□ 研 究 論 文 □

韓 國 國 防 經 營 分 析 學 會 誌
제 29 권, 제 1 호, 2003. 6. 30.

적흑게임에서 p>1/2인 경우의 최적전략 (The Optimum Strategy When p>1/2 in Red & black)

석 영 우*, 안 철 환**

Abstract

In a game called red and black, you can stake any amount s in your possession. Suppose your goal is 1 and your current fortune is f, with $0 < f < 1$. You win back your stake and as much more with probability p and lose your stake with probability, $q = 1 - p$. Ahn(2000) considered optimum strategy for this game with the value of p greater than $\frac{1}{2}$ where the player has the advantage over the house. The optimum strategy at any f when $p > \frac{1}{2}$ is to play timidly, which is to bet a small amount each time. In this paper we perform the simulation study to show that the Timin strategy is optimum.

(keyword : Optimum Strategy , Simulation)

* Professor, Department of Applied Mathematics, Sejong University, Seoul 143-747, Korea

** Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Sejong University, Seoul 143-747, Korea

1. 서 론

적흑(Red & black)게임에서, 게임자는 그가 가지고 있는 자산 가운데 s 만큼의 배팅을 하게 된다. 가령, 그의 목표가 1 이고 그의 현재 자산의 크기가 f 라고 하자 (여기서, $0 < f < 1$). 매번 게임 할 때마다 그가 이길 확률은 p 이고, 질 확률은 $q(=1-p)$ 이다. 이 문제는 Coolidge (1909)에 의해 처음 제시되었는데 $p < \frac{1}{2}$ 일때의 최적전략은 Dubins 와 Savage (1965)에 의해서 제안되었다. $p > \frac{1}{2}$인 경우는 $0 < \alpha < 1$ 일 때, 충분히 작은 α에 대하여 $f * \alpha$를 배팅하는 전략이 최적전략이라는 것을 보였다 (Ahn, 2000). 임의의 α 값을 가질 때의 전략을 Timid 전략이라 하고, 가능한 대안 Timid전략 중에서 상대적 최소(Relative Minimum) 배팅을 하는 전략을 Timin전략이라고 하자. 이 논문에서는 시뮬레이션을 통하여 Timin 전략이 최적전략이라는 것을 보이기로 한다.

2. 최적 전략

게임에서의 일반적인 전략은 게임자는 자기가 보유하고 있는 총 자산의 일부를 배팅으로 거는 것이다. $p < \frac{1}{2}$ 일 경우, 이 전략은 결국 파산에 이르게 할 것이라는 것을 쉽게 계산으로 확인할 수 있다. $f = .6$이고 $p = .3$인 경우를 고려해 보자. 만일 $f * \alpha$ = 0.01씩 배팅을 한다고 하면 최소한 60회의 게임은 가능하게 된다. 배팅 0.01을 1이라고 하면 현재자산은 60에 해당되며 목표인 1은 100에 해당된다고 할 수 있다. 겜블러의 파산확률의 계산(Parzen, 1962, p.233)에 의하면 현재자산 60을 가진 게임자가 파산에 이르게 될 확률은 다음과 같이 쓰여질 수 있다. 즉 $f = K = 60$이고 $N = 100$일 때 f가 0 으로 가게 될 확률은 다음과 같다.

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{K} - \left(\frac{q}{p}\right)^{N}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{N}} = \frac{\left(\frac{0.7}{0.3}\right)^{60} - \left(\frac{0.7}{0.3}\right)^{100}}{1 - \left(\frac{0.7}{0.3}\right)^{100}} = \frac{\left(\frac{0.7}{0.3}\right)^{-40} - 1}{\left(\frac{0.7}{0.3}\right)^{-100} - 1} \approx 1.$$

이와 같이 $p < \frac{1}{2}$인 경우에는 매 게임마다 게임자가 불리하므로 결국 파산에 이르게 된다. 이제 $p > \frac{1}{2}$인 경우를 고려해 보자. $p > \frac{1}{2}$인 경우에는 매 게임마다 게임자가 유리하므로 무리하게 자신이 할 수 있는 최대의 배팅을 할 필요는 없을 것이다. 이제 자기가 보유하고 있는 총 자산의 일부를 배팅으로 거는 전략을 고려해 보자. 앞에서도 언급되었듯이 우리는 이 전략을 Timid전략이라고 정의한다. 즉, Timid전략은 $f * \alpha$ (α는 0과 1 사이의 실수)를 배팅으로 거는 전략이다. 이 논문에서는 가능한 대안 Timid전략 중에서 상대적 최소 배팅을 하는 전략을 Timin전략이라고 정의하기로 한다. 여기서 α 는 충분히 작은 값을 갖는 경우이다. 목표가 1일 경우 Timin전략의 배팅 함수, $S(f)$는 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$S(f) = \min[\, f*\alpha, 1 - f*\alpha].$$

