

재생펌프의 유동해석 및 누설유동에 관한 연구

심창열[†] · 강신형^{*}

(2002년 6월 7일 접수, 2003년 6월 12일 심사완료)

Through Flow Analysis and Leakage Flow of a Regenerative Pump

Chang-Yeul Shim and Shin-Hyoung Kang

Key Words: Regenerative Pump(재생펌프), Leakage Flow(누설유동), Performance Curve(성능곡선), Flow Analysis(유동해석), Tangential Flow(접선유동)

Abstract

Flows in a regenerative pump were calculated for several flow-rates, using the CFX-Tascflow. The calculated results show the vortex structure in the impeller and side channel. The predicted performance shows considerable discrepancy from the measured values for low flow rates. Main source of the difference is the leakage flow of pump strongly affecting the performance of pump. A simple correlation was proposed using calculated leakage flows through the simplified passage. One dimensional analysis were made for the recirculating flow and angular momentum transfer using calculated three dimensional data base.

기호설명

b, c, d : 펌프 설계 변수, [m]

D : 로터 직경, [m]

f : 손실수두 계수

g : 중력가속도, [m/s²]

h : 로터 블레이드 높이, [m]

H : 펌프 전체 수두, [m]

N : 임펠러 회전수, [rpm]

p : 압력, [Pa]

P_w : 펌프 동력, [W]

Q : 유량, [m³/s]

r : 반경, [m]

t : 틈새 간격, [m]

T : 로터 토크, [N·m]

m : 로터 허브에서 부터의 거리, [m]

Re : 레이놀즈 수, $2tV/v$

Rv : 무차원 회전속도, $D\omega/2V$

u : 임펠러 접선방향 속도

V : 로터 간극 내의 평균 유속, [m/s]

θ : 펌프 입구로 부터의 각도, [deg]

θ_s : 스트리퍼 각도

ρ : 밀도, [kg/m³]

η : 효율

ω : 각속도

ϕ : 유동계수, $Q/\omega D^2$

ψ : 수두계수, $gH/\omega^2 D^2$

[†] 책임저자, 회원, 서울대학교 터보동력기계연구센터

E-mail : cyshim@turbo.snu.ac.kr

TEL : (02)880-7118 FAX : (02)883-0179

^{*} 회원, 서울대학교 기계항공공학부

첨자

c : 축 또는 반경방향 속도 성분

l : 누설 유량

p : 펌프

- s : 스트리퍼
- t : 접선방향 속도성분
- 0 : 로터 허브
- 2 : 로터 팁

1. 서 론

재생펌프는 작은 유량에서 큰 수두를 발생하기 때문에 운전 비속도가 매우 작다. 이런 이유로 재생펌프는 관개용수, 운할, 제어, 소방설비, 로켓 보조동력장치 등 특수한 목적으로 과거 오랫동안 여러 분야에서 사용되어 오고 있다. 최근에는 자동차용 내연기관의 연료 공급을 위한 용도로 널리 사용되고 있고 다양한 특허가 출원 등록되고 있다.

펌프의 구조는 비교적 간단하지만 로터 내부에 발생하는 재순환 유동이 강하기 때문에 점성효과가 유동과 성능에 미치는 영향이 크다. 재생펌프의 설계법 및 성능예측법과, 성능향상에 대해서 그동안 많은 연구가 이루어져 왔지만 펌프의 효율 향상 및 신뢰성 있는 설계법이 아직도 만족할 만큼 정립되지 못하였다. 이는 로터와 입출구 유로의 형상이 복잡할 뿐만 아니라 로터와 케이싱 사이에서의 틈새를 통한 누설유동의 효과가 크기 때문이다.^(1~4)

Wilson 등⁽⁵⁾은 로터와 채널 사이의 유동을 순환하는 유동으로 가정하여 성능해석을 하였으며, Senoo⁽⁶⁾는 로터와 유체사이의 저항을 펌핑작용의 주요한 요소로 간주하여 펌프성능을 해석한 후 Wilson 등⁽⁵⁾의 성능해석 방법과 서로 비교 및 검토하여 두 이론이 원리상 서로 모순되지 않음을 확인하였다. 그러나 아직도 신뢰성 있는 설계법과 성능 예측법이 정립되기 위해서는 신뢰성있는 자료가 필요한 실정이다.

