 2차의 중심차분법을 이용하여 이산화하였다.

3.1 ADI 알고리즘

풍상차분 ADI 알고리즘은 대류항을 풍상차분법으로 차분하는 것을 제외하면 본질적으로 중심차분 ADI 알고리즘과 유사하다. ADI 알고리즘은 계산격자를 한 행씩 x방향으로 진행하며 (sweep) 계산한 후, 다시 한 열씩 y방향으로 진행하여 계산하는 방식이며, 근사분해된 형태는 다음 식과 같다.

$$N_1 = \left[\Gamma_p + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nabla_x A^+ + \Delta_x A^-) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (R_{xxi+1/2} \Delta_x - R_{xxi-1/2} \nabla_x) \right]$$

$$N_2 = \left[\Gamma_p + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\nabla_y B^+ + \Delta_y B^-) - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (R_{yyj+1/2} \Delta_y - R_{yyj-1/2} \nabla_y) \right] \quad (14)$$

$$D = \Gamma_p$$

3.2 Line Gauss-Seidel 알고리즘

Line Gauss-Seidel (LGS) 알고리즘은 계산격자의 각 열 또는 행을 좌우 또는 상하로 왕복하며 block tridiagonal inversion을 수행하는 방식이다. LGS 알고리즘은 2-sweep, 4-sweep 또는 multi-sweep 방식으로 적용될 수 있으며, 본 연구에서 사용한 4-sweep LGS (LGS-4) 알고리즘의 근사분해식은 다음과 같다.

$$N_1 = \left[S_x - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi-1/2} \Big|_{i-1} \right] S_x^{-1} \cdot \left[S_x + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1}^- - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi+1/2} \Big|_{i+1} \right]$$

$$N_2 = \left[S_y - \frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j+1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yyj-1/2} \Big|_{j-1} \right] S_y^{-1} \cdot \left[S_y - \frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j+1}^- - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yyj+1/2} \Big|_{j+1} \right] \quad (15)$$

$$D = S_x \cdot \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+ + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi-1/2} \Big|_{i-1} \right] + \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1}^- - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi+1/2} \Big|_{i+1} \right] - \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+ + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi-1/2} \Big|_{i-1} \right] S_x^{-1} \cdot \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1}^- - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi+1/2} \Big|_{i+1} \right] - \left[\frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j-1}^+ + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yyj-1/2} \Big|_{j-1} \right] S_y^{-1} \cdot \left[\frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j+1}^- - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yyj+1/2} \Big|_{j+1} \right]$$

$$S_x = S - \frac{\Delta t}{\Delta x} (B_{j-1}^+ - B_{j+1}^-) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (R_{yyj+1/2} \Big|_{j+1} + R_{yyj-1/2} \Big|_{j-1})$$

$$S_y = S - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i-1}^+ - A_{i+1}^-) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (R_{xxi+1/2} \Big|_{i+1} + R_{xxi-1/2} \Big|_{i-1})$$

$$S = \Gamma_p + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_i^+ - A_i^-) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (B_j^+ - B_j^-) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (R_{xxi+1/2} + R_{xxi-1/2}) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (R_{yyj+1/2} + R_{yyj-1/2})$$

4-sweep LGS (LGS-4) 알고리즘은 x 방향으로의 전후 진행 계산에 이어 y 방향의 상하 진행 계산을 수행한다.

3.3 Point Gauss-Seidel 알고리즘

2-sweep point Gauss-Seidel (LU) 알고리즘은 첫 번째 진행 계산에서는 하삼각행렬이, 두 번째 진행 계산에서는 상삼각행렬이 형성되므로 LU 알고리즘이라 부르기도 한다. 2차원에서 LU 알고리즘은 다음과 같은 근사분해식으로 쓸 수 있다.

$$N_1 = \left[S - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j-1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi-1/2} \Big|_{i-1} - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yyj-1/2} \Big|_{j-1} \right]$$

$$N_2 = \left[S - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j+1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xxi+1/2} \Big|_{i+1} - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yyj+1/2} \Big|_{j+1} \right] \quad (16)$$

$$D = S$$

여기서 S는 식 (15)의 정의와 같다.

4. 수치안정성 해석

본 연구에서는 격자중형비의 영향을 포함하여 세 가지 알고리즘의 안정성 특성을 von Neumann 수치 안정성 해석⁽¹³⁾ 통하여 조사하였다. 다양한 중형비를 갖는 점성유동에서 중심차분 ADI 기법에 대한 연구에서 min-CFL/max-VNN을 사용하는 것이 효과적인 것으로 밝혀진 바 있다.⁽⁷⁾ 이와 같이 혼합된 시간간격 정의를 사용하는 이유는 유동 방향으로 지배적인 현상은 주로 대류에 의한 것이고 (CFL에 의해 표현됨), 유동에 직교하는 방향으로 지배적인 현상은 점성에 의한 것 (VNN에 의해 표현됨)이라는 것과 관련이 있다. 본 연구에서도 위와 같은 min-CFL/max-VNN을 이용하여 풍상차분 기법에 대한 수치 안정성해석을 수행하였다.