<정리 2.1> $p > \frac{1}{2}$ 인 경우, Timin전략이 최적 전략이다. 즉 현재자산을 f 라고 할 때 $0 < \alpha < 1$을 만족하는 충분히 작은 α 에 대하여 p{ $f=1$ }= 1이 된다.

증명: 현재자산 f 에서 이길 확률 p 로 $f + f*\alpha = f(1+\alpha)$에 이르게 되며, 질 확률 $q(=1-p)$로 $f - f*\alpha = f(1-\alpha)$에 이르게 된다. z_i 를 i 번째 게임에서, 확률 p 로 $(1+\alpha)$의 값을 취하며 확률 q 로 $(1-\alpha)$의 값을 취하는 확률변수라고 정의하자. 그러면 자산 f 는 다음과 같이 변화하게 된다.

$$f \to f \cdot z_1 \to f \cdot z_1 \cdot z_2 \to \cdot \cdot \cdot$$
$$\to f \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n$$

$f \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n$ 을 f_n 으로 표시하자. 그러면 $\log f_n = \log f + \log z_1 + \log z_2 + \cdot \cdot \cdot + \log z_n$ 이 된다.

$\log z$ 의 기대치를 구하면, $E[\log z] = p \cdot \log(1+\alpha) + q \cdot \log(1-\alpha)$가 된다.
이제 $E[\log z]$는 α의 함수가 되며,
이를 $g(\alpha)$ 로 두자. 그러면 $g(0) = 0$ 이고
$g'(\alpha) = p/(1+\alpha) - q/(1-\alpha)$이며
$g'(0) = p - q > 0$ 이 된다.

따라서, 충분히 작은 $\alpha(>0)$ 에 대하여 $g(\alpha) > 0$ 이 된다. 또 $\log f_n$ 이 거의 확실하게 무한대로 가는 것과 같이 f_n 도 무한대로 가게 된다. 이는 f 가 1에 도달할 확률이 1이 됨을 의미하며 곧 p{ $f=1$ }= 1이 성립된다.

3. 시뮬레이션

이 절에서는 Timin전략(현재자산의 일부분, 즉 $f * \alpha$를 배팅하는 전략, 여기서 α는 1< α<1 이고 상대적 최소이며 본 연구에서는 α=.05임)이 다른 Timid전략(f* α를 배팅하며 α가 상대적 최소가 아님)을 포함한 Bold전략(현재자산과 [목표치-현재자산]중 최소치, 즉 min[f, 1- f]를 배팅하는 전략)등 대안전략에 대하여 최적전략(Optimum Strategy)이 됨을 보인 정리2.1에 관하여 시뮬레이션 결과자료를 경험적 자료(Empirical Data)로 활용하여 그 타당성을 입증해 보이고자 한다. 본 시뮬레이션에서는 FORTRAN 77 언어를 사용하였으며 시뮬레이션에서 사용된 난수(Random Number) 생성을 위해서는 내장되어 있는 써브프로그램인 SRAND (TIME())를 Call한 후 RAND함수를 이용하여 생성하였다.

시뮬레이션 흐름의 개요를 살펴보면 목표(Goal)의 값이 0 또는 1을 가질 때 게임이 끝나는 것으로 설정하였으며 현재자산(Fortune)을 f, 이길확률(Win Probability)을 p, 부분비율을 α, f 의 일부분 bet을 s라 하고 시뮬레이션을 위한 환경은 다음과 같이 설정하였다.

f = 0.6,

p = .59, .57, .55, .53, .51,

s = $f * \alpha$ (α = .05, .06, .07, .08, .09, .10, .15, .20, .25, .30).

