

## LES 에서 중심 및 상류 컴팩트 차분기법의 적합성에 관하여 (III) - 동적 오차 해석 -

박노마\*, 유정열†, 최해천\*\*

(2003 년 2 월 25 일 접수, 2003 년 5 월 2 일 심사완료)

### On the Suitability of Centered and Upwind-Biased Compact Difference Schemes for Large Eddy Simulations (III) - Dynamic Error Analysis -

Noma Park, Jung Yul Yoo and Haecheon Choi

**Key Words :** Compact Difference Scheme(컴팩트 차분기법), Large Eddy Simulation(큰 에디모사), Finite Differencing Error(유한 차분오차), Aliasing Error(파수 중첩오차)

#### Abstract

The suitability of high-order accurate, centered and upwind-biased compact difference schemes for large eddy simulation is evaluated by a dynamic analysis. Large eddy simulation of isotropic turbulence is performed with various dissipative and non-dissipative schemes to investigate the effect of numerical dissipation on the resolved solutions. It is shown by the present dynamic analysis that upwind schemes reduce the aliasing error and increase the finite differencing error. The existence of optimal upwind scheme that minimizes total numerical error is verified. It is also shown that the finite differencing error from numerical dissipation is the leading source of numerical errors by upwind schemes. Simulations of a turbulent channel flow are conducted to show the existence of the optimal upwind scheme.

#### 1. 서 론

저자들의 이전 연구<sup>(1)</sup>(이하 Part II)에서 Fedioun 등<sup>(2)</sup>의 방법을 이용해 Ghosal<sup>(3)</sup>의 연구를 이산 파수벡터 공간으로 투영하여 큰 에디모사(large eddy simulation, 이하 LES)에 있어 상류차분의 이산화 오차가 해에 미치는 영향을 연구하였다. 그 결과 이산화기법에 상관없이 파수중첩오차(aliasing error)가 지배적인 오차 요인이며, 모든 파수에서 아격자력(subgrid-scale force)의 크기를 압도함을 보였다. 특히, 상류차분의 경우 내재된 수치확산이 커질수록 유한 차분오차(finite differencing error) 뿐만 아니라 파수 중첩오차가 커짐을 보인 바 있다. 이

결과는 수치확산은 모든 면에서 LES 해에 부정적인 영향을 미치며, 어떠한 상류차분기법도 이에 대응하는 중심차분에 비해 열등함을 의미한다.

그러나, 상류차분으로 인한 파수중첩오차의 증가는 잘 알려진 수치 실험 결과 및 상류차분의 특성에 관한 일반적인 믿음에 배치되는 것이며, 따라서 이는 Part II 에서 적용한 해석 방법론 상의 한계에 기인하는 결과라고 생각된다.

등방성 균질유동을 가정하면 유한차분기법으로 근사되고, 절단파수  $k_c$  에서 필터링된 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_j(\mathbf{k}) = -\nu k^2 \hat{u}_j(\mathbf{k}) + F_j^<(\mathbf{k} | k_c) + F_j^>(\mathbf{k} | k_c) + E_j^{FD}(\mathbf{k}) + E_j^{alias}(\mathbf{k}) \quad (1)$$

여기서  $\hat{u}_j(\mathbf{k}) = G(\mathbf{k} | k_c) \hat{u}_j(\mathbf{k})$  이고  $G(\mathbf{k} | k_c)$  는 Part II 에서 정의된 푸리에 절단 필터의 전달함수이다.

\* 서울대학교 기계항공공학부

† 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부  
E-mail : jyyoo@plaza.snu.ac.kr

TEL : (02)880-7112 FAX : (02)883-0179

\*\* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

$F_j^<(k|k_c)$ 와  $F_j^>(k|k_c)$ 는 각각 해상된 비선형항과 절단파수 밖의 파수에서 정의된 비선형항이 해상된 파수에 영향을 미치는 아격자력을 의미하며,  $E_j^{FD}(k)$ 와  $E_j^{alias}(k)$ 는 각각 유한 차분 및 파수 중첩 오차를 의미한다. 이 항들의 정확한 정의는 Part II를 참조하라. Part II에서 수행된 오차 해석은 주어진 순간에 식 (1)의 우변항들을 스퀴라 파수  $k$ 에 대한 파워 스펙트럼을 통해 그 크기들을 비교한 정적 오차해석이다. 이 방법은 해의 시간 변화율을 결정하는 항들의 크기를 직관적으로 비교할 수 있는 장점이 있다.