본 연구는 재생펌프의 내부 유동을 수치해석하여 다양한 자료를 확보하기 위해서 수행되었다. 그러나 실제 펌프는 입출구와 모든 틈새를 포함하여 전체 유동을 해석하기는 어렵기 때문에 로터의 베인 한 구간에 정상유동이 이루어진 경우에 대하여 우선 연구하였다. 이 결과를 설계과정에서 활용할 수 있는 방안과 전체 성능을 예측하는데 어떠한 문제가 있는가에 우선 관심을 두었다. 우선 계산된 결과의 타당성 검토를 위하여

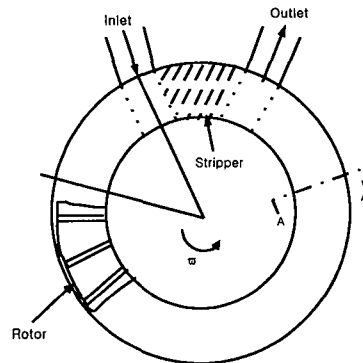


Fig. 1 Schematics of a regenerative pump

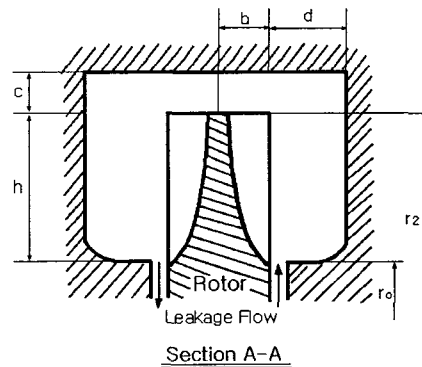


Fig. 2 View of A-A cross section and parameters

Wilson 등⁽⁵⁾의 펌프에 적용하였고, 예측된 성능과 비교하였다. 본 연구에서는 누설유동을 고려하지 않은 상태에서 해석을 하였기에 그 성능이 실험값과 차이가 남을 알 수가 있다. 따라서 재생펌프의 누설유량이 펌프 전체 성능에 얼마만큼의 영향을 미치는지 연구하기 위하여 평판과 로터 사이의 누설유동에 대한 수치해석을 별도로 수행하여 누설량을 예측하는 새로운 경험식을 만들었다. 또 계산된 3차원 유동데이터를 활용하여 1차원 분석을 수행하여 운동량전달과 재순환 유동에 대하여 검토하였다.

