

블록최적화에 의거한 구조계와 제어계의 동시최적화 - 근사적 어프로치 -

손 회 수*

(2003년 2월 4일 접수, 2003년 6월 21일 심사완료)

Simultaneous Optimization of Structure and Control Systems Based on Convex Optimization - An approximate Approach -

Hoe-SooSon

Key Words : Simultaneous Optimization(동시최적화), Linearization(선형화), Optimal Control(최적 제어), Descriptor System(디스크립터 시스템), Convex Optimization(블록최적화), Multi-objective Optimization(다목적 최적화).

Abstract

This paper considers a simultaneous optimization problem of structure and control systems. The problem is generally formulated as a non-convex optimization problem for the design parameters of mechanical structure and controller. Therefore, it is not easy to obtain the global solutions for practical problems. In this paper, we parameterize all design parameters of the mechanical structure such that the parameters work in the control system as decentralized static output feedback gains. Using this parameterization, we have formulated a simultaneous optimization problem in which the design specification is defined by the H_2 and H_∞ norms of the closed loop transfer function. So as to lead to a convex problem, we approximate the nonlinear terms of design parameters to the linear terms. Then, we propose a convex optimization method that is based on linear matrix inequality (LMI). Using this method, we can surely obtain suboptimal solution for the design specification. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

1. 서 론

최근 제어대상중에 설계변수를 가지는 제어계의 설계에서는 구조 변수와 컨트롤러를 동시에 최적화하는 '구조계와 제어계의 동시최적화'가 주목 받고 있다. 동시최적화에 관한 많은 연구^(1~11)에서 사용되는 평가함수를 크게 나누어 기술하면,

- (a) 제어대상 시스템과 컨트롤러로 구성되는 폐루프 전달함수의 놈(Norm)을 평가함수로 채용하는 경우.^(1,2)
- (b) 시스템의 상태변수와 제어력의 2 차형식 평가함수를 채용하는 경우.⁽³⁾
- (c) 의 평가함수와 구조계의 설계변수 변동에 의해 발생하는 역학적인 힘의 2 차형식의 합으로 구성되는 평가함수를 채용하는 경우.^(4~6)

- (d) 또는 (b)의 평가함수와 구조계에만 의존하는 평가함수(예를 들면, 구조물의 질량 등)의 합으로 구성되는 평가함수를 채용하는 경우.^(7~9)
- (e) 구조계에만 의존하는 평가함수를 채용하는 경우.⁽¹⁰⁾
- (f) 시스템의 상태변수의 2 차형식 평가함수를 채용하는 경우.⁽¹¹⁾

로 분류될 것이다. 많은 연구에서는 상술의 (a)~(f)의 평가함수에 구조계의 설계변수에 관한 제약(기계구조물의 경우, 질량, 감쇠특성, 강성특성은 영이상이라는 본질적인 제약과 설계상의 선택범위로서 주어지는 제약의 2 종류가 있다)과 폐루프계의 성능에 관한 제약도 부가하여 문제를 정식화하고 있다. 이 같은 정식화는 일반적으로 비선형 최적화 문제가 되며, 해석적인 해를 얻는 것은 상당히 어렵다. 따라서, 최적해를 수치적으로 구하기 위한 방법, 즉 감도해석에 의한 해법,^(3~11) BMI(Bilinear Matrix Inequality: 이차 행렬 부등식)에 의거한 해법^(1,2) 등이 제안되고, 또 그 유용성을 확인하고있

* 회원, (주)바렘 기술연구소
E-mail : hsson@balem.com
TEL : (051)831-5557 FAX : (051)831-5559

다. 그러나 다음과 같은 문제점이 존재한다. 즉, 동시최적화문제에서 나타나는 평가함수는 일반적으로 설계변수인 구조변수와 컨트롤러 변수의 비선형적인 함수가 되므로 현존의 최적화 수법으로는 실용적인 계산 시간 내에 전역적 최적해(Global Solution)를 구하기가 어렵다.

Tanaka⁽¹⁾는 일반적인 동시최적화문제가 구조 변수와 컨트롤러에 관한 BMI 문제에 귀착된다는 것을 명확히 하고있다. BMI 문제는 효율 좋게 풀 수 없는 문제(NP 난해)이며, 설계변수의 수에 관해서 다항식 시간에 전역적 최적 해를 구하는 알고리즘은 존재하지 않는다. BMI 문제를 LMI(Linear Matrix Inequality: 선형 행렬 부등식) 문제에 귀착 시켜서 해를 구하는 것은 실용적으로 중요하며, 주어진 설계 사양을 LMI 로 기술할 수 있다면, 그 문제는 풀렸다고 볼 수 있다.⁽¹²⁾

본 연구에서는 일반적으로 BMI 문제가 되는 동시최적화문제를 근사적으로 LMI 문제에 귀착 시켜, 블록면상에서 구조변수와 컨트롤러를 수치적으로 최적화하는 동시최적화문제를 생각한다. 처음으로 기계구조물의 질량, 강성특성, 감쇠 특성을 구조변수로 하여, 이들 구조변수를 출력 피드백 이득의 형태로 파라미터화(Parameterization)한다. 다음으로 디스크립터표현의 유연성을 이용하여, 페루프계의 각 시스템 행렬을 구조변수와 컨트롤러의 선형 함수로 기술한다. 제어법칙은 상태피드백으로 하며, 디스크립터형식으로 표현되는 페루프 전달함수의 H_2, H_∞ norms 을 설계사양으로 채용한다. 그리고 설계사양을 LMI 문제에 귀착 시켜 블록최적화(Convex Optimization)에 의거한 동시최적화 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘에서는 구조변수와 컨트롤러를 블록면상에서 동시에 구할 수 있기 때문에 효율적으로 최적 값을 구할 수 있다. 예제에서는 제안 수법의 유용성을 나타내기로 한다.

2. 구조계의 파라미터화

본 장에서는 기계 구조물의 질량, 감쇠, 강성 행렬중의 조절 가능한 설계변수를 선형분수변환에 의거하여 출력 피드백 이득의 형태로 파라미터화 한다.⁽⁵⁾ 기계 구조물의 선형화 한 운동방정식은 다음과 같이 기술할 수 있는 것이 많다. (연속체에서도, 유한 요소 해석등에 의해 유한 차원의 방정식으로 근사화 할 수 있다)

$$\left. \begin{aligned} M(p_m)\ddot{q}(t)+D(p_d)\dot{q}(t)+K(p_k)q(t) \\ =L_u u(t)+L_w w(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

여기에서, $M(p_m), D(p_d), K(p_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬이며, 이하의 조건이 성립한다.