그러나, 이 방법을 통해 구한 수치오차의 파워 스펙트럼은 크게 두 가지 측면에서 실제 수치오차를 재현한다고 보기 어렵다. 첫째, 시간전진의 효과를 고려하지 않음으로써 각 항들간의 동적인 상호작용과 이로 인한 해의 변화가 전혀 반영되지 않는다. 둘째, 실제 오차는 복소 벡터함수로서 각 파수의 해의 크기와 위상 모두에 영향을 미치지만 실수 스퀴라함수인 파워 스펙트럼은 이에 관한 아무런 정보를 주지 않는다. 따라서, 이러한 오차들의 결과로 해가 어떤 영향을 받는 지 예측하기 어렵다.

본 연구에서는 감쇄하는 등방성 난류에 대한 실제 수치해석을 통해 이산화오차에 대한 동적인 해석을 수행하고자 한다. 이 때 동적 오차는 오차항 자체의 크기로서가 아니라 오차요인이 있는 경우와 제거된 경우의 해의 차로써 정의된다. 따라서 해상된 영역의 해, 오차항 및 아격자 모델간의 상호작용이 모두 동적 오차에 포함된다. 이 경우에 있어 유한 차분 및 파수 중첩오차의 거동을 정량적으로 기술하고자 한다. 또한 상류차분기법을 난류유동의 LES에 적용할 때 발생하는 다양한 수치소산의 원인을 규명하였다. 또, 중심차분기법의 경우 저자들의 이전 연구<sup>(1,4)</sup>와 같이 비선형항의 형태가 이산화오차에 미치는 영향을 동적 해석을 통해 연구하였다.

## 2. 수치해석 기법

### 2.1 유한 차분기법

본 연구에서는 박노마 등<sup>(4)</sup>(이하 Part I)에서 정의된 컴팩트 상류차분기법<sup>(5)</sup>(이하 CUD)을 기본 차분기법으로 하였다. CUD는 Part I에서 이미 언급한 바와 같이 자유계수  $\alpha$ 의 값을 통해 수치소산량을 조절할 수 있는 장점을 가진다. 따라서 CUD는 여러 상류편향 차분기법에 대한 모델이 된다.

그러나 충격파 등과 같이 불연속점이 있는 유동장 해석을 위한 비선형 상류차분은 CUD와 같은 선형 차분으로 근사할 수 없다. 따라서 선형차분과의 비교를 위해 대류항의 차분을 다음과 같이 근사하는 비선형 유속 재구성기법(flux reconstruction scheme)을 고려한다.

$$\frac{\delta f(u)}{\delta x} = \frac{1}{h}(\tilde{f}_{i+1/2} - \tilde{f}_{i-1/2}) \quad (2)$$

이때  $h$ 는 격자 간격이며  $\tilde{f}_{i+1/2} = \tilde{f}_{i+1/2}^+ + \tilde{f}_{i+1/2}^-$ 은 엇갈린 격자점에서의 수치유속(numerical flux)으로서 TVD-MUSCL<sup>(6)</sup>, ENO<sup>(7)</sup> 및 WENO<sup>(8,9)</sup> 등 다양한 재구성기법이 존재하며, 본 연구에서는 이 중 5차 정확도의 WENO3<sup>(9)</sup>를 적용하였다. WENO3에서 수치유속은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2}^+ = & \omega_0^+ \left( \frac{1}{3} f_{i-2}^+ - \frac{7}{6} f_{i-1}^+ + \frac{11}{6} f_i^+ \right) \\ & + \omega_1^+ \left( -\frac{1}{6} f_{i-1}^+ + \frac{5}{6} f_i^+ + \frac{1}{3} f_{i+1}^+ \right) \\ & + \omega_2^+ \left( \frac{1}{3} f_i^+ + \frac{5}{6} f_{i+1}^+ - \frac{5}{6} f_{i+2}^+ \right) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \omega_k^+ = & \frac{\alpha_k^+}{\sum_{k=0}^2 \alpha_k^+}, \quad k=0,1,2 \\ \alpha_k^+ = & C_k (\epsilon + IS_k^+)^{-2} \end{aligned} \quad (4)$$