2. 수치해석

2.1 재생펌프 형상

실제로 사용되는 재생펌프의 내부구조는 매우

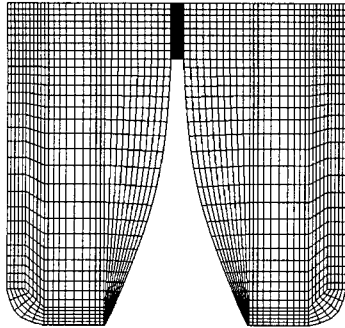


Fig. 3 Grids for numerical calculation

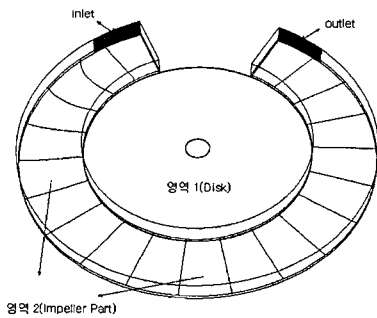


Fig. 4 Geometry for leakage flow calculation

다양하게 개발되어 있다. 본 연구에서는 이 증가장 오랫동안 사용되는 형상이면서도 성능자료가 알려져 있는 Wilson 등⁽⁶⁾의 펌프를 선택하였다. 그 개략도는 Fig. 1에 나타내었으며, 40개의 베인이 부착된 로터와 직사각형 채널로 이루어지며, 입구 및 출구 사이에 스트리퍼가 있는 형태이다. Fig. 2에 펌프의 로터와 사이드 채널을 나타내는 주요 파라미터를 나타내었고, 베인의 폭 b 는 0.842 mm, 높이 h 는 21.8 mm이고, 로터의 반경은 69.0 mm, 허브 반경은 47.2 mm이다. 또 c 와 d 는 각각 4.6, 7.82 mm이다. 누설이 발생하는 로터와 케이싱 사이의 간격은 여기서 무시하기로 하였다. 실제로 누설이 발생하더라도 베인 내부유동에 미치는 직접적인 효과는 크지 않으리라고 생각된다.

2.2 계산 격자

펌프의 전체 성능을 예측하기 위해서는 펌프입 출구와 누설이 발생하는 전 영역을 대상으로 계

산을 수행하여야 하겠으나 이 경우는 비정상 유동이 된다. 본 연구에서는 베인 내부의 유동구조를 파악하고 운동량 전달 특성을 중심으로 연구하기 위해서 이웃한 두 베인으로 이루어진 한 공간만을 택하여 해석하였다. 실제로 실험자료를 검토해 보면 입구에서 출구까지 대부분의 영역에서 압력이 선형적으로 증가함을 보면 베인 사이의 유동은 입출구 근처를 제외하고는 정상유동이라고 생각할 수 있다. 수치해석을 위해 만들어진 계산격자는 Fig. 3에서 나타낸 바와 같으며, 격자수는 회전하는 방향에 대하여 26개, 반경방향에 대하여 34개, 축방향에 대하여서는 57개의 격자를 두어 총 50,388개의 계산격자를 사용하였으며, 5개의 멀티블록으로 구성되어 있다.

2.3 경계 조건

펌프 로터의 회전수는 1,000 rpm으로 하였고, 케이싱인 바깥 벽면은 절대속도가 영이 되는 정지 벽, 그리고 전체 계산 영역은 회전하는 프레임으로 하여 계산하였다. 유동은 난류로 보았고, 계산에 사용된 난류모델은 벽함수를 이용한 $k-\epsilon$ 모델을 사용하였다.

한 개의 베인을 중심으로 상류와 하류가 구분되고, 회전방향의 면에 대해서는 평균유동의 속도와 각종 난류값에 대해서는 주기조건을 이용하였다. 그러나 압력은 상류에서 하류로 가면서 평균압력이 선형적으로 증가하기 때문에 압력상승에 해당하는 체적력을 주고 주기조건을 적용하였다. 이렇게 하여 주어진 펌프 수두에 대하여 계산결과로 유량이 구해지도록 하였다. 체적력은 단위 회전각도당 압력상승을 식 (1)과 같이 적용하였고, 이 식은 사용자가 코드를 만들어 컴파일한 후 상용프로그램 Tascflow에 연결시켰다.

$$f_{\theta} = \frac{\rho g H}{r(2\pi - \theta_s)} \tag{1}$$

체적력 f_{θ} 를 줌으로써 실제 압력은 상류에서 하류로 증가하지만 주기조건을 사용할 수 있다.

3. 성능예측

3.1 해석을 통한 누설 유동량 예측식

실제로 펌프는 누설유동이 펌프 전체 성능에

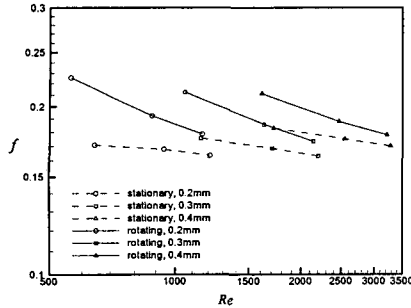


Fig. 5 Calculated variation of pressure loss coefficients with various leakage flows

많은 영향을 미친다. 누설은 주로 고압의 하류에서 저압의 상류로 로터 디스크와 케이싱 사이의 간극에서 이루어지고, 출구와 입구 사이의 스트리퍼 구역에서 발생한다. 이러한 누설을 포함하여 전체 내부유동을 해석하기는 어렵기 때문에 본 연구에서는 앞에서 설명한 바와 같이 한 베인 공간에서만 해석을 수행하였다. 그러나 성능예측을 위해서는 이러한 누설량이 어느 정도인지는 추정을 해야 하나 아직 신뢰성 있는 경험식이 보고되어 있지 않다. 본 연구에서는 펌프의 누설유동을 별도로 계산하여 누설량이 성능 곡선에 어떤 변화를 주는지를 연구하였다.