4.1 ADI 알고리즘

다양한 중형비를 갖는 점성유동 문제에 적용한 풍상차분 ADI 기법의 안정성 해석 결과를 Fig. 1에 나타내었다. 계산조건은 $Re_{\Delta x} = 10$, $M = 0.001$, $v/u = 1$ 이며, 사용한 CFL과 VNN은 각각 min-CFL=5, max-VNN=100이다. 안정성 해석 결과 min-CFL/max-VNN의 점성 예조건화를 사용하였을 경우 AR=100까지는 모든 파수(wavenumber) 영역에서 비교적 안정적인 amplification factor를 볼 수 있어 좋은 수렴특성을 예측할 수 있다. 그러나 AR=1000 이상에서는 저파수 영역의 축방향 모드 amplification factor가 1에 가까워져 감쇠효과가 저하되는 것을 볼 수 있다. 이는 6절에서 보일 실제

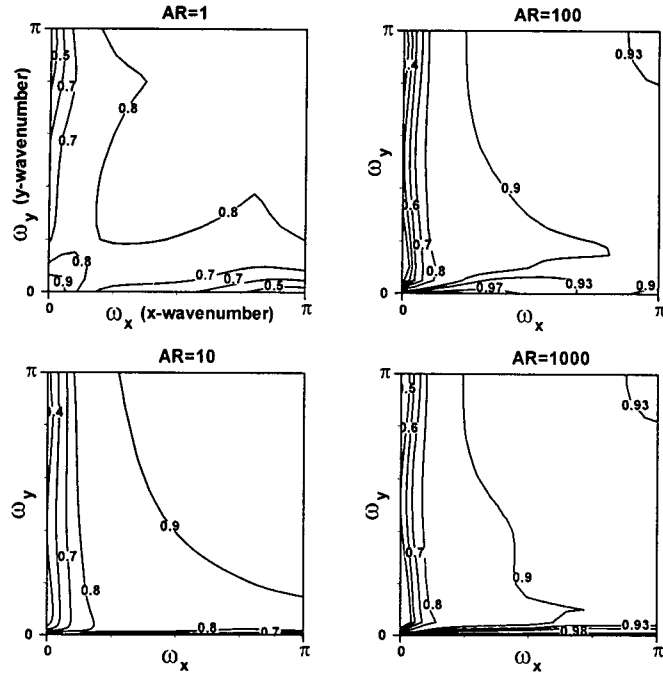


Fig. 1 Stability results for the upwind ADI algorithm applied to the Navier-Stokes equations : $M=0.001$, flow angle(v/u)= 45° , $Re_{\Delta x}=10$, min-CFL=5, max-VNN=100

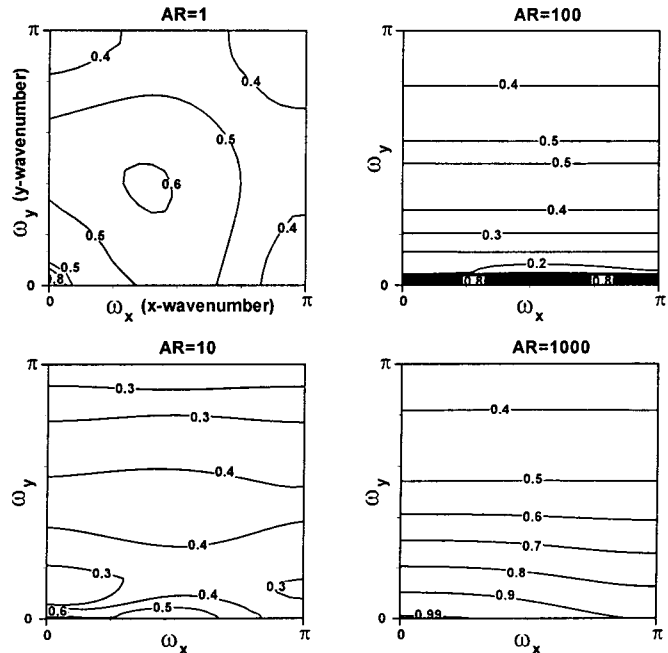


Fig. 2 Stability results for the upwind LGS-4 algorithm applied to the Navier-Stokes equations $M=0.001$, flow angle(v/u)= 45° , $Re_{\Delta x}=10$, min-CFL=20, max-VNN=100

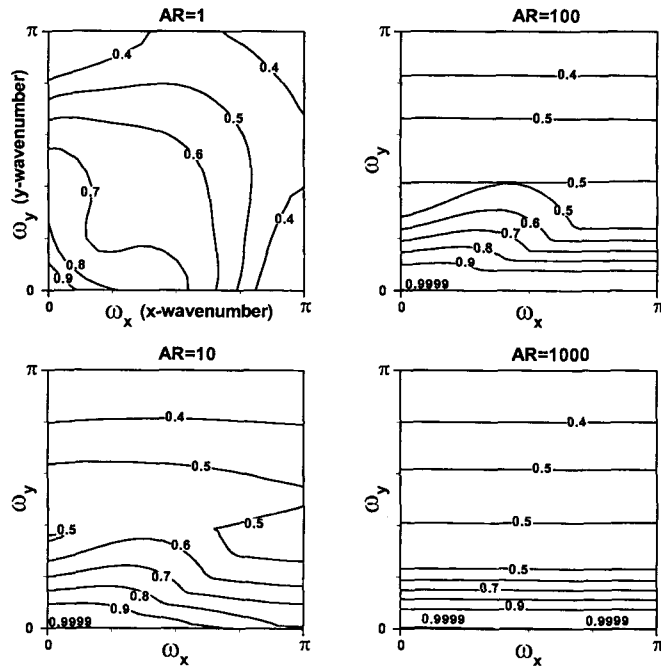


Fig. 3 Stability results for the upwind LU algorithm applied to the Navier-Stokes equations :
 $M=0.001$, flow angle(v/u)= 45° , $Re_{\Delta x}=10$, $\min\text{-CFL}=1 \times 10^6$, $\max\text{-VNN}=1 \times 10^6$

수렴특성 결과 중 AR가 1000이 되면 수렴성이 저하되는 것과 일치한다.