로 주어진다. 이 때  $\epsilon = 10^{-6}$ 이고  $C_k$ 는  $C_0 = 1/10$ ,  $C_1 = 6/10$  및  $C_2 = 3/10$ 으로 주어지는 최적 가중치이다.  $IS_k^+$ 는 해의 '완만도 지시자(smoothness indicator)'로서 다양한 방법으로 구성할 수 있으나, 여기서는 다음 식<sup>(9)</sup>을 이용한다.

$$\begin{aligned} IS_0^+ = & \frac{13}{12} (f_{i-2}^+ - 2f_{i-1}^+ + f_i^+)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-2}^+ - 4f_{i-1}^+ + 3f_i^+)^2 \\ IS_1^+ = & \frac{13}{12} (f_{i-1}^+ - 2f_i^+ + f_{i+1}^+)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-1}^+ - f_{i+1}^+)^2 \\ IS_2^+ = & \frac{13}{12} (f_i^+ - 2f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+)^2 + \frac{1}{4} (3f_i^+ - 4f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

마찬가지로  $\tilde{f}_{i+1/2}^-$ 는 식 (3)-(5)에 대칭인 기법을 적용해 구성한다. 또 CUD와 WENO3에 대해 Part I에서 언급한 것과 같이 국소 Lax-Friedrichs 유속 벡터 분리법이 적용되었다. 비압축성 등방성 유동인 경우 이는 Steger-Warming의 유속벡터 분리<sup>(10)</sup>와 일치한다.

한편, CUD 의  $\alpha = 0$  인 경우, 즉 4 차의 중심 콤팩트 차분<sup>(11)</sup>(이하 COM4)의 경우 보존형 (divergence), 대류형 (advective), 엇대칭형 (skew-symmetric) 대류항이 고려되었다. Part II 와 마찬가지로 편이를 위해 각각의 형태는 차분기법 뒤에  $-div, -adv$  또는  $-sk$  를 붙여 구분하기로 한다.

2.1.1 등방성 난류유동: 실험 및 수치기법

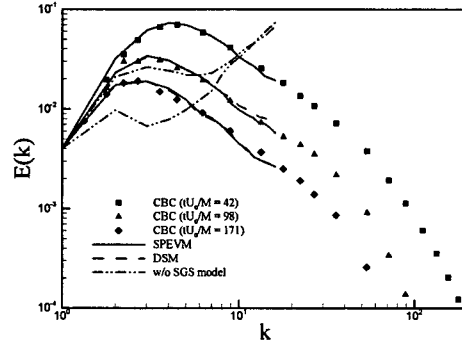
동적 해석을 위해 Comte-Bellot 과 Corrsin<sup>(12)</sup>(이하 CBC)의 등방성 난류 실험을 수치적으로 모사하였다. CBC 는 격자 난류의 하류 세 점에서 에너지 스펙트럼을 측정하였으며, 이는 Taylor 가정을 통해 각각 무차원 시간  $tU_0/M = 42, 98, 171$ 에서의 스펙트럼으로 변환된다. 이 때  $U_0 = 10^3 \text{ cm/s}$  와  $M = 5.08 \text{ cm}$  는 각각 자유류 속도와 격자크기이다. 이 때 Taylor 미세 스케일에 기반한 레이놀즈 수  $Re_\lambda = 71.6 - 60.6$  이다. 수치모사에서는 이 실험을 주기경계를 갖는 정육면체 속의 등방성 난류로 변환하기 위해 특성 속도  $U_{ref} = \sqrt{3U_0^2/2}$  및 길이 단위  $L_{ref} = L/2\pi$ 로 무차원화하였다. 이 때  $\sqrt{U_0^2} = 22.2 \text{ cm/s}$  는  $tU_0/M = 42$  에서의 속도 섭동량이며, 계산 영역  $L = 11M$  으로 주었다.