누설유동을 계산하기 위하여 먼저 형상을 Fig. 4와 같이 회전하는 로터와 정지된 벽면으로 이루어진 단순한 간극을 설정하였다. 영역 1은 로터 디스크와 케이싱 사이의 간격으로, 간격을 0.2, 0.3, 0.4 mm로 변화시켜 보았다. 영역 2는 펌프 베인을 포함하여 채널을 나타내고, 베인이 지나가는 부분으로 회전 방향으로 압력이 상승하게 되어있다. 그러나 여기서의 유동은 누설유동과는 상호작용이 없고 단순히 압력에 따라서 누설유동을 결정한다. 영역 2에서는 입구에서 출구까지 회전방향에 따라 압력이 선형적으로 상승하도록 하였다. 이때 출구 근처의 압력이 입구 근처의 압력보다 크므로 영역 1의 디스크 간격을 따라서 누설유동이 발생하게 된다. 이와 같이 단순화된 간극에서 압력과 로터의 회전수와 간극의 크기를 몇 가지 변화시키면서 계산을 수행하였고 이를 분석하여 누설량을 구하였다. 그 결과 수직격이 $2t$ 이고 길이가 D 인 평판 사이에서 발생하는 압력손실이라고 생각하여 다음 식으로 손실계수

를 정의하고 Fig. 5에 그 결과를 나타내었다.

$$H = f(Re, Rv) \frac{D}{2t} \frac{V^2}{2g} \quad (2)$$

Fig. 5의 6개의 그래프를 분석하여 다음과 같은 상관식을 구하였다.

$$f = \frac{1.4(1 + 0.01 Rv^2)}{Re^{0.1} (D/2t)^{0.25}} \quad (3)$$

여기서 누설속도는 $V = Q/tD$ 로 정의하였다. 위 경험식은 계산이 수행된 범위, 즉 $500 < Re < 3500$ 과 $Rv < 15$ 범위 내에서 $\pm 8\%$ 의 오차를 보이고 있다. 결국 식 (3)은 수두와 연관되는 식 (2)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$H = \frac{1.4(1 + 0.01 Rv^2)}{Re^{0.1}} \left(\frac{D}{2t} \right)^{0.75} \frac{V^2}{2g} \quad (4)$$

따라서 임펠러를 통해서 상승된 수두 H 를 알고 있으면 식 (4)를 통해서 간극에서의 평균유속 V 를 구하게 된다.

실제로 베인을 지나는 유량은 펌프 유량과 누설유량의 합이다. 즉, 수치계산으로 구해진 유량에서 누설유량을 빼면 실제 펌프 유량이 된다. 이때 펌프효율은 다음과 같이 된다.

$$\eta = \rho g H Q / T \omega \quad (5)$$

가 된다. 토크 T 는 압력에 의한 토크이고 실제 마찰은 고려하지 않았다.

3.2 해석을 통한 성능예측

베인 한 구간의 유동해석을 통해서 구한 압력 성능이 실제 실험을 통해서 구한 전체 펌프의 성능과 어느 정도 일치하는가를 검토하기 위해서 Fig. 6에 두 결과를 비교하여 나타내었다. 우선 그림에서 간극의 크기가 0.0일 때 결과를 보면 수두가 높을수록 유량은 감소하는 전체적인 경향은 실험과 잘 일치하는데, 특히 고유량에서는 정량적으로 잘 일치한다. 그러나 압력이 높은 저유량 구간에서 계산값과 실험치는 상당히 차이를 보인다. 앞서 언급한 대로 이러한 차이는 대부분 누설에 의한 영향이라고 생각하여 그 영향을 앞에서 구한 경험식을 이용하여 보정하여 보았다.