4.2 Line Gauss-Seidel 알고리즘

4-sweep line Gauss-Sedel (LGS-4) 기법의 안정성 해석결과를 Fig. 2에 나타내었다. 계산조건은 $Re_{\Delta x}=10$, $M=0.001$, $v/u=1$, $\min\text{-CFL}=20$, $\max\text{-VNN}=100$ 이다. 안정성 해석 결과 ADI 알고리즘과 유사하게 AR=100 까지는 amplification factor가 대부분의 파수 영역에서 안정된 값을 보이지만 AR=1000 이상이 되면 축모드의 저파수 영역에서 강직성을 보이게 되어 감쇠효과가 저하되는 것을 볼 수 있다.

또한 다양한 안정성 해석 결과, 본 LGS 기법은 광범위한 CFL과 VNN에 대하여 비점성, 점성유동 모두 무조건 안정한 수치특성을 보였다. 그러나 일정 CFL 및 VNN 이상의 큰 값을 이용한 큰 시간간격을 사용하여도 감쇠특성은 더 이상 향상되지 않았으며, 이는 큰 시간간격을 사용하여도 수렴특성이 더 향상하지 않음을 의미한다. (지면 관계상 그림을 포함하지는 않았음). 이는 현재 사용하고 있는 알고리즘의 좌변과 우변에 대한 차분법이 (1차, 3차의 풍상차분법) 서로 상이함에 기인하는 것으로 보인다.

4.3 Point Gauss-Seidel 알고리즘

다양한 중형비를 갖는 점성유동 문제에 대하여 예조건화를 사용한 LU 기법의 안정성 해석 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 여기서 계산조건은 $Re_{\Delta x}=10$, $Re_{\Delta y}=0.1$, $M=0.001$, $v/u=1$ 이며, $\min\text{-CFL}=10^6$, $\max\text{-VNN}=10^6$ 으로 유지하였다. 이 값들은 AR=1인 경우의 최적값이며, 앞의 LGS 알고리즘과 마찬가지로 CFL과 VNN수를 더욱 증가시켜도 감쇠특성의 변화는 나타나지 않았다. LU 알고리즘의 경우 AR=1인 경우 모든 파수 영역에서 비교적 안정적인 amplification factor를 볼 수 있어 좋은 수렴특성을 예측할 수 있다. 그러나 AR=10 이상의 격자에서는 저파수 영역에서 amplification factor가 거의 1이 되는 것을 볼 수 있으며, 따라서 중형비가 큰 문제에서는 수렴특성이 비효율적임을 예측할 수 있다. 이러한 특성은 예조건화 행렬의 정의보다는 point Gauss-Seidel 기법의 본질적인 특성 때문인 것으로 보인다.

또한 위 세 가지 알고리즘에 대한 다양한 안정성 해석결과 좋은 감쇠특성을 나타내는 CFL/VNN의 비는 LU 알고리즘의 경우 약 1, ADI 및 LGS 알고리즘의 경우 각각 약 0.05, 0.2가 최적값이었다.

5. 경계조건

모든 수치기법에서 경계조건의 올바른 적용은 수치해 뿐만 아니라, 수치기법의 수렴속도에도 크게 영향을 미치므로 매우 중요하다. 본 연구에서는 특성곡선해법(Method of Characteristics)을 근간으로 하는 경계조건⁽¹⁴⁾을 유입구와 유출구에 적용하였다. 이 방법을 사용하는 경우, 예조건화된 Navier-Stokes 방정식에서 나타나는 가상음파의 전파특성을 반영하기 위하여는 예조건화 행렬이 경계조건 수행시 반드시 포함되어야 한다.

특성곡선해법을 적용하는 절차는 다음과 같다. 먼저 자코비안 $\Gamma_p^{-1}A_p$ (또는 $\Gamma_p^{-1}B_p$)의 left eigenvector로 구성되는 행렬 M^{-1} 를 식 (13)에 곱함으로써 특성방정식을 구한다. 다음으로 특정한 경계지역에서 사용 가능한 특성방정식만을 추출하기 위하여 선택 행렬 L 을 특성방정식에 곱한다. 이 과정은 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다.