계산의 초기조건으로 Part II 에서 사용된 Carati 등<sup>(13)</sup>이 제안한 반복계산 방법을 이용하였는 데, 이로써 연속방정식과  $tU_0/M = 42$  에서의 에너지 스펙트럼을 만족하는 실제적인 등방성 난류유동을 생성할 수 있었다. 유한 차분기법을 모사하기 위해 수정과수로 대체된 의사-스펙트럴 기법이 적용되었으며, 모든 계산은  $32^3$  격자에서 수행되었다. 이 격자로  $tU_0/M = 42$  에서의 전체 운동에너지의 60%만을 해상할 수 있다. 따라서 이는 매우 성긴 격자에 해당한다. 비선형항과 점성항의 시간전진에 각각 3 차의 Runge-Kutta 기법과 2 차의 Crank-Nicolson 기법이 적용되었다.

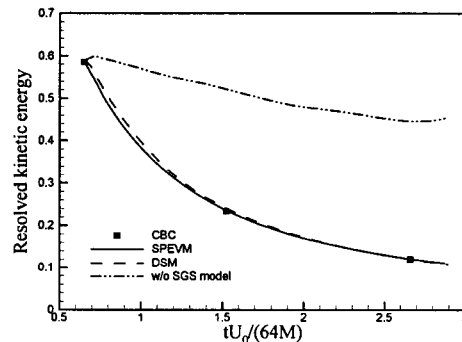
아격자 모델로는 스펙트럴 와점도 모델<sup>(14)</sup> (spectral eddy viscosity model, 이하 SPEVM)과 동점성 계수모델<sup>(15)</sup>(dynamic Smagorinsky model, 이하 DSM)을 적용하였다. 특히 SPEVM은 파수공간에서의 적용이 매우 용이한 특징이 있는 데, 이는 (1)의 아격자력을 다음과 같이 모델링한다.

$$F_i^>(k|k_c) = -v'(k|k_c)k^2\hat{u}_i(k) \quad (6)$$

이때, 스펙트럴 점성계수  $v'(k|k_c)$  는 다음과 같다.



(a) Time evolution of energy spectra



(b) Decay of the resolved kinetic energy

Fig. 1 Results from simulation of the decaying isotropic turbulence with and without SGS model. Computation is performed with the dealiased spectral method

$$v'(k|k_c) = v^{'+}(k|k_c) \left( \frac{E(k_c, t)}{k_c} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

$$v^{'+}(k|k_c) = 0.267 \left( 1 + 34.5e^{-3.03(k_c/k)} \right)$$

여기서  $E(k_c)$  는 절단파수  $k_c$  에서의 에너지 스펙트럼이다. (7)로부터  $E(k_c)$  가 의미있는 값을 갖기 전에는  $v'(k|k_c)$  가 0 임을 알 수 있다. 따라서 난류가 충분히 발달하기 전에는 아격자력에 의한 불필요한 수치 소산이 발생하지 않는다. 이러한 메커니즘은 물리적 공간에서 구현된 DSM의 원리와 매우 유사하다. 한편, SPEVM을 적용한 해석 결과 절단파수 근처에서 과도한 수치소산이 발생하였는 데, 이는 (7)에서 무차원된 점성계수  $v^{'+}(k|k_c)$  가 절단파수 근처에서 급격히 증가하기 때문인 데, 이러한 경향은 다른 연구<sup>(14)</sup>에서도 언급되었다.