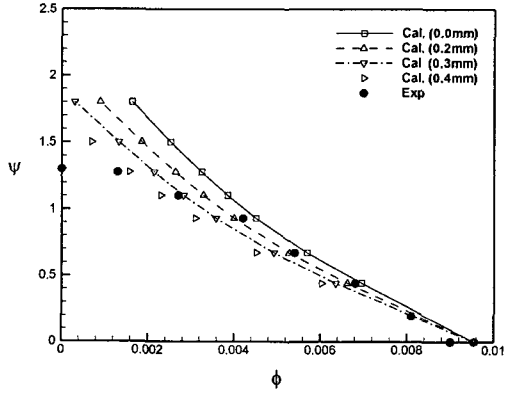


Fig. 6 Calculated and measured performance variation with flow rates

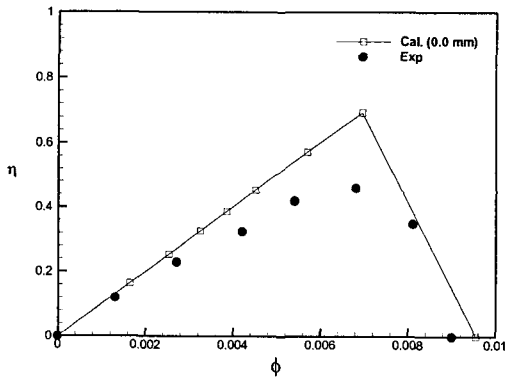
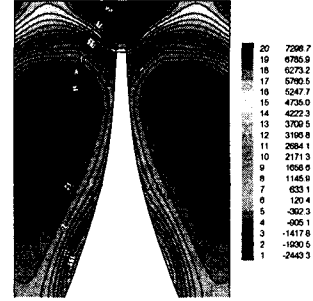
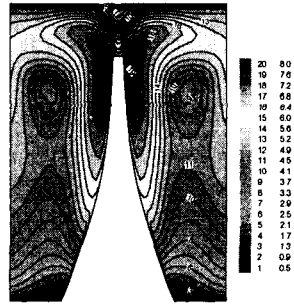


Fig. 7 Calculated and measured efficiencies with flow rates

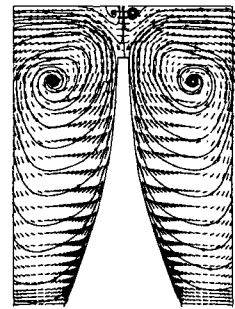
실제 실험에서 임펠러의 간극이 알려져 있지 않아서 몇 가지 간극의 크기를 가정하였다. 간극의 크기에 따른 누설량의 변화가 많아져서 누설이 성능에 미치는 영향이 점점 커짐을 알 수가 있다. 실제 실험에서 간극의 크기가 0.3mm 이라고 가정하였을 때 설계점 ($\phi=0.005$) 전후에서는 성능이 잘 예측되기는 하나 저 유량에서는 아직도 큰 차이를 보이고 있다. 실제 실험에서는 펌프의 입구와 출구에서의 부차적인 손실도 있고, 또 누설손실도 본 연구의 결과가 완전하지 않을 뿐더러 스트립퍼를 통한 누설도 있기 때문에 더 깊이 그 원인을 규명하기는 어렵다. 그러나 누설 손실이 어느 정도의 크기인 가를 파악하는 것은 의미가 있다고 하겠다. 효율곡선은 Fig. 7에 나타



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 (a) Static pressure, (b) tangential velocity, and (c) velocity vector distributions at the periodic plane

내었는데 실험값보다 높게 예측되며, 이는 로터의 회전 마찰손실, 기타 유로내의 손실이 감안되지 않았음을 고려할 때 당연하다고 하겠다.