$$LM^{-1}[N_1D^{-1}N_2]\Delta Q_p = -\Delta tLM^{-1}R^n \quad (17)$$

위 식에서 선택 행렬 L 은 경계조건에 따라 달라진다. 아음속유동 입구인 경우, $L = \text{Diag}(0, 0, 0, 1)$ 을 사용한다. 이식 중 0이 아닌 요소는 고유치 λ_i 에 대응하는 특성방정식이 사용됨을 뜻하며, 0 요소에 대하여는 경계에 맞는 물리적으로 의미 있는 조건이 추가되어야 한다. 본 연구에서는 정체 압력(또는 일정 속도), 정체엔탈피, 유동각도(v/u) 조건을 사용하였다. 유출구에서도 위와 같은 방법을 사용한다. 다만, 아음속 유동인 경우, 선택 행렬 $L = \text{Diag}(1, 1, 1, 0)$ 가 되며, 이 중 0인 요소에 대하여는 일정 압력조건을 부과하고, 초음속유동의 경우 선택 행렬 L 은 단위행렬이 되므로, 다른 경계조건이 필요 없다. 고체 벽면에서의 경계조건으로는 점착 조건 ($u = v = 0$), 수직압력구배 조건 ($\partial p / \partial n = 0$), 일정온도 또는 단열조건이 문제에 따라 사용되었다. 대칭축은 대칭조건을 사용하여 일반적인 계산영역점으로 처리하였다.

6. 결과 및 검토

앞서의 수치 안정성해석을 검증하기 위하여 세 가지 알고리즘을 이용하여 덕트 내의 점성유동, 축소-확대 노즐 내부 유동, 평판 경계층 유동, 후향스텝 유동 등 4가지 유동장에 대한 계산을 수행하고, 그 수렴특성을 비교하였다.

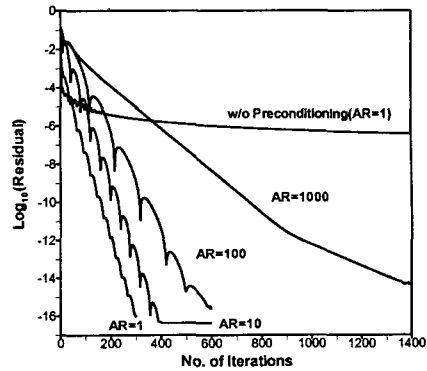


Fig. 4 Convergence of the ADI algorithm for fully-developed viscous straight duct flow. (min-CFL=5, max-VNN=100)

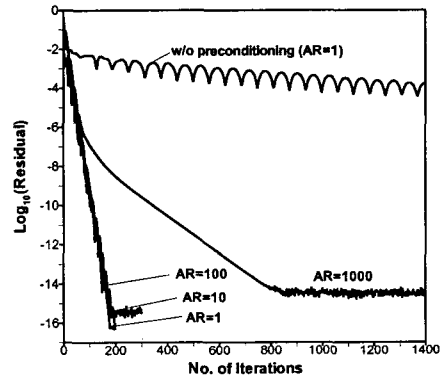


Fig. 5 Convergence of the LGS-4 algorithm for fully-developed viscous straight duct flow. (min-CFL=20, max-VNN=100)

6.1 덕트 내의 점성 유동

첫 번째로 덕트 내부를 흐르는 완전 확립된 점성 유동을 고려하였다. 41×41 의 균일한 격자를 사용하였으며 $Re_{\Delta x} = 10$ 으로 설정하였다. 격자의 중형비는 덕트의 길이를 일정하게 유지하고, 관의 너비만 축소시킴으로써 조절하였다. 본 계산에서 AR는 1에서 1000까지 변화하며, 사용한 입구 Mach수는 0.001이다.

Fig. 4는 격자중형비 변화에 따른 풍상차분 ADI 알고리즘의 수렴특성을 보여주며, 사용 시간간격은 min-CFL=5, max-VNN=100에 기초한다. 그림에서 보듯 예조건화를 사용하지 않았을 경우에는 AR=1인 경우에도 수렴특성이 현저히 떨어지는 것을 볼 수 있는 반면, 예조건화를 사용하는 경우 AR=100까지는 중형비에 무관하게 600번 이내의 반복계산으로 기계정도(machine accuracy)에 수렴하는 좋은 수렴특성을 나타낸다. 그러나 AR=1000이

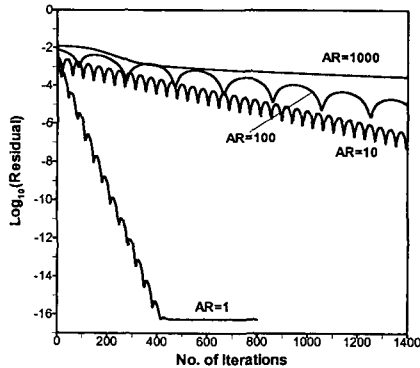


Fig. 6 Convergence of the LU algorithm for fully-developed viscous straight duct flow. (min-CFL=1× 10⁶, max-VNN=1× 10⁶)

되면 수렴특성이 다소 저하되는 것을 볼 수 있다. Fig. 5는 min-CFL= 20/max-VNN=100을 사용한 경우의 LGS-4 알고리즘의 수렴 곡선을 보여주며, 이들 수렴특성은 ADI의 경우와 유사하다. 예조건화를 사용하지 않은 경우에는 수렴특성이 현저히 늦어지나, 예조건화를 사용하는 경우 AR=100까지는 종횡비에 무관하게 200번 이내에 기계 정도에 도달하는 빠른 수렴특성을 보여준다. AR=1000이 되면 역시 수렴특성이 저하되는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 수렴특성은 앞서의 수치안정성 해석결과와 일치한다.