$$M = M^T > 0, D = D^T \geq 0, K = K^T \geq 0 \quad (2)$$

식 (1)중의 $q(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 변위 벡터, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 는 제어력 벡터, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 는 외란 벡터 이다. $L_u \in \mathbb{R}^{n \times m}, L_w \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 는 각각 액추에이터의 배치 및 외란이 혼입되는 위치에 의해 결정되는 행렬이다. $M(p_m), D(p_d), K(p_k)$ 는 각 행렬의 차수를 보유한 조건 하에서 구조변수 p_m, p_d, p_k 를 많은 경우 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$M = M_0 + B_m \Sigma_m(p_m) C_m = M_0 + C_m^T \alpha_m \Sigma_m(p_m) C_m \quad (3)$$

$$D = D_0 + B_d \Sigma_d(p_d) C_d = D_0 + C_d^T \alpha_d \Sigma_d(p_d) C_d \quad (4)$$

$$K = K_0 + B_k \Sigma_k(p_k) C_k = K_0 + C_k^T \alpha_k \Sigma_k(p_k) C_k \quad (5)$$

여기에서, $\alpha_m, \alpha_d, \alpha_k > 0$ 는 구조변수의 상한과 하한 값의 차를 나타내는 스칼라량을 각 요소에 나열한 대각행렬이며, 식 (3) ~ 식 (5)는 각 행렬의 대칭성을 이용한 변형이다. $\Sigma_m(p_m), \Sigma_d(p_d), \Sigma_k(p_k)$ 는 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬중의 구조변수 p_m, p_d, p_k 를 되풀이하며 대각 요소에 나열한 대각 행렬이다. 또 다른 행렬은 계수행렬이며, $B_m, C_m, B_d, C_d, B_k, C_k$ 가 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬에 포함되는 각각의 변수의 위치를 나타내고있다. 구조변수 p_m, p_d, p_k 는 조절 가능하지만, p_m 의 변화에 의해서도 $M > 0$ 의 조건은 유지된다고 가정한다. 즉, 식 (1)의 시스템의 차수는 변화하지 않는다. 식 (1)의 운동방정식에서 상태량을 $x(t) = [q(t)^T \dot{q}(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ 로 정의하면, 식 (1)에 대응하는 디스크립터방정식은

$$\left. \begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_x x(t) + D_{zu} u(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

과 같다. 여기서, 계수행렬은 각각

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ L_u \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ L_w \end{bmatrix}$$

로 표현된다. 디스크립터방정식 (6)중의 행렬 E 는 p_m 의 함수, 행렬 A 는 p_d, p_k 의 함수이다. 즉 다음 식으로 나타내어진다.

$$\left. \begin{aligned} E(p_m) &= E_0 + B_e \Sigma_e(p_m) C_e = E_0 + C_e^T \alpha_e \Sigma_e(p_m) C_e \\ A(p_k, p_d) &= A_0 - B_a \Sigma_a(p_k, p_d) C_a \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

단, $rank(E_0) = 2n$ 이다(식 (3)은, 행렬의 차수를 보유한 조건하에서의 설계변수 표현이며, 이 조건은 항상 성립한다). 행렬 E, A 중의 구조 변수에 관해서 선형분수변환하면, 디스크립터방정식 (6)과

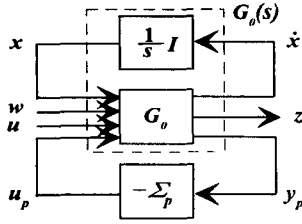


Fig. 1 Parameterization of structural system

동일한 표현으로서 외부 입력 $[w(t)^T \ u(t)^T]^T$ 에서 제어량 $z(t)$ 까지 의 전달함수 $G(s)$ 는 다음과 같이 선형분수변환할 수 있다.

$$G(s) = F_u \left\{ F_l \left(G_0, -\Sigma_p(p_m, p_d, p_k) \right), \frac{1}{s} I \right\} \quad (8)$$

$G(s)$ 중의 $\Sigma_p(p_m, p_d, p_k)$ 는 구조 변수 p_m, p_d, p_k 를 대각상에 나열한 행렬, 즉

$$\Sigma_p = \begin{bmatrix} \Sigma_a(p_k, p_d) & 0 \\ 0 & \Sigma_c(p_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_k(p_k) & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_d(p_d) & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_c(p_m) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_p \times n_p} \quad (9)$$

이며, 구조변수에 관해서는 이하의 제약을 둔다.

$$\Sigma_p < \Sigma_p(p_m, p_d, p_k) < \overline{\Sigma_p} \quad (10)$$

실제로 구조변수는 설계 가능한 범위가 존재하기 때문에, 식 (10)의 제약을 두는 것은 자연스럽다. 식 (8)의 계수행렬 G_0 는

$$G_0 = \left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{A}_0 & \tilde{B}_w & \tilde{B}_u & \tilde{B}_p \\ \hline C_{zx} & 0 & D_{zw} & 0 \\ \hline C_{ac} & D_w & D_u & B_{ac} \end{array} \right], B_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_c \tilde{B}_a & C_c \tilde{B}_c \end{bmatrix} \\ C_{ac} = \begin{bmatrix} C_a \\ C_c \tilde{A}_0 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} 0 \\ C_c \tilde{B}_w \end{bmatrix}, D_u = \begin{bmatrix} 0 \\ C_c \tilde{B}_u \end{bmatrix} \\ \tilde{A}_0 = E_0^{-1} A_0, \tilde{B}_w = E_0^{-1} B_w, \tilde{B}_a = E_0^{-1} B_a \\ \tilde{B}_u = E_0^{-1} B_u, \tilde{B}_c = E_0^{-1} B_c, \tilde{B}_p = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a & \tilde{B}_c \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (11)$$

로 정의된다. $G(s)$ 를 블록선도로 나타낸 것이 Fig. 1이며, $G_0(s)$ 의 상태 공간 표현은 다음 식으로 주어진다.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \tilde{A}_0 x(t) + \tilde{B}_w w(t) + \tilde{B}_u u(t) + \tilde{B}_p u_p(t) \\ z(t) = C_{zx} x(t) + D_{zw} u(t) \\ y_p(t) = C_{ac} x(t) + D_w w(t) + D_u u(t) + B_{ac} u_p(t) \end{array} \right\} \quad (12)$$

단, 입력 $u_p(t) = -\Sigma_p y_p$ 는 다음 식으로 주어진다

$$u_p(t) = -\left(I + \Sigma_p B_{ac} \right)^{-1} \Sigma_p \left\{ C_{ac} x(t) + D_w w(t) + D_u u(t) \right\} \quad (13)$$

시스템 식 (12)와 식 (13)는 디스크립터방정식(6) 과 동등하며 시스템 행렬의 차수는 변화지 않는다. 본 연구에서는 기계 구조물을 대상으로 선형분수 변환을 행했지만, 다른 일반적인 대상물에 있어서도 동일하게 구조계의 파라미터화할 수 있다. 시스템 식 (12)에 제어력을 피드백하여 얻어지는 페루프계는 식 (13)의 하선 부분 때문에 각 시스템 행렬을 구조 변수 Σ_p 의 선형 함수로 기술할 수 없다. 이 경우 어떤 평가 함수를 최소화하는 동시최적화문제에서는 비철면최적화문제가 된다. 이 문제에 대해서 Son⁽⁵⁾은 구조 변수의 조절 가능한 범위 내에서 변수를 탐색할 수 있는 비선형 최적설계 알고리즘을 제안하였다. 본 연구에서는 이 어프로치와는 다른 철면최적화에 의거한 구조계와 제어계의 동시최적화문제를 생각한다.