4. 내부 유동 구조

4.1 베인에서의 유동장 분포

베인 내부 유동은 매우 복잡한 3차원 유동을 나타낸다. 특히 재생펌프는 베인의 내부에서 바깥 채널로 유동이 순환하면서 운동량 교환을 이

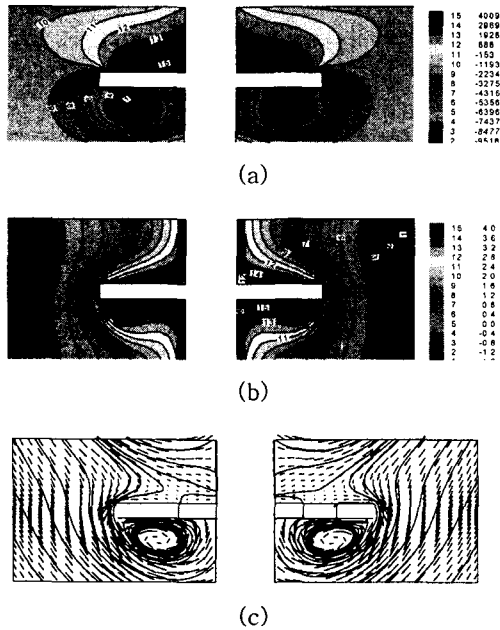


Fig. 9 (a) Static pressure, (b) radial velocity, and (c) velocity vector distributions near vane tip region

루고 이 운동량 교환이 압력상승의 주된 원리이기 때문에 그 순환특성이 중요하다. 유동의 주기면(베인과 베인 사이)에서 압력 및 회전방향의 속도 등고선과 속도 벡터 분포를 Fig. 8에 나타내었다. 먼저 Fig. 8(c)에서 베인 단면에서의 속도 벡터를 보면 알 수 있듯이 유동이 허브에서 팁 방향으로 블레이드를 따라 들어온 후 반경방향으로 이동하고 팁에서 다시 밖으로 나가면서 와류를 발생하게 되는데, 와류의 코어를 명확히 관찰 할 수 있다. 이런 와류에 의해서 이 부분에서 정압이 최소가 됨을 볼 수가 있으며, Fig. 8(b)에서 접선속도도 베인의 팁 근처에서 주로 상승된 것을 알 수 있다.

또한 허브와 베인 팁 중간 반경 위치에서 유동장 분포를 Fig. 9에 나타내었다. 임펠러의 회전방향은 그림에서 아래에서 위로 향한다. 따라서 상대 속도 분포를 보면 베인의 위쪽인 압력면 근처에서 유동이 들어와서 팁으로 올라가거나 밖으로 다시 빠져나간다. 그리고 흡입면 근처에서는 유동이 들어와서 베인에서 와류를 발생하게 되지만, 팁으로 올라갈수록 유동이 들어오지 않고 오히려 반대로 블레이드 밖으로 빠져나가면서 와류가 차츰 사라지는 경향을 보인다. Fig. 9(c)에서

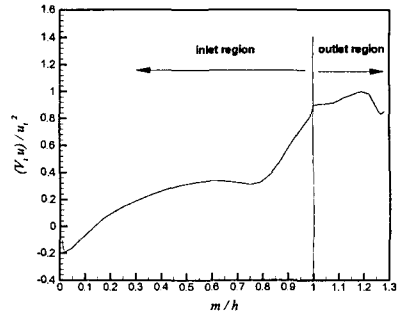


Fig. 10 Variation of angular momentum exchange rate along the vane

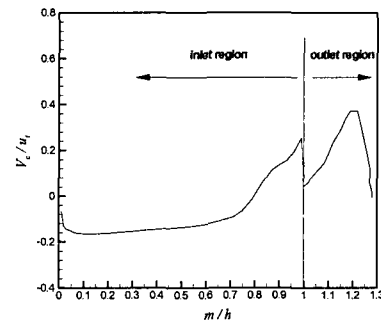


Fig. 11 Variation of circulation velocity along the vane

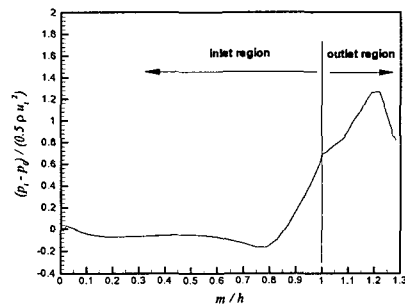


Fig. 12 Total pressure distribution along the vane

흡입면에 강한 반경방향의 와류에 의한 코어를 관찰 할 수 있다. 종합하면 예상한바와 같이 베인 내부에서는 순환유동에 의한 접선방향의 와류와 베인 후류에 의한 반경방향의 와류가 동시에 존재한다. 이러한 와류의 형성과 베인의 기하학적인 형상과의 적절한 조화가 성능에 큰 영향

을 미치리라 생각된다.