Fig. 6은 예조건화를 사용한 경우 LU 알고리즘의 수렴특성을 보여주며, min-CFL=max-VNN=1× 10⁶을 사용하였다. AR=1인 경우에는 약 400번의 반복계산으로 기계정도에 도달하는 좋은 수렴특성을 보이지만, AR가 증가하게 되면 수렴특성이 현저히 떨어지는 것을 볼 수 있다. AR=10이 되면 기계정도에 도달하기 위해서는 9000번 정도의 계산이 필요하며, 종횡비가 더욱 커지면 훨씬 많은 횟수의 계산을 필요로 하게 된다. 따라서 LU 알고리즘은 앞서의 수치안정성 해석의 결과에서 예측하였듯이 큰 종횡비를 가지는 문제에는 적합하지 않은 것으로 보인다.

6.2 축소-확대 노즐 내부 유동

두 번째로 축소-확대 노즐을 통과하는 유동을 해석하였다. Fig. 7은 본 계산에 사용한 격자계이며 (71× 61), 벽면 근처의 경계층을 포착하기 위하여 격자는 벽면 쪽으로 밀집시켰으며, 이 때 노즐의 목 부분에서 종횡비가 가장 큰 (약 2200) 격자가 생긴다. 노즐 목 부분의 유동조건과 목의 직경으로부터 계산된 Re수는 3× 10⁵이고, 목에 대한 입

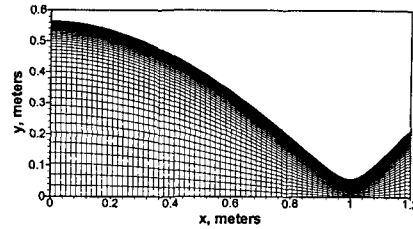


Fig. 7 A 71x61 grid system for the converging-diverging nozzle case

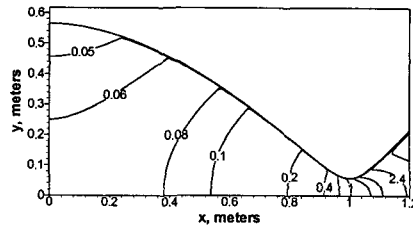


Fig. 8 Mach contour for the converging-diverging nozzle case

구의 면적비는 0.1이다. 이 때 노즐 입구 부분에는 약 M=0.05의 저Mach수 유동이 발생한다. 또한 입구에서 정체 엔탈피는 1000kJ/kg, 유동각도는 0°로 유지하고, 특성곡선기법(MOC)을 사용하여 경계조건을 설정하였다.

Fig. 8은 본 계산에 의한 등Mach수 선도이며, 입구 Mach수 0.05의 저속의 아음속유동에서 출구 Mach수 2.4의 초음속유동까지 광범위한 Mach수 영역에서 작동하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 9는 세 가지 알고리즘에 대한 수렴곡선이다. 모든 알고리즘에 CFL의 값은 min-CFL 정의를 사용하였고, 그 값은 ADI, LGS-4, LU의 순서로 각각 3, 10, 10이다. 사용한 VNN수는 ADI, LGS-4, LU의 순서로 각각, 10, 100, 100이다. 왜선은 예조건화를 사용하지 않은 경우의 결과이고, 세 가지 기법 중 LGS-4 기법은 비교적 빠른 수렴특성을 보이며 약 1000회의 계산으로 수렴하였으나, ADI와 LU기법은 수렴특성이 현저히 떨어진다. 실선은 같은 조건의 유동에 점성 예조건화를 적용하고, min-CFL/max-VNN 정의를 사용하여 계산한 결과이다. 이 경우 각 기법마다 정도는 다르지만 수렴특성이 현저히 향상되는 것을 볼 수 있다. 본 계산의 경우 수치 안정성해석의 예측과는 달리 LU 기법에서도 수렴특성이 많이 향상되는 것을 볼 수 있으며, 이는 부분적으로 존재하는 큰 종횡비는 (대부분의 영역에서 종횡비는 1에 가까우며, 큰 종횡비의 격자는 노즐 벽면 부근에 국한되어 있음) LU 기법의 수렴특성에 크게 영향을 미치지 않기 때문인 것으로 보인다.