3. 페 루프계의 표현과 문제의 정식화

본 장에서는 처음에 디스크립터표현의 유연성을 이용하여 페루프계의 각 시스템행렬을 구조변수 Σ_p 의 선형함수로 기술한다. 다음으로 디스크립터 표현에 의거하여 동시최적화문제를 정식화한다.

3.1 페루프계의 표현

제어법칙으로 이하의 상태피드백을 생각한다.

$$u(t) = -Fx(t) \quad (14)$$

식 (14)의 제어법칙을 식 (12)에 대입하여 얻어지는 페루프계에서 상태벡터를 $x_{cl}(t) = [x(t)^T \ y_p(t)^T]^T$ 로 정의하면 다음의 디스크립터방정식이 얻어진다.

$$\left. \begin{array}{l} E_{cl} \dot{x}_{cl}(t) = A_{cl} x_{cl}(t) + B_{cl} w(t) \\ z(t) = C_{cl} x_{cl}(t) \end{array} \right\} \quad (15)$$

식 (15) 중의 각 행렬은, 다음 식으로 정의된다.

$$\left. \begin{array}{l} E_{cl} = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & 0_{n_p} \end{bmatrix}, A_{cl} = A_{cl0} - A_{b1} F A_{cl} - A_{b2} \Sigma_p A_{c2} \\ B_{cl} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_w \\ D_w \end{bmatrix}, C_{cl} := [C_{11} \ 0] = C_{cl0} - D_{zw} F A_{cl} \end{array} \right\} \quad (16)$$

또.

$$A_{cl0} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0 \\ C_{ac} & -I_{n_p} \end{bmatrix}, A_{b1} = \begin{bmatrix} \bar{B}_u \\ D_u \end{bmatrix}, A_{b2} = \begin{bmatrix} B_p \\ B_{ac} \end{bmatrix}$$

$$A_{c1} = [I_{2n} \ 0], A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$C_{cl0} = [C_{zx} \ 0], C_{11} = C_{zx} - D_{zu}F$$

이다. 식 (15) 중의 각 행렬은 구조변수 Σ_p 와 피드백 이득 F 의 선형함수로 기술되어져 있다.

3.2 문제의 정식화

폐루프계의 제어 성능을 평가하는 사양으로 외부입력 $w(t)$ 에서 제어량 $z(t)$ 까지의 폐루프 전달함수 $T_{zw}(s) = C_{cl}(sE_{cl} - A_{cl})^{-1}B_{cl}$ 의 H_2 , 또는 H_∞

$$J_2 := \|T_{zw}(s)\|_2^2, \text{ or } J_\infty := \|T_{zw}(s)\|_\infty \quad (18)$$

의 상한을 최소화하는 문제를 생각한다. 즉, 「 주어진 스칼라 $\gamma > 0$ 에 대해서 $J(J_2, J_\infty) < \gamma$ 을 만족하는 피드백 이득 $F_j (j=2, \infty)$ 및 구조변수 $\Sigma_p(p_m, p_d, p_k)$ 를 동시에 구하시오. 」로 기술 할 수 있다.

4. 문제의 기술

본 장에서는 직접 $J_j (j=2, \infty)$ 를 최소화하지 않고 그 상한을 최소화하는 동시최적화문제를 LMI 문제에 귀착 시켜, (13) 칠면최적화에 의거한 동시최적화 알고리즘에 관해 기술한다.

4.1 BMI 문제에 귀착

디스크립터방정식 (15)에 관해서 이하의 정리 1, 정리 2 가 성립됨이 알려져 있다.

[정리 1] (14) (E_{cl}, A_{cl}) 가 안정 그리고 폐루프 전달함수 $T_{zw}(s)$ 의 H_∞ 놈 이 γ 미만이 되기 위한 필요충분조건은 다음 식을 만족하는 X_x 가 존재하는 것이다.

$$E_{cl}X_x = X_x^T E_{cl}^T \geq 0 \quad (19a)$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_x + X_x^T A_{cl}^T & B_{cl} & X_x^T C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -\gamma I & 0 \\ C_{cl}X_x & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (19b)$$

[정리 2] (15) (E_{cl}, A_{cl}) 가 안정 그리고 폐루프 전달함수 $T_{zw}(s)$ 의 H_2 놈 이 γ 미만이 되기 위한 필요충분조건은 다음 식을 만족하는 X_2 가 존재하는 것이다.

$$E_{cl}X_2 = X_2^T E_{cl}^T \geq 0 \quad (20a)$$

$$A_{cl}X_2 + X_2^T A_{cl}^T + B_{cl}B_{cl}^T < 0 \quad (20b)$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_{11}X_{21} \\ X_{21}C_{11}^T & X_{21} \end{bmatrix} > 0 \quad (20c)$$

$$\text{Trace}(Q) < \gamma \quad (20d)$$

단, 정리 2 는 문헌[15]의 결과를 확장한 것이다(실제로 식 (20c), 식 (20d)는 $C_{cl} = C_{cl}E_{cl}$ 와 식 (20a)의 조건에 의한 변형으로 LMI 로 표현한 것이다). 식 (19a), 식 (20a)의 조건으로부터 $X_j \in \mathfrak{R}^{((2n \times n_p) \times (2n \times n_p))} (j=2, \infty)$ 는 이하 의 구조를 가진다(1).

$$X_j = \begin{bmatrix} X_{j1}^{(2n \times 2n)} & 0 \\ X_{j3} & X_{j4}^{(n_p \times n_p)} \end{bmatrix}, X_{j1} = X_{j1}^T > 0 (j=2, \infty) \quad (21)$$

식 (19), 식 (20)는 결정해야 할 변수 $\Sigma_p, F_j, X_j (j=2, \infty)$ 에 관해서 BMI 이다. BMI 문제는 NP 난해이며, 설계변수의 수에 대해서 다항식 시간에서는 전역적 최적해를 구하는 알고리즘이 존재하지 않는다. 실제로 문헌[1]에서는 구조변수를 고정시켜 컨트롤러를 구한 후, 컨트롤러를 고정시켜 구조변수를 구하는 되풀이 수법으로 최적화를 행하고 있다. 그러므로 본 연구에서는 Riccati 방정식의 해법으로 Kleinman(13)이 사용한 것과 같이 최소화 하고 싶은 것의 상한을 최소화함으로 인해, 구조변수에 관한 비선형 항을 제거하여, BMI 문제를 LMI 문제에 귀착 시키는 것을 생각한다.