Timin전략(α=0.05 ; 상대적 최소), Timid 전략(α=0.1 ,0.2, 0.3)과 Bold전략 ($f=0.6$; $p=.59$)을 택하여 처리조합 (Treatment Combination), ($f=0.6$; $p=.59$; α) 에서 30회의 Run(Run당 1000회의 반복게임에서 목표치가 1에 도달한 회수의 누계)을 실시하여 다음과 같은 <표 3.>1의 략 사용시 첫 2게임의 시뮬레이션 결과를 부록 A에 수록하였다.

<표 3.1> 전략별 (f ; p ; α)에서 30회 Run의 시뮬레이션 결과

Timin Strategy (f=0.6 ;p=.59; α=.05)	Timid Strategy(TS.1) (f=0.6 ;p=.59 ; α=0.1)	Timid Strategy(TS.2) (f=0.6 ; p=.59 ; α=0.2)	Timid Strategy(TS.3) (f=0.6 ; p=.59 ; α=0.3)	Bold Strategy (f=0.6 ; p=.59)
1000 999 998	981 976 978	900 879 875		
1000 999 999	976 978 979	888 876 885		
1000 999 999	974 982 974	875 893 900		
999 999 998	988 976 974	865 895 878		
999 999 1000	980 972 977	899 875 892		
1000 1000 1000	967 978 973	899 896 876		
1000 1000 1000	979 976 976	898 862 876		
998 999 999	971 971 982	872 876 891		
998 1000 999	983 980 971	884 893 850		
1000 999 999	976 979 980	879 881 885		
mean(Timin)=999.3 var(Timin) = 0.7	mean(TS.1)=976.9 var(TS.1) = 4.3	mean(TS.2)=883.1 var(TS.2) = 12.4	mean(TS.3)=855.6 var(TS.3) = 8.9	mean(Bold)=715.7 var(Bold) = 15.5

본 시뮬레이션 연구에서 일반성을 확보하기 위하여 p=5 수준과 Timin전략(α=.05), Timid전략 (α=9 수준) 및 Bold전략과의 처리조합 55개를 택하였으며 각 처리조합에서 Timin전략과 다른 대안전략(Timid전략이나 Bold전략)을 비교하기 위하여 30회의 Run(5개 처리조합에서의 시뮬레이션 결과인 <표 3.1>참조)을 실시하여 각 전략의 표본평균인 mean(Timin), mean(Timid), mean(Bold)와 표본분산인 var(Timin), var(Timid), var(Bold)를 구하여 55개 처리조합에서의 시뮬레이션 결과자료를 종합 정리하여 <표 3.2>를 얻었다.

< 표 3.2 > 시뮬레이션 결과자료

f = 0.6 ; 처리조합 (f ; p ; α)에서 각 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .59	p =.57	p =.55	p =.53	p =.51	Average
Timin (α = .05)	999.3 (0.7)	996.0 (2.3)	983.6 (3.9)	924.4 (10.0)	739.1 (12.2)	928.48 (5.82)
Timid (α = .06)	998.0 (1.3)	991.8 (2.7)	969.8 (6.3)	902.2 (9.3)	734.5 (14.6)	919.26 (6.84)
Timid (α = .07)	996.1 (1.9)	986.1 (4.7)	956.7 (5.2)	879.8 (10.0)	718.2 (15.5)	907.38 (7.46)
Timid (α = .08)	991.4 (3.4)	977.0 (4.1)	938.1 (8.1)	855.2 (12.4)	710.1 (16.2)	894.36 (8.84)
Timid (α = .09)	983.5 (4.0)	959.8 (5.3)	911.0 (7.3)	825.0 (11.9)	686.0 (14.3)	873.06 (8.56)
Timid (α = 0.1)	976.9 (4.3)	949.1 (7.1)	894.6 (10.5)	806.7 (12.2)	678.4 (15.0)	861.40 (9.82)
Timid (α = 0.15)	913.3 (8.5)	867.9 (10.8)	807.8 (13.0)	730.6 (17.3)	630.2 (18.0)	789.96 (13.52)
Timid (α = 0.2)	883.1 (12.4)	835.8 (9.8)	784.6 (9.6)	718.6 (12.8)	637.4 (13.9)	771.90 (11.70)
Timid (α = 0.25)	849.1 (12.1)	805.1 (15.8)	754.0 (15.1)	699.8 (13.2)	638.5 (11.7)	749.30 (13.58)
Timid (α = 0.3)	855.6 (8.9)	819.7 (13.0)	774.9 (13.1)	726.6 (14.4)	663.3 (13.1)	768.02 (12.50)
Bold	715.7 (15.5)	685.9 (15.5)	662.3 (14.2)	644.2 (12.9)	610.3 (13.2)	663.68 (14.26)