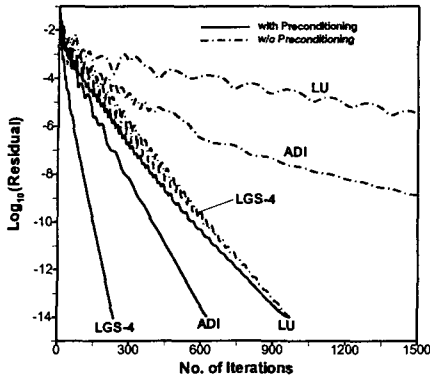


Fig. 9 Convergence for the converging-diverging nozzle case

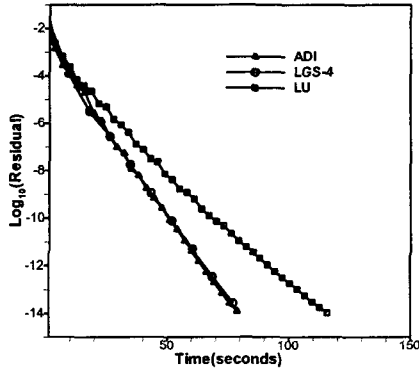


Fig. 10 CPU time history for the converging-diverging nozzle case

Fig. 10 은 Fig. 9 의 예조건화를 사용한 세 알고리즘이 수렴하는 데 소요된 계산시간을 나타낸다. ADI 와 LGS-4 는 거의 같은 계산시간을 나타내나, LU 는 약 1.5 배 더 시간이 걸리는 것을 볼 수 있다. Fig. 9 를 보면, 계산 횟수로는 LGS-4 알고리즘이 다른 알고리즘에 비해 월등히 빠른 것처럼 보이지만, LGS-4 알고리즘은 내부 반복계산 회수가 많으므로 1 회 계산에 소요되는 시간이 길어지게 되며, 따라서 실제 계산 속도는 ADI 알고리즘과 거의 같은 것을 알 수 있다. LU 알고리즘은 1 회 의 계산시간은 ADI 알고리즘과 비슷하지만 수렴하기 위해 필요한 계산 회수가 많기 때문에 소요 시간 또한 길어지게 된다.

6.3 평판 경계층 유동

세 번째로 평판 위를 흐르는 층류 경계층유동을 고려하였다. Fig. 11은 본 계산에 사용한 111× 101의 격자계이며, 입구에서 경계층 안쪽으로 35개의 격

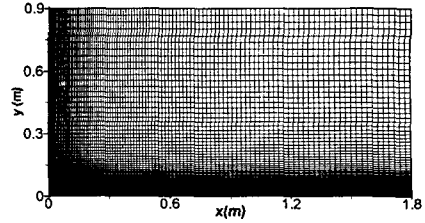


Fig. 11 A 111× 101 grid system for the laminar flat-plate boundary layer

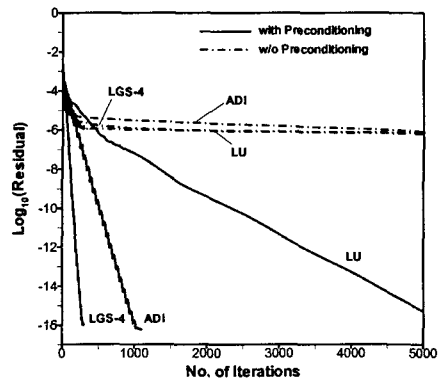


Fig. 12 Convergence for the laminar flat-plate boundary layer

자가 존재하도록 하였다. 입구조건으로 자유유동의 Mach수 0.001, Re_x 는 4000인 Blasius profile을 사용하였고, 출구조건으로는 정압을 일정하게 유지하였다 (1기압). 이 때 출구 부분에서의 Re_x 는 약 44700인 층류 경계층이 형성된다. 본 계산에서 사용한 CFL수 및 VNN수는 ADI, LGS-4, LU의 순서로 min-CFL=5, 20, 104, max-VNN=20, 500, 2×10^5 이다.

Fig. 12는 세 가지 알고리즘의 수렴곡선이다. 본 계산의 경우 입구 자유유동의 Mach수가 0.001인 매우 저속의 유동이므로 세 알고리즘 모두 예조건화를 사용하지 않은 경우에는 매우 좋지 않은 수렴특성을 보여준다. 반면 예조건화를 사용할 경우 세 알고리즘 모두 수렴특성이 현저히 향상됨을 볼 수 있다. 예조건화를 사용한 경우의 수렴특성을 보면, LU 알고리즘이 5000번 정도의 반복회수로 수렴하는데 비해 ADI 알고리즘은 약 1000번, LGS-4 알고리즘은 약 250번으로 빠른 수렴특성을 보인다. Fig. 13은 예조건화를 사용한 경우 세 가지 알고리즘의 계산시간을 비교한 그림으로 LGS-4 알고리즘은 ADI의 1.5배, LU의 7.5배 빠른 성능을 보인다.