4.2 입구 및 출구에서의 운동량교환

연료펌프의 설계방법과 성능예측방법은 참고문헌에 다양하게 소개되고 있으나 아직도 신뢰성이 부족하다. 이는 그 형상과 유동구조가 다소 복잡하고 점성의 영향이 크기 때문이다. 본 연구의 해석을 통해서 구한 데이터를 사용하여 성능예측 차원에서 중요한 양들을 검토해 본다. 참고로 성능예측에 대한 기본식들을 부록에서 간략히 기술하였다.

Fig. 10~Fig. 12까지는 베인을 따라가면서 허브에서 팁 쪽에서 유동이 들어가는 면과 블레이드 팁을 따라가면서 유동이 나가는 면에서 각운동량의 교환을 나타내는 평균 접선속도성분, 그리고 순환유동량을 나타내는 속도성분 및 전압을 나타낸 그림들이다. 그림에서 횡축은 허브에서부터 베인을 따라 가면서의 거리를 베인 높이로 무차원화 한 양이다.

먼저 임펠러 입구와 출구에서 이루어지는 각운동량 교환의 분포를 Fig. 10에 나타내었다. 대체적으로 입구의 허브에서 팁으로 가면서 증가하고 출구에서는 거의 균일한 분포를 보인다. 실제로 일한 양들은 미끄럼 계수와 경험치로 예측한다. 운동량의 교환은 식 (A.1) 및 (A.2)에서 이론적 압력상승을 나타내고 있으며, 실제 압력상승을 빼면 채널에서 손실헤드를 예측할 수 있게 한다.

Fig. 11은 순환유동이 베인으로 들어가는 입구 영역에서는 축방향 속도성분을 나타낸 것이며 유동이 나가는 출구영역에서는 반경방향 속도성분을 나타낸 것이다. 축방향 및 반경방향의 속도값 모두 베인으로 들어가는 양을 음의 값으로 하였는데 Fig. 11에서 보면 유동이 허브에서 슈라우드 올라가면서 m/h 이 0.8까지 유동이 블레이드로 들어오다가 0.8 이후로 나가는 것을 볼 수 있다. 식 (A.3) 및 (A.4)에서 알 수 있듯이 순환유량은 이들의 모델링을 위해서 필요한 정보이다. 그리고 전압은 Fig. 12에서와 같이 유동이 블레이드에서 나오기 시작하는 0.8 이후에서 급격히 증가하는 것을 볼 수가 있다. 펌프를 설계할 때 각운동량의 분포를 제어해야하며 이때 보텍스 코아의 위치가 중요한 문제가 된다.

5. 결 론

재생펌프 내부유동의 수치 해석적 연구를 통해서 얻은 결과를 다음과 같이 정리한다.

- (1) 누설유량을 예측하는 경험식(식 (4))을 제시하였다.
- (2) 누설량은 펌프 성능에 많은 영향이 있음을 알 수가 있었다. 수두가 높을수록 간극의 크기에 따른 누설량의 변화가 많아져서 누설이 성능에 미치는 영향이 점점 커짐을 알 수가 있었다.
- (3) 베인 내부에 주 유동 방향의 와류와 반경 방향의 와류의 형성을 확인하였다.
- (4) 계산된 데이터를 이용하여 베인의 설계와 성능예측 모델링에 필요한 자료를 확보할 수 있음과 그 신뢰성을 확인하였다.