<표3.2>의 시뮬레이션 결과자료를 한 Replication 실험이라 하자. 이와 동일한 방법으로 4회의 Replication 실험을 추가 실시하여 각각의 시뮬레이션 결과자료를 얻었으나 추가 4회에 대한 결과자료의 제시는 생략하기로 한다.

Timin전략과 대안전략을 비교 분석하기 위하여 <표3.2>의 시뮬레이션 결과 통계자료를 분석(SAS 6.12 사용)한 결과는 다음과 같다.

1) 한 Replication실험 결과자료인 <표 3.2>를 살펴보자. Timin전략의 표본평균을 p-수준(p=.51, .53, .55, .57, .59)별로 다른 대안전략 (Timid전략이나 Bold전략)의 표본평균과 비교해 볼 때 모두

크게 나타났다. 또한, Timin전략의 표본평균을 임의의 다른 대안전략과 쌍별로 p-5 수준에 걸친 전체 표본평균을 비교해 볼 때도 Timin전략의 표본평균이 크게 나타났으므로 이는 Timin전략이 다른 Timid전략이나 Bold전략에 비해 우위에 있음을 보여주고 있다.(<표 3.2>의 Average열 참조)

2) Timin전략과 Timid(α=0.1)전략간의 모평균차에 관한 Paired Comparison t-검정에서는 유의확률이 0.0153으로 두 전략간에 유의차가 있음을 보여주고 있으며, 또 Timid(α=0.1)전략과 Timid (=.15)전략간의 t-검정에서는 유의확률이 0.0005로 유의차가 매우 있음을 보여주고 있다. 이는 전이율에 의거 Timin전략이 다른 대안전략에 비해 우수한 것을 보여주는 결과라고 하겠다.

3)<표 3.2>를 포함하여 5회의 Replication실험을 통하여 각각 p와 α의 55개 처리조합에서 mean(Timin)>mean(Timid)이거나 mean(Timin) >mean(Bold)로 나타났다. 이는 Timin전략과 대안전략(Timid전략이나 Bold전략)과의 모든 처리조합에서의 쌍대비교에서, Timin전략이 Timid전략이나 Bold전략보다 우수한 것을 보여주는 결과라고 하겠다.

4. 결 론

이 논문에서는 $p > \frac{1}{2}$ 일 때 즉 게임자가 유리한 경우, 시뮬레이션을 통하여 Timin전략이 최적전략이라는 것을 보였다. 이번 연구의 시뮬레이션에서는 게임자가 0.6 의 초기자산을 가지고 시작하는 것으로 하였으나 이를 좀더 낮은 숫자로 하여 목표에 도달할 때까지의 시간을 비교해 보는 것도 흥미있을 것이며 이산형의 경우, 최적전략에 관한 시뮬레이션 연구 또한 바람직하다.

참고문헌

[1] Ahn, Chul H. (2000). Optimum Strategies in Red and Black, The Korean Communications in Statistics, Vol 7, No 2. 2000, pp. 475-480.

[2] Coolidge, J. L. (1908 - 1909). The gambler's ruin, Annals of Mathematics 10, 181 -192.

[3] Dubins and Savage (1965). How to gamble if you must, Mcgraw-Hill, New York.

[4] Karlin, S. and Taylor, H. (1975). A first course in stochastic processes, The 2nd Ed., Academic Press. 92-94