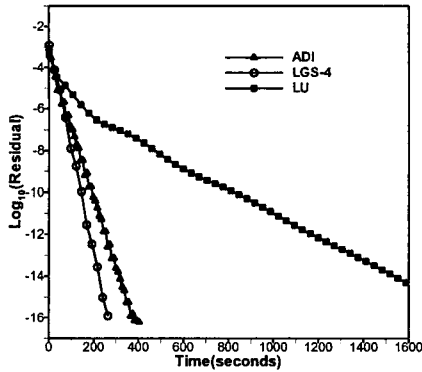


Fig. 13 CPU time history for the laminar flat-plate boundary layer

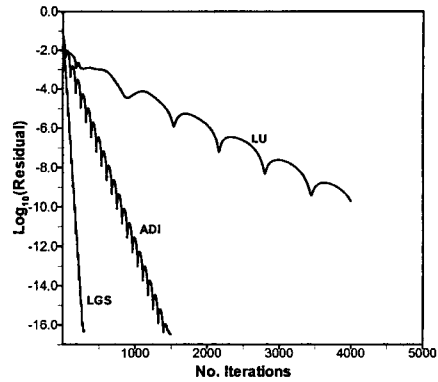


Fig. 15 Convergence for the backward-facing step at Re=100

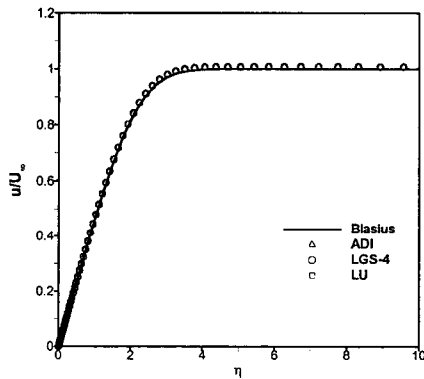


Fig. 14 Comparison of computed velocity profile with Blasius solution

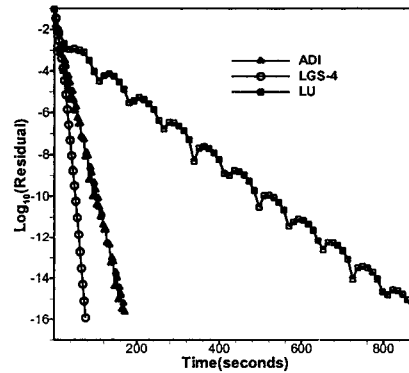


Fig. 16 CPU time history for the backward-facing step at Re=100

계산결과로서 Fig. 14에 $x=1.68m$ 인 지점에서의 무차원 속도분포를 Blasius의 이론해와 비교하여 나타내었다. 세 가지 알고리즘 모두 같은 해를 가지며, 이론해와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

6.4 후향스텝 (Backward-facing step)

마지막으로 후향스텝 위를 흐르는 유동을 고려하였다. 본 계산에 사용한 후향스텝의 크기와 유동 조건 등은 Armaly 등이⁽¹⁵⁾ 수행한 실험 조건과 같다. 관의 길이와 높이는 각각 10cm, 1cm이고, 스텝의 높이는 0.5cm이다. 71×61 의 균일한 격자를 사용하였고, 이때 격자 종횡비는 8.6이다. 입구로 완전 확립된 유동이 유입되고, Mach수는 4×10^{-3} 이며, 스텝 높이의 두 배를 특성 길이로 하여 계산되는 Re수는 10에서부터 400까지 변화한다.

Re수가 100일 때 세 가지 알고리즘의 수렴곡선을 Fig. 15에 나타내었다. ADI 기법에서는 $\min-CFL=3$, $\max-VNN=10$, LGS-4 알고리즘에서는 $\min-$

$CFL=2 \times 10^4$, $\max-VNN=1 \times 10^5$ 그리고 LU기법에서는 $\min-CFL=1 \times 10^4$, $\max-VNN=1 \times 10^5$ 을 사용하였다. 위의 값들은 Re수가 100일 때 최적의 수렴특성을 보여주는 값이다. LGS-4와 ADI 알고리즘은 300회, 1500회 이내의 비교적 빠른 계산으로 기계 정도에 도달하는 빠른 수렴특성을 보여주며, LU 알고리즘은 약 7500회의 계산이 필요하였다. 이 경우 Fig. 16의 계산시간을 비교해보면 LGS-4 알고리즘은 ADI와 LU 알고리즘에 비해 각각 2.2배, 11.4배 빠른 것을 알 수 있다.

Fig. 17은 계산 결과로서 Re수 변화에 따른 유동 방향의 속도분포를 나타낸다. Re수가 10인 경우에는 스텝 후방에 재순환 영역이 나타나지 않았고, Re수가 증가함에 따라 재순환 영역이 확장됨을 볼 수 있다. Re수 400일 때는 스텝 후방에 1차 재순환 영역이 나타나며, 위쪽 벽면 근처에 2차 재순환 영역이 형성됨을 볼 수 있다.

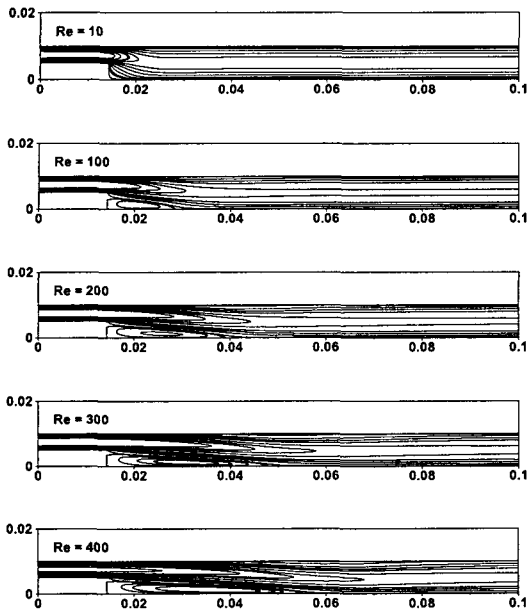


Fig. 17 Streamwise velocity contours for the backward-facing step at $Re=100$

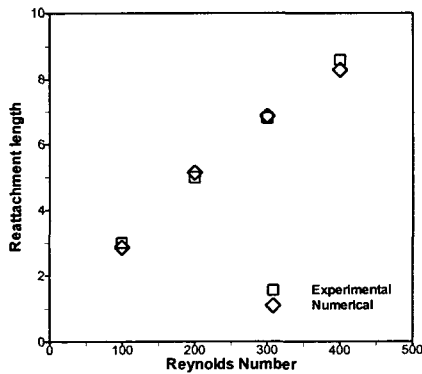


Fig. 18 Comparison of computed reattachment length with experimental data by Armaly et al.⁽¹⁵⁾

Fig. 18에 본 계산과 실험에서 얻은 재부착 길이를 비교하였다. 여기서 재부착 길이는 스텝의 높이로 나누어 무차원화 한 값이다. Re 수가 100, 200, 300인 경우 계산값은 실험값과 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 실험에서는 Re 수 389 이상에서는 3차원 유동현상이 나타나며, 이로 인해 Re 수가 400일 때의 계산 결과는 실험 결과와 약간의 차이가 있음을 볼 수 있다.