후 기

본 연구는 (주)캐프스 와의 공동연구와 서울대 마이크로열유체 ERC의 부분적인 지원을 통해 이루어졌으며 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Lee Chan, Sung Hyung Jin, Kwon Jang Hyuk and Chung Myung Kyoony, 1991, "Study on the Performance Analysis and the Optimization of Regenerative Pump," *International Journal of KSME*, Vol. 15, No. 2, pp 661~667.
- (2) Hollenberg J. W. and Potter J. H., 1979, "An Investigation of Regenerative Blowers and Pumps," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 101, No. 2, pp. 147~152.
- (3) Shimosaka Minoru and Yamazaki Shinzo, 1960, "Research on the Characteristics of Regenerative Pump (1st Report, Influences of Flow Channel and Impeller)," *Bulletin of JSME*, Vol. 3, No. 10, pp. 185~190.
- (4) Shimosaka Minoru and Yamazaki Shinzo, 1960, "Research on the Characteristics of Regenerative Pump (2st Report, Theoretical Research on the Performance)," *Bulletin of JSME*, Vol. 3, No. 10,

pp. 191~199.

(5) Wilson W. A., Santalo M. A. and Oelrich J.A., 1955, "A Theory of the Fluid-Dynamic Mechanism of Regenerative Pumps," *Transaction of the ASME*, vol. 77, pp. 1303~1316.

(6) Senoo Yasutoshi and Fukuoka, 1956, "A Comparison of Regenerative Pump Theories Supported by New Performance Data," *Transaction of the ASME*, vol. 78, pp. 1092~1102.

부 록

A.1 성능예측을 위한 1차원 해석

연료펌프의 블레이드를 포함하는 유동공간을 검사체적으로 설정하고 각운동량 정리를 적용한다. 검사체적을 설정하고, 압력은 입출구 단면에서 일정하다고 가정하고 1차원 해석을 하면 다음과 같이 된다.

$$gH = \frac{Q_c(V_2 u_2 - V_1 u_1)}{\omega r_g A} - gH_l \quad (A1)$$

여기서 r_g 는 채널 단면 A 의 무게 중심의 위치이다. 연료펌프의 압력상승은 임펠러와 채널 사이의 운동량 교환에 의해서 이루어지면 위 식에서 재순환 유동량 Q_c 가 클수록 증가한다. 채널의 손실이 없는 경우에 이론적 수두는 다음과 같이 된다.

$$gH_{th} = \frac{Q_c}{Q_s} (V_2 u_2 - V_1 u_1) \quad (A2)$$

여기서 $Q_s = \omega r_g A$ 이다. 한편 채널과 임펠러 검사

체적에서 에너지평형을 생각하면 채널 내부에서의 압력상승량 H_c 은 다음 관계식을 얻는다.

$$gH_c = (V_2 u_2 - V_1 u_1) \left(1 - \frac{Q_c}{Q_s}\right) + \frac{gH_l}{Q_c} \quad (A3)$$

순환유량은 위 식의 채널에서 전손실을 이용하여 구한다. 많은 문헌에서 그 손실을 다음과 같이 모델링한다.

$$gH_c = \frac{(u_1 - V_1)^2}{2} + K_c \left(\frac{Q_c}{A_2}\right)^2 \quad (A4)$$

위 식 (A3)와 (A4)에서 순환량을 구하게 된다. 이때 스윙 속도성분을 어떻게 가정하는가와 손실계수 K_c 를 가정하는 것이 가장 중요한 요소가 된다. 한편 임펠러에 검사체적에서 운동량정리를 적용하여 동력을 구하면 다음과 같다. 단 여기서 임펠러의 마찰에 의한 토크는 무시한다.

$$P_w = \rho Q_c (V_2 u_2 - V_1 u_1) \quad (A5)$$

식 (A1)에 의해서 (A5)는 다음과 같이 된다.

$$P_w = \rho Q_s (gH + gH_l) \quad (A6)$$

따라서 수력효율은 다음과 같이 된다.

$$\eta = \frac{Q_c}{Q_s} \left(1 - \frac{H_l}{H_{th}}\right) \quad (A7)$$

이상의 유도에서 Q_c 를 안다면 H_{th} 를 구하고, H_l 에 따라서 효율이 구해진다.