4.2 변수변환

식 (16), 식 (17)를 식 (19b), 식 (20b)에 대입 하면, 결정해야 할 변수 F_j 와 $X_j (j=2, \infty)$ 에 관한 비선형 항 $A_{b1}F_j A_{cl}X_j (j=2, \infty), D_{zu}F_x A_{cl}X_x$ 이 나타난다. BMI 문제를 LMI 문제에 귀착 시키기 위해서는 이들 항을 선형 화할 필요가 있지만, 보통 변수 변환 ($\bar{W}_j = F_j A_{cl}X_j (j=2, \infty)$) 및 변수제거법을 적용해도 얻어지는 조건은 LMI 가 되질 않는다.(16) 그래서 디스크립터시스템에 대해서 컨트롤러의 변수 $X_j (j=2, \infty)$ 가 식 (21)로 주어지는 것에 착안하면, 비선형 항은 다음과 같이 기술 할 수 있다(간단한 대수 연산에 의해 구해진다).

$$\left. \begin{aligned} A_{b1}F_j A_{cl}X_j &= A_{b1}F_j X_{j1} A_{cl} (j=2, \infty) \\ D_{zu}F_x A_{cl}X_x &= D_{zu}F_x X_{x1} A_{cl} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

식 (22)중의 비선형 항 $F_j X_{j1} (j=2, \infty)$ 을 변수변환 $W_j = F_j X_{j1} (j=2, \infty)$ 한다. 이 변수변환을 행한 후,

식 (19b), 식 (20b), 식 (22c)에 Schur 정리를 적용하면 정리 1, 정리 2 의 조건과 동등한 이하의 문제를 생각할 수 있다.

[문제 1] 주어진 스칼라 $\gamma_1 > 0$ 에 대해서 이하의 LMI 조건을 만족하는 컨트롤러 $F_j (j=2, \infty)$ 를 구하시오.

$$E_{cl} X_j = X_j^T E_{cl}^T (j=2, \infty) \geq 0 \quad (23)$$

(H_2 문제)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \Theta_{11} & B_{cl} \\ B_{cl}^T & -I \end{array} \right] < 0, \left[\begin{array}{cc} Q & (C_{2x} X_{21} - D_{2m} W_2)^T \\ (C_{2x} X_{21} - D_{2m} W_2)^T & X_{21} \end{array} \right] > 0 \\ Trace(Q) < \gamma_1 \\ \Theta_{11} = \tilde{A}_{cl0} X_2 + X_2^T \tilde{A}_{cl0}^T - A_{b1} W_2 A_{c1} - A_{c1}^T W_2^T A_{b1}^T \end{array} \right\} \quad (24)$$

(H_∞ 문제)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \Theta_{11} & (C_{cl0} X_\infty - D_{2m} W_\infty A_{c1})^T & B_{cl} \\ (C_{cl0} X_\infty - D_{2m} W_\infty A_{c1}) & -\gamma_1 I & 0 \\ B_{cl}^T & 0 & -\gamma_1 I \end{array} \right] < 0 \\ \Theta_{11} = \tilde{A}_{cl0} X_\infty + X_\infty^T \tilde{A}_{cl0}^T - A_{b1} W_\infty A_{c1} - A_{c1}^T W_\infty^T A_{b1}^T \end{array} \right\} \quad (25)$$

단, $F_j = W_j X_{j1}^{-1} (j=2, \infty)$, $\tilde{A}_{cl0} = A_{cl0} - A_{b2} \Sigma_p A_{c2}$ 이며, $X_j (j=2, \infty)$ 는 식 (21)을 만족한다.

식 (24), 식 (25)은 결정변수 $W_j, X_j (j=2, \infty)$ 에 관해서는 선형이며, Σ_p 가 주어지면 문제 1 를 계산함으로써 인해 최적적인 컨트롤러 $F_j (j=2, \infty)$ 를 설계 할 수 있다.

4.3 평가의 상한에 대한 LMI

본 연구에서는 구조변수 Σ_p 와 컨트롤러의 변수 $F_j, X_j (j=2, \infty)$ 를 동시에 설계하는 문제를 생각하고 있기 때문에, 식 (24), 식 (25) 중의 비선형적인 항 $A_{b2} \Sigma_p A_{c2} X_j (j=2, \infty)$ (식 (24), 식 (25) 중의 하선부분)을 선형화 한다. 여기서 식 (24), 식 (25) 중의 하선부분을 다음과 같이 변형한다.

$$\begin{aligned} & (A_{cl0} - A_{b2} \Sigma_p A_{c2}) X_j + X_j^T (A_{cl0} - A_{b2} \Sigma_p A_{c2})^T \\ & = A_{cl0} X_j + X_j^T A_{cl0}^T + (A_{c2} X_j - \Sigma_p^T A_{b2}^T)^T (A_{c2} X_j - \Sigma_p^T A_{b2}^T) \\ & \quad - X_j^T A_{c2}^T A_{c2} X_j - A_{b2} \Sigma_p \Sigma_p^T A_{b2}^T \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26) 중에는 비선형이며 준 부정인 항(하선부분)이 존재하기 때문에 식 (24), 식 (25)를 LMI 에 귀착 시킬 수 없다. 이 곤란함을 극복하기 위하여 다음의 정리를 생각한다.⁽¹⁷⁾

[정리 3] 임의의 행렬 N 과 $L_j (j=2, \infty)$ 에 대해서 다음의 조건이 성립한다.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} (N - \Sigma_p^T A_{b2}^T)^T (N - \Sigma_p^T A_{b2}^T) \geq 0 \\ (L_j - A_{c2} X_j)^T (L_j - A_{c2} X_j) \geq 0 (j=2, \infty) \end{array} \right\} \quad (27) \\ \left. \begin{array}{l} -A_{b2} \Sigma_p \Sigma_p^T A_{b2}^T \leq -N^T \Sigma_p^T A_{b2}^T - A_{b2} \Sigma_p N + N^T N \\ -X_j^T A_{c2}^T A_{c2} X_j \leq -L_j^T A_{c2} X_j - X_j^T A_{c2}^T L_j + L_j^T L_j \end{array} \right\} \quad (28) \end{array} \right\}$$

식 (27)는 정리 5 로부터 명확하게 성립되는 것을 알 수 있다. 식 (27)를 전개하면 식 (28)을 얻게 되며, $N = \Sigma_p^T A_{b2}^T, L_j = A_{c2} X_j (j=2, \infty)$ 일 때, 등식이 성립되는 것에 주의한다.

식 (28)의 좌변의 상한인 우변을 식(26)의 대등한 항에 대입한 후, 식 (24), 식 (25)에 Schur 정리를 적용하면, 설계변수에 관한 비선형 항이 제거된 다음의 문제 2 가 얻어진다.