7. 결론

본 연구에서는 저속의 압축성 유동 및 큰 격자 종횡비를 가지는 유동에서의 수렴성 가속을 위해 Navier-Stokes 방정식에 예조건화 방법을 적용하였으며, 이와 같은 예조건화된 시스템에 ADI 기법, point Gauss-Seidel 기법, line Gauss-Seidel 기법 등의 다양한 풍상차분법을 적용하여 각 기법의 수치특성을 조사하였다. 이를 위하여 von Neumann 수치안정성 해석을 통하여 각 기법 및 격자 종횡비에 따른 수치안정성 특성을 조사하였고, 또한 실제 계산을 통하여 이들 기법의 수렴특성을 비교하였다.

수치안정성 해석 결과 세 가지 알고리즘 모두 저Mach수 및 저 Re 수의 유동에서 빠른 수렴성을 얻기 위해서는 예조건화가 필수적인 것을 알 수 있었다. 격자 종횡비의 영향에 대하여는 ADI 및 LGS 알고리즘은 $\min\text{-CFL}/\max\text{-VNN}$ 시간간격 정의를 이용하여 $AR=100$ 정도까지는 격자종횡비에 무관하게 빠른 수렴성을 얻을 수 있었다. 반면 LU 알고리즘은 격자종횡비가 1에 가까운 경우 빠른 수렴성을 얻을 수 있었으나 큰 격자종횡비의 문제에는 적합하지 않음을 볼 수 있었다. 또한 다양한 계산 결과, 각 알고리즘에서 최적의 CFL과 VNN의 비는 ADI, LGS, LU 알고리즘의 순서로 각각 0.05, 0.2, 1로 추정된다.

각 알고리즘을 실제 문제에 적용하였을 때의 성능을 평가하기 위하여 덕트 내부 유동, 수축-확대 노즐 유동, 평판 경계층 유동 및 후향스텝 위의 유동에 대한 계산을 수행하였으며, 그 수렴특성은 앞서의 수치안정성 해석 결과와 일치함을 볼 수 있었다. 추후 2차원 유동계산에서의 $AR=1000$ 이상의 격자종횡비 및 3차원 유동계산에서의 큰 격자종횡비가 존재하는 경우, 수치기법의 수렴특성 향상에 대한 연구를 계속 수행할 예정이다.

참고문헌

- (1) Beam, R. M. and Warming, R. F., 1976, "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation Law Form," *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, pp. 87~110.
- (2) Briley, W. R. and McDonald, H., 1977, "Solution of the Multi-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equation by a Generalized Implicit Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 24, pp. 372~397.
- (3) Douglas, J. and Gunn, J. E., 1964, "A General Formulation of Alternating Direction Method - Part I - Parabolic and Hyperbolic Problem," *Numerische*

- Mathematik*, Vol. 82, pp. 428~453.
- (4) Chakravarthy, S., 1984, "Relaxation Methods for Unfactored Implicit Upwind Schemes," *AIAA Paper* 84-0165.
- (5) Choi, Y. H. and Merkle, C. L., 1993, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol. 105, No. 2, pp. 207~223.
- (6) Weiss, J. M. and Smith, W. A., 1995, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows," *AIAA Journal*, Vol. 33, pp. 2050~2057.
- (7) Buelow, P. E. O., Venkateswaran, S., and Merkle, C. L., 1994, "The Effect of Grid Aspect Ratio on Convergence," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 12, pp. 2401~2408.
- (8) Choi, Y. H. "Numerical Modeling of Heat and Mass Diffusion in Compressible Low Speed Flows," 1998, *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 5, pp. 988~998.
- (9) Jameson, A. and Turkel, E., 1981, "Implicit Schemes and LU Decompositions," *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 156, pp. 385~397.
- (10) Rosenfeld, M., Kwak, D. and Vinokur, M., 1988, "A Solution Method for the Unsteady and Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinate Systems," *AIAA paper* 88-0719.
- (11) MacCormack, R. W., 1985, "Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations," *AIAA Paper* 85-0032.
- (12) Taylor, A. C., Ng, W. F. and Walter, R. W., 1992, "Upwind Relaxation Methods for the Navier-Stokes Equations Using Inner Iteration," *Journal of Computational Physics*, Vol. 99, pp. 68~78.
- (13) Tannehill, J. C., Anderson, D. A. Pletcher, R. H., 1997, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor and Francis.
- (14) Chakravarty, S. R., 1983, "Euler Equation - Implicit Schemes and Boundary Conditions," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 5, pp.669~706.
- (15) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F. and Schonung, B., 1983, "Experimental and Theoretical Investigation of Backward -Facing Step Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 127, pp. 473~496.