[5] Parzen, E. (1962). Stochastic processes, Holden-Day. p.233

부록 A : Timin전략과 Bold전략 사용시 첫 2게임의 뮬레이션 결과

f : 자산의 크기, S : 일부분 bet rand : 난수 cf : 현재자산

Game #1 : In a Case of **Timin** Strategy(f=0.6 ,p=.59, α=.05)

f	S	rand	cf
0.600	0.030	0.893	0.570
0.570	0.030	0.031	0.600
0.600	0.030	0.562	0.630
0.630	0.030	0.990	0.600
0.630	0.030	0.052	0.660
0.660	0.030	0.057	0.690
0.690	0.030	0.328	0.720
0.720	0.030	0.487	0.750
0.750	0.030	0.033	0.780
0.780	0.030	0.237	0.810
0.810	0.030	0.245	0.840
0.840	0.030	0.883	0.810
0.810	0.030	0.659	0.780
0.780	0.030	0.052	0.810
0.810	0.030	0.872	0.780
0.780	0.030	0.445	0.810
0.810	0.030	0.994	0.78
0.780	0.030	0.878	0.750
0.750	0.030	0.510	0.780
0.780	0.030	0.137	0.810
0.810	0.030	0.473	0.840
0.840	0.030	0.931	0.810
0.810	0.030	0.062	0.840
0.840	0.030	0.842	0.810
0.810	0.030	0.118	0.840
0.840	0.030	0.025	0.870
0.870	0.030	0.487	0.900
0.900	0.030	0.158	0.930
0.930	0.030	0.507	0.960
0.960	0.030	0.706	0.930
0.930	0.030	0.697	0.900
0.900	0.030	0.866	0.870
0.870	0.030	0.348	0.900
0.900	0.030	0.793	0.870
0.870	0.030	0.044	0.900
0.900	0.030	0.766	0.870
0.870	0.030	0.313	0.900
0.900	0.030	0.608	0.870
0.870	0.030	0.702	0.840
0.840	0.030	0.523	0.870
0.870	0.030	0.247	0.900
0.900	0.030	0.920	0.870
0.870	0.030	0.048	0.900
0.900	0.030	0.937	0.870
0.870	0.030	0.386	0.900
0.900	0.030	0.897	0.870
0.870	0.030	0.409	0.900
0.900	0.030	0.352	0.930
0.930	0.030	0.422	0.960
0.960	0.030	0.539	0.990
0.990	0.010	0.963	0.980
0.980	**0.020**	**0.241**	**1.000** *

Game #1 : In a Case of **Bold** Strategy (f = 0.6, p = .59)

0.600	**0.400**	**0.524**	**1.000** *

Game #2 : In a Case of **Timin** Strategy(f=0.6, p=.59, α=.05)

f	S	rand	cf
0.600	0.030	0.609	0.570
0.570	0.030	0.824	0.540
0.540	0.030	0.269	0.570
0.600	0.030	0.494	0.630
0.630	0.030	0.022	0.660
0.660	0.030	0.064	0.690
0.690	0.030	0.466	0.720
0.720	0.030	0.165	0.750
0.750	0.030	0.555	0.780
0.780	0.030	0.646	0.750
0.750	0.030	0.312	0.780
0.780	0.030	0.620	0.750
0.750	0.030	0.987	0.720
0.720	0.030	0.754	0.690
0.690	0.030	0.538	0.720
0.720	0.030	0.550	0.750
0.750	0.030	0.143	0.780
0.780	0.030	0.667	0.750
0.750	0.030	0.766	0.720
0.720	0.030	0.170	0.750
0.750	0.030	0.359	0.780
0.780	0.030	0.437	0.810
0.810	0.030	0.396	0.840
0.840	0.030	0.188	0.870
0.870	0.030	0.738	0.840
0.840	0.030	0.495	0.870
0.870	0.030	0.081	0.900
0.900	0.030	0.779	0.870
0.870	0.030	0.994	0.840
0.840	0.030	0.333	0.870
0.870	0.030	0.687	0.840
0.840	0.030	0.645	0.810
0.810	0.030	0.588	0.840
0.840	0.030	0.107	0.870
0.870	0.030	0.591	0.840
0.840	0.030	0.540	0.870
0.870	0.030	0.603	0.840
0.840	0.030	0.977	0.810
0.810	0.030	0.573	0.840
0.840	0.030	0.122	0.870
0.870	0.030	0.124	0.900
0.900	0.030	0.406	0.930
0.930	0.030	0.416	0.960
0.960	0.030	0.969	0.930
0.930	0.030	0.788	0.900
0.900	0.030	0.068	0.930
0.930	0.030	0.443	0.960
0.960	0.030	0.134	0.990
0.990	0.010	0.594	0.980
0.980	0.020	0.359	1.000 *

Game #2 : In a Case of **Bold** Strategy (f = 0.6, p =.59)

0.600	**0.400**	**0.579**	**1.000** *