[문제 2] 주어진 스칼라 $\gamma_2 > 0$ 에 대해서, 이하의 LMI 조건을 만족하는 구조변수 Σ_p 와 컨트롤러 $F_j (j=2, \infty)$ 를 동시에 구하시오.

$$E_{cl} X_j = X_j^T E_{cl}^T (j=2, \infty) \geq 0 \quad (29)$$

(H_2 문제)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \Phi_{11} & (A_{c2} X_2 - \Sigma_p^T A_{b2}^T)^T & B_{cl} \\ (A_{c2} X_2 - \Sigma_p^T A_{b2}^T) & -I & 0 \\ B_{cl}^T & 0 & -I \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} Q & (C_{2x} X_{21} - D_{2m} W_2)^T \\ (C_{2x} X_{21} - D_{2m} W_2)^T & X_{21} \end{array} \right] > 0, Trace(Q) < \gamma_2 \end{array} \right\} \quad (30)$$

(H_∞ 문제)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \Phi_{11} & \Phi_{12}^T & (C_{cl0} X - D_{2m} W_\infty A_{c1})^T & B_{cl} \\ \Phi_{12} & -I & 0 & 0 \\ (C_{cl0} X - D_{2m} W_\infty A_{c1}) & 0 & -\gamma_2 I & 0 \\ B_{cl}^T & 0 & 0 & -\gamma_2 I \end{array} \right] < 0 \\ \Phi_{11} = (A_{cl0} - L_j^T A_{c2}) X_j + X_j^T (A_{cl0} - L_j^T A_{c2})^T \\ \quad + L_j^T L_j + N^T N - A_{b1} W_j A_{c1} - A_{c1}^T W_j^T A_{b1}^T \\ \quad - N^T \Sigma_p^T A_{b2}^T - A_{b2} \Sigma_p N \\ \Phi_{12} = A_{c2} X_\infty - \Sigma_p^T A_{b2}^T, F_j = W_j X_{j1}^{-1} (j=2, \infty) \end{array} \right\} \quad (31)$$

여기서,

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{11} = (A_{cl0} - L_j^T A_{c2}) X_j + X_j^T (A_{cl0} - L_j^T A_{c2})^T \\ \quad + L_j^T L_j + N^T N - A_{b1} W_j A_{c1} - A_{c1}^T W_j^T A_{b1}^T \\ \quad - N^T \Sigma_p^T A_{b2}^T - A_{b2} \Sigma_p N \\ \Phi_{12} = A_{c2} X_\infty - \Sigma_p^T A_{b2}^T, F_j = W_j X_{j1}^{-1} (j=2, \infty) \end{array} \right\} \quad (32)$$

단, $X_j (j=2, \infty)$ 는 식 (21)을 만족하는 것이며, 행렬 N 과 $L_j (j=2, \infty)$ 은 사전에 주어지는 것으로 한다.

임의의 N 과 $L_j (j=2, \infty)$ 에 대해서 문제 2 의 Φ_{11} 는 문제 1 의 Θ_{11} 의 상한으로 되어있다는 것에 주의하면, 문제 2 를 만족하는 Σ_p 와 $X_j (j=2, \infty)$ 를

문제 1의 행렬부등식에 대입해서 얻어지는 놈의 상한 값 γ_1 는 $\gamma_1 \leq \gamma_2$ 을 만족한다. 이것을 기초로 하여, 문제 2의 임의로 줄 수 있는 N 과 $L_j (j=2, \infty)$ 를 되풀이 갱신하는 다음의 알고리즘을 생각하자.

Step.1 $k=1$ 로 하여, 구조변수의 초기 값 $\Sigma_p^{(k)}$ 을 설정한다. 그리고 문제 1을 계산하여 $X_j^{(k)} (j=2, \infty)$, $F_j^{(k)}$ 를 구한다.

Step.2 페루프 전달함수 $T_{zw}(s)$ 의 H_2, H_∞ 놈의 상한 $\gamma^{(k)}$, $N = A_{b2}\Sigma_p^{(k)}$, $L_j = A_{c2}X_j^{(k)} (j=2, \infty)$ 를 설정한다.

Step.3 문제 2를 계산하여 $\Sigma_p^{(k+1)}$, $F_j^{(k+1)}$, $X_j^{(k+1)} (j=2, \infty)$ 및 $\gamma^{(k+1)}$ 를 구한다.

Step.4 $\frac{\gamma^{(k)} - \gamma^{(k+1)}}{\gamma^{(k)}} \leq \varepsilon$ 이면 종료한다. 여기서 $\varepsilon > 0$ 는 스칼라이다.

Step.5 $k = k+1$ 로 하여, Step.2로 돌아간다.

식 (30), 식 (31)은 변수 $\Sigma_p, X_j, W_j (j=2, \infty)$ 에 관해서 LMI로 되어있다. 문제 2는 $N = \Sigma_p^T A_{b2}^T, L_j = A_{c2}X_j (j=2, \infty)$ 로 주어졌을 때(사전에 Σ_p 와 $X_j (j=2, \infty)$ 를 알 수 없다는 것에 주의한다), 문제 1과 동등하다. 따라서 문제 2는 임의의 N 과 $L_j (j=2, \infty)$ 의 집합에 대해서 생각할 때, 문제 1를 포함한다. 또 문제 2는 LMI로 되어있기 때문에 실행가능성(Feasibility)은 보장된다. 본 알고리즘에 있어서 구조변수가 수렴하여 $\Sigma_p^{(k)} \rightarrow \bar{\Sigma}_p$ 로 되었다고 하자. 이때 $N = \bar{\Sigma}_p^T A_{b2}^T$ 가 성립함으로 본 알고리즘에서 얻어지는 해는 문제 1의 해의 하나가 되어있다. 따라서 구조변수로 생각하고있는 영역의 전체에 흩어져있는 여러 개의 점을 초기 값으로 하여 계산한 결과가 같은 해에 수렴하면 그것은 전역적인 해일 것이다.

5. 예 제

5.1 예제 1

Fig. 2에 나타내는 3 자유도모델의 진동역제 문제를 생각한다. 외란 $w(t)$ 는 m_3 에 작용하며 제어력 $u(t)$ 는 m_1 에 더해지는 힘으로 한다. 변위벡터를 $q(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ 라고 정의하면 운동방정식(1)의 각 행렬은

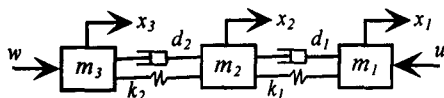


Fig. 2 Dynamic model of 3-degree-of-freedom

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & 0 \\ -d_1 & d_1+d_2 & -d_2 \\ 0 & -d_2 & d_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), L_u = [-1 \ 0 \ 0]^T, L_w = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (33)$$

가 된다. 구조변수는 강성특성 k_1 과 감쇠특성 d_2 두개로 한다. 고정된 물리변수는 질량 $m_1 = 4[\text{kg}]$, $m_2 = 2[\text{kg}]$, $m_3 = 10[\text{kg}]$, 감쇠특성 $d_1 = 0.01[\text{Ns/m}]$, 강성특성 $k_2 = 1[\text{N/m}]$ 로 한다. 구조변수에 관한 제약은 다음과 같이 설정하였다.

$$\left. \begin{aligned} \underline{k}_1 < k_1 < \bar{k}_1, \underline{d}_2 < d_2 < \bar{d}_2 \\ 1 < k_1 < 10, 0.1 < d_2 < 5 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

식 (34)의 제약에 의거하여 감쇠행렬 $D = D_0 + B_d \Sigma_d C_d$, 강성행렬 $K = K_0 + B_k \Sigma_k C_k$ 중의 설계변수 표현을 다음과 같이 정의한다.

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.01 & 0 \\ -0.01 & 0.01+d_2 & -d_2 \\ 0 & -d_2 & d_2 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_2 - d_2 \\ -(\bar{d}_2 - d_2) \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 - k_1 \\ -(\underline{k}_1 - k_1) \\ 0 \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Sigma_p = \text{diag}(\Sigma_k, \Sigma_d) = \text{diag}(p_{k1}, p_{d2}), 0 < p_j (j = k_1, d_2) < 1 \quad (35)$$

여기서 $p_j (j = k_1, d_2)$ 는 구조변수이다. 식 (12) 중의 제어량 $z(t)$ 은 구조물의 각 질점의 변위를 억제할 목적으로 다음과 같이 설정했다.

$$z(t) = C_{zx}x(t) + D_{zw}u(t)$$

$$C_{zx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

본 예제에서는 H_2 최적설계문제에 대한 결과에 관해서 기술한다. 구조변수의 초기 값을 $p_j = 0.5 (j = k_1, d_2)$ 로 설정하여 문제 1를 계산한 결과, 피드백 이득 $F_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ 는

$$F_2 = [-0.8171 \ -0.7460 \ -1.4267 \ -2.4879 \ -1.1966 \ -4.4986] \quad (37)$$

가 되었으며, 페루프 전달함수 $T_{zw}(s)$ 의 H_2 놈의 상한 γ_2 는 0.38897이었다. 또 진의 H_2 놈(고정시킨 구조변수와 최적적인 컨트롤러 F_2 에 대한 H_2 놈)은 $\|T_{zw}(s)\|_2^2 = 0.38853$ 이었다. 이때의 컨트롤러의 변수 $X_2^{(0)}$ 와 구조변수 $\Sigma_p^{(0)} = \text{diag}(0.5, 0.5)$ 를 이용하여 $N = A_{b2}\Sigma_p^{(0)}$ 와

$L_2 = A_{c2} X_2^{(0)}$ 를 설정하고 문제 2 를 제안한 알고리즘에 의해 계산한 결과, 얻어진 평가함수의 값(J_2 의 상한)의 수렴하는 모습을 Fig. 3 에 나타낸다. 그림 중의 점선은 진의 H_2 norms 을 나타내며, 실선은 J_2 의 상한 값을 나타낸다. 되풀이하면서 J_2 의 상한은 감소하여 400 회 정도에서 수렴하고 있다. J_2 의 상한의 수렴 값은 0.38123 이었 으며, 진의 H_2 norm 은 $\|T_{zw}(s)\|_2^2 = 0.38106$ 이었다. 피드백 이득 $F_2^{(opt)} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ 와 구조변수 $\Sigma_p^{(opt)}$ 는 각각,

$$F_2^{(opt)} = [-0.8682 \ -0.7181 \ -1.4081 \ -2.6174 \ -1.1649 \ -4.3528] \quad (38)$$

$$\Sigma_p^{(opt)} = \begin{bmatrix} 0.1002695 & 0 \\ 0 & 0.4655788 \end{bmatrix} \quad (39)$$

이었다. 구조변수의 수렴 값을 Table 1 에 나타내며, 정규화 한 구조변수에 대한 진의 H_2 norms 의 값을 Fig. 4 에 나타낸다. Table 1 중의 수렴 값이란 제안한 알고리즘에 의해 계산된 결과이며, 최적 값이란 구조변수의 설계 가능한 범위 내에서의 최적 값을 의미한다. Fig. 4 와 Table 1 에 의해 전역적인 최적해가 구해진 것을 알 수 있다.

5.2 예제 2

Fig. 5 에 나타내는 구조물의 지면에 외란이 작용하는 4 자유도 모델을 제어대상으로 생각한다. 제어입력 $u(t)$ 은 최상단에 더해지는 힘으로 하고, 지면에 대한 상대 변위 벡터를 $q(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ 로 정의하면 운동방정식(1)중의 각 행렬은

$$M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & -d_4 \\ 0 & 0 & -d_4 & d_4 \end{bmatrix}, L_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}, L_w = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}$$

가 된다. 구조변수는 각 단의 질량 $m_j (j=1, \dots, 4)$ 의 4 개로 한다. 고정시킨 물리변수는 각 단간의 강성 특성 $k_j (j=1, \dots, 4) = 12[\text{N/m}]$, 감쇠 특성 $d_j (j=1, \dots, 4) = 0.1[\text{Ns/m}]$ 이다. 구조변수에 관한 제약은 다음 식으로 한다.

$$\underline{m}_j < m_j < \overline{m}_j, \quad 2 < m_j (j=1, \dots, 4) < 6 \quad (41)$$

식 (43) 의 제약을 기초로 하여 질량행렬

$M = M_0 + B_m \Sigma_m C_m$ 중의 설계변수를 다음과 같이 정의한다.

$$M_0 = \text{diag}(\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3, \underline{m}_4), \quad C_m = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$$

$$B_m = \text{diag}(\overline{m}_1 - \underline{m}_1, \overline{m}_2 - \underline{m}_2, \overline{m}_3 - \underline{m}_3, \overline{m}_4 - \underline{m}_4)$$

$$\Sigma_m = \text{diag}(p_{m1}, p_{m2}, p_{m3}, p_{m4}), \quad 0 < p_{mj} (j=1, \dots, 4) < 1 \quad (42)$$

여기에서, $p_{mj} (j=1, \dots, 4)$ 는 구조변수 이다. 외란

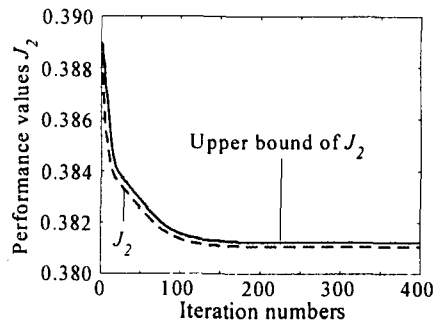


Fig. 3 Convergent process of upper bound of J_2

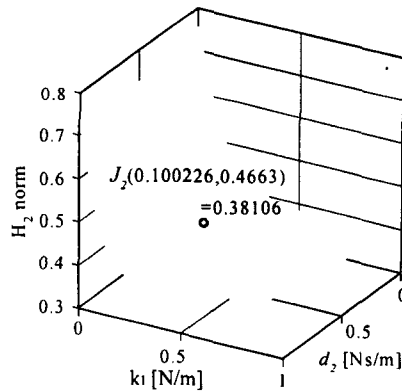


Fig. 4 H_2 norm for passive parameters

Table 1 Optimal values of design variable

	d_2 [Ns/m]	k_1 [N/m]	$\ T_{zw}(s)\ _2^2$
Initial values	2.5500000	5.5000000	0.38853
Convergent values	2.3813362	1.9024255	0.3810612
Optimal values	2.3848700	1.9020340	0.3810610

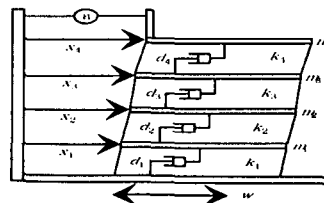


Fig. 5 Dynamic model of 4-degree-of-freedom

의 위치를 나타내는 행렬 L_u 도 $m_j (j=1, \dots, 4)$ 의 함수이지만, 2 장의 구조계의 파라미터화를 행하면 L_u 는 $m_j (j=1, \dots, 4)$ 의 함수가 되지 않는다(이 파라미터화에 관해서는 문헌[18]를 참조 하기 바란다). 식 (12) 중의 제어량 $z(t)$ 는 구조물의 최상단의 변위를 억제할 목적으로 다음과 같이 주었다.

$$z(t) = C_{zx}x(t) + D_{zu}u(t)$$

$$C_{zx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

구조변수의 초기값을 $p_j = 0.5 (j = m_1, m_2, m_3, m_4)$ 로 설정하고 문제 1 를 계산한 결과, 피드백 이득 $F_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 8}$ 는

$$F_2 = [6.6391 \times 10^{-3} \quad 2.8493 \times 10^{-2} \quad 7.5424 \times 10^{-2} \quad 8.9803 \times 10^{-2} \\ 1.3909 \times 10^{-1} \quad 3.3177 \times 10^{-1} \quad 5.9476 \times 10^{-1} \quad 8.2053 \times 10^{-1}] \quad (44)$$

이었다. 페루프 전달함수 $T_{zu}(s)$ 의 H_2 norms 상한 γ_2 는 23.48648 이었다. 또 진의 H_2 norm은 $\|T_{zu}(s)\|_2^2 = 23.48648$ 이었다. 이때의 컨트롤러의 변수 $X_2^{(0)}$ 와 구조변수 $\Sigma_p^{(0)} = \text{diag}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ 를 이용하여 $N = A_{b2}\Sigma_p^{(0)}$ 와 $L_2 = A_{c2}X_2^{(0)}$ 를 설정하고 문제 2 를 되풀이 계산한 결과, 얻어진 평가함수의 값(J_2 의 상한)의 수렴하는 모습을 Fig. 6 에 나타낸다. 그림 중의 점선은 진의 H_2 norm을 나타내며, 실선은 J_2 의 상한을 나타낸다. 되풀이 하면서 J_2 의 상한은 감소하여 450 회 정도에서 수렴하고 있다. J_2 의 상한의 수렴 값은 8.21169 이었고, 진의 H_2 norm은 $\|T_{zu}(s)\|_2^2 = 8.21161$ 이었다. 피드백 이득 $F_2^{(opt)} \in \mathbb{R}^{1 \times 8}$ 와 구조변수 $\Sigma_p^{(opt)}$ 는

$$F_2^{(opt)} = [9.9719 \times 10^{-3} \quad 3.3433 \times 10^{-2} \quad 7.6898 \times 10^{-2} \quad 8.5395 \times 10^{-2} \\ 1.0912 \times 10^{-1} \quad 2.4803 \times 10^{-1} \quad 4.2023 \times 10^{-1} \quad 5.5968 \times 10^{-1}] \quad (45)$$

$$\Sigma_p^{(opt)} = \text{diag}(1.2029 \times 10^{-7}, 1.17 \times 10^{-7}, 1.1619 \times 10^{-7}, 1.1597 \times 10^{-7}) \quad (46)$$

이었다. 구조변수의 수렴 값을 Table 2 에 나타낸다. Son⁽¹⁸⁾은 구조계에 관한 2 차형식과 제어계에 관한 2 차형식의 합으로 구성되는 평가함수 (H_2 norm에 상당)을 설정해, Fig. 5 의 제어대상의 경우, 전 질량이 설정한 범위의 하한이 해인 것을 해석적으로 나타내었다. 이 결과를 참고로 하면, 본 알고리즘에서는 전역적 최적 값이 얻어진 것을 알 수 있다. 이상으로 제안한 알고리즘의

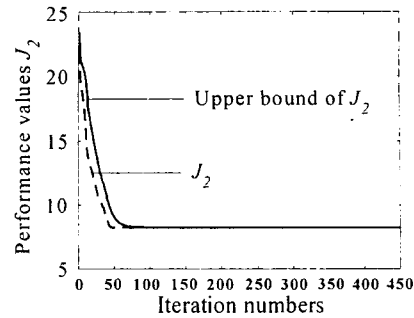


Fig. 6 Convergent process of upper bound of J_2

Table 2 Optimal values of design variable

m_j [kg]	m_1	m_2	m_3	m_4
Initial values	4.00	4.00	4.00	4.00
Convergent values	2.00	2.00	2.00	2.00
Optimal values	2.00	2.00	2.00	2.00

유효성을 나타내었다.

6. 결론

본 연구에서는 구조계와 제어계의 동시최적화 문제에 관해서 의논하였다. 디스크립터방정식으로 기술되는 페루프 전달함수 $T_{zu}(s)$ 의 H_2 , H_∞ norms 상한을 최소화하는 구조변수 Σ_p 와 컨트롤러 $F_j (j=2, \infty)$ 를 동시에 최적화하는 동시최적화문제를 구조변수에 관한 비선형 항을 선형으로 근사화 함으로서 LMI 문제에 귀착 시켰다. 그리고 볼록 최적화에 의거한 동시최적화 알고리즘을 제안하였다. 본 알고리즘은 근사적인 해법이지만 수렴한 경우에는 진의 값의 한 개를 준다. 따라서 구조변수로서 생각하는 영역의 전체에 흩어져있는 여러 개의 초기값으로 계산을 시작해, 같은 값에 수렴한 경우에는 그것을 이 영역에서의 최적 값으로 생각해도 좋다. 예제에서는 해가 수렴조건의 경계상에 있는 경우와 없는 경우의 두개에 대해서 알고리즘의 수렴성을 관찰해 본 결과, 전역적 최적해가 얻어지는 것을 나타내었다. 자후의 과제로서는, 기계구조물의 질량, 감쇠, 강성특성이 변수의 선형함수로 기술되지 않는 제어대상(예: 분포 정수 계에서 나타나는 유연구조물의 형상 최적화 문제[19])에 대해서, 볼록한 범위 내에서 최적화가 가능한 알고리즘을 개발하는 것 등을 들 수 있다

참고문헌

(1) 田中, 杉江, 1998, “構造系と制御系の同時設計問題の一般的枠組みと BMI に基づく解法,” 計測自動制御學會論文集, Vol. 34, pp. 27~33.

- (2) Kim, Y. B., 2000, "Active Vibration Control of a Structure with Output Feedback Based on Simultaneous Optimization Design Method," *KSME International Journal*, Vol. 14, pp. 57~64.
- (3) Sunar, M., and Rao, S. S., 1993, "Optimal Selection of Weighting Matrices in Integrated Design of Structures/Controls," *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 714~720.
- (4) 大日方 五郎, 1997, "構造系と制御系の同時最適設計問題," 計測と制御, Vol. 36, pp. 254~261. 解説論文.
- (5) 孫 會秀, 大日方 五郎, 2001, "構造系のパラメトリゼーションに基づく構造系と制御系の同時最適設計の一手法," 日本機械學會論文集(C編), Vol. 67, No. 657, pp. 1455~1461.
- (6) Gaudreault, M. L. D., Liebst, B. S., and Bagley, R. L., 1993, "Simultaneous Design of Active Vibration Control and Passive Viscous Damping," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, pp. 654~661.
- (7) Slater, G. L., and McLaren, M. D., 1993, "Disturbance Model for Control/Structure Optimization with Full State Feedback," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, pp. 523~533.
- (8) Kim, C. D., and Jeong, W. B., 1994, "Simultaneous Optimization of Structure and Control Systems for Vibration Control of Flexible Beams," *Transactions of the KSME*, Vol. 18, No. 12, pp. 3127~3135.
- (9) 大日方 五郎, 孫 會秀, 2002, "同時最適設計のフルードパワーへの適用," 日本油空圧学会, Vol. 33, pp. 198~204. 解説論文.
- (10) Onoda, J., and Haftka, R. T., 1987, "An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Flexible Spacecraft," *AIAA Journal*, Vol. 25, pp. 1133~1138.
- (11) Kajiwar, I., and Tsujioka, K., and Nagamatsu, A., 1994, "Approach for Simultaneous Optimization of a Structure and Control System," *AIAA Journal*, Vol. 32, pp. 866~873.
- (12) 藤岡・岩崎, 1997, 計測と制御, Vol. 36, No. 11, pp. 762~767.
- (13) Kleinman, D. L., 1968, "On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 13, pp. 114~115.
- (14) Masubuchi, I., and Kamitane, Y., Ohara, A., and Suda, N., 1997, "H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach," *Automatica*, Vol. 33, No. 4, pp. 669~673.
- (15) Takaba, K., 1998, "Robust H² Control of Descriptor System with Time-Varying Uncertainty," *International Journal of Control*, Vol. 71, No. 4, pp. 559~579.
- (16) 岩崎 徹也, LMI と制御, 昭晃堂.
- (17) 下村 卓, 玉越 隆行, 藤井 隆雄, 2000, "LMI 非共通解による多目的制御系設計—反復計算による方法—," 計測自動制御學會論文集, Vol. 36, No. 1, pp. 1~8.
- (18) 孫 會秀, 大日方 五郎, 土岐 仁, 平元 和彦, 2002, "解析的アプローチに基づく構造系と制御系の同時最適化(DVDFB 制御則の場合)," 日本機械學會論文集(C編), Vol. 68, pp. 1728~1734.
- (19) 木澤 悟, 大日方 五郎, 土岐 仁, 1997, "コンタクト形磁気ヘッドシステムの統合化設計 (コンタクト力制御のための構造と制御の同時最適化)," 日本機械學會論文集(C編), Vol. 63, No. 615, pp. 3941~3947.
- (20) Gahinet, P., and Apkarian, P., 1994, "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. 421~448.
- (21) Zhou, K., Doyle, J., and Glover, K., 1996, *Robust Control*, John Wiley & Sons.
- (22) 児玉・須田, システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御學會.
- (23) Takaba, K., Morihira, N., and Katayama, T., 1995, "A Generalized Lyapunov Theorem for Descriptor System," *System Control Letters*, Vol. 24, pp. 49~51.

부 록

본 연구에서 사용하는 Schur 정리(Schur Complement)와 선형분수변환(Linear Fractional Transformation : LFT), 그리고 양반정행렬(Positive Semi-Definite Matrix: PSDM, 이하 PSD 행렬이라 함)에 관해서 기술해 둔다.

[정리 4]⁽²⁰⁾ Schur 정리: 이하의 부등식은 같은 값이다.

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z^T & \Theta \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \Theta > 0, X - Z\Theta^{-1}Z^T > 0 \quad (A)$$

[정의 1]⁽²¹⁾ 선형분수변환(LFT): 분할한 행렬 S

$$S = \left. \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)} \right\} \quad (B)$$

$$\Sigma_f \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n_2}, \Sigma_u \in \mathfrak{R}^{n_1 \times n_1}$$

에 관해서 $(I - S_{22}\Sigma_f)^{-1}$ 와 $(I - S_{11}\Sigma_u)^{-1}$ 가 정칙일 때, 행렬 $\Sigma_f \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n_2}$ 와 행렬 $\Sigma_u \in \mathfrak{R}^{n_1 \times n_1}$ 에 관한 하 LFT 와 상 LFT 는 각각, 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} F_f(S, \Sigma_f) &= S_{11} + S_{12}\Sigma_f(I - S_{22}\Sigma_f)^{-1}S_{21} \\ F_u(S, \Sigma_u) &= S_{22} + S_{21}\Sigma_u(I - S_{11}\Sigma_u)^{-1}S_{12} \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

여기에서 F_f 는 하 LFT, F_u 는 상 LFT 이다.

[정리 5]⁽²²⁾ PSD 행렬: 행렬 $\Omega \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 가 주어졌을 때, 실 대칭 행렬은 PSD 행렬($\Xi \geq 0$)이며, 역으로

실 대칭행렬 Ω 가 PSD 이면, 항상 $\text{rank}(\Omega) = m$ 인 행렬 Ω 를 사용해서 $\Xi := \Omega^T \Omega$ 로 표현할 수 있다.

[정리 6] $M > 0$ 이며, 식 (3)~식 (5)의 설계변수 표현이 성립하면, 식 (13) 중의 $(I + \Sigma_p B_{ae})$ 는 항상 정칙이다.

(증명) $(I + \Sigma_p B_{ae})$ 가 정칙이기 위한 필요 충분 조건은, 식 (9)과 식 (11)에서 $\det(I_{ne} + \Sigma_e C_e \tilde{B}_e) \neq 0$ 를 만족하는 것이다. 여기서,

$$\left. \begin{aligned} \det(I_{ne} + \Sigma_e C_e \tilde{B}_e) &= \det(I_{2n} + \tilde{B}_e \Sigma_e C_e) \\ &= \det\{E_0^{-1}(E_0 + B_e \Sigma_e C_e)\} \\ &= \det(E_0^{-1}) \det(E) \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

이다. 또 가정으로부터 질량은 $M > 0$ 이므로, $\text{rank}(E_0^{-1}) = \text{rank}(E) = 2n$ 를 만족한다. 따라서,

$\det(I_{ne} + \Sigma_e C_e \tilde{B}_e) \neq 0$ 를 만족하며, $(I + \Sigma_p B_{ae})$ 는 정칙이 된다.

[정의 2]⁽²³⁾ $w(t) = 0$ 로 한 식 (15)에 있어서 (E_{cl}, A_{cl}) 가 정칙($\det(sE_{cl} - A_{cl}) \neq 0$), 그리고 임펄스 모드 및 불안정한 지수모드를 가지지 않을 때, (E_{cl}, A_{cl}) 는 안정이라 한다.