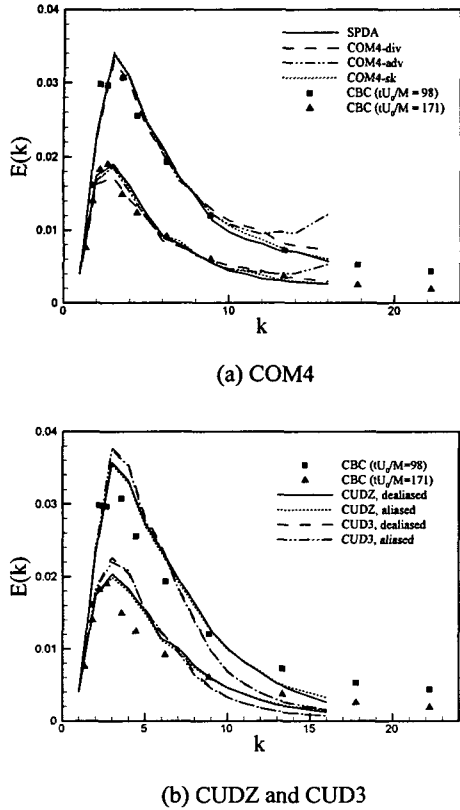


Fig. 2 Time evolution of energy spectra for various CUD with and without aliasing error

수치실험 결과 (7) 대신  $v^{+}(k|k_c) = 0.267$  을 적용함으로써 고주파에서  $E(k) \sim k^{-5/3}$  법칙이 복원됨을 알 수 있었다. 따라서 본 연구의 모든 결과는 이러한 상수 점성계수를 이용해 계산된 결과이다.

### 3. 수치해석 결과

#### 3.1 계산의 검증 및 기준 LES 의 확립

Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)는 각각 3 차원 에너지 스펙트럼과 해상된 운동에너지의 감쇄를 나타낸 것으로, SPEVM, DSM 및 아격자 모델을 적용하지 않은 성근 DNS (coarse DNS)의 결과를 비교하였다. 모든 경우에 3/2-법칙으로 파수중첩오차가 제거된 스펙트럼 기법(이하 SPDA)을 적용하였다. SPEVM 과 DSM의 결과는 모두 실험 결과와 매우 잘 일치한다. 반면, 성근 DNS 결과는 해상되지 않은 고주파 에너지의 축적을 보여주며 따라서 Fig. 1(b)에 나타난 바와 같이 에너지의 감쇄도 예측하지 못한다.

이 결과는  $tU_0/M = 42$  에서의 해상된 에너지 소산을  $\epsilon = 2\nu \int_0^k k^2 E(k) dk$  가 전체 소산율의 2.5%에 불과하므로 대부분의 소산이 아격자응력 모델로부터 주어져야 한다는 점을 상기할 때 당연한 결과이다.

동적 오차를 정의하기 위한 정확한 해로 SPEVM 을 적용한 결과를 선택하였다. 또한 이후의 모든 계산에 SPEVM 을 적용하였다. SPEVM 은 DSM과 거의 같은 결과를 보여주면서도, 파수영역에서의 해석이 용이하며, 훨씬 적은 계산량만을 필요로 하기 때문이다.

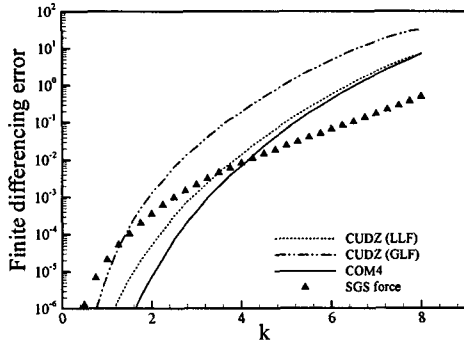
정확한 아격자력을 적용한 Part I과 달리 본 연구에서는 SPEVM을 적용하였으므로 (1)의 오차항에 아격자력의 모델링 오차도 포함되어야 한다. 그러나 같은 아격자 모델을 사용할 경우 다른 이산화기법을 사용한 결과들의 차이는 오직 이산화기법의 오차에 의해서만 발생하기 때문에 이를 특별히 고려하지 않는다.<sup>(1)</sup>

#### 3.2 파수중첩오차의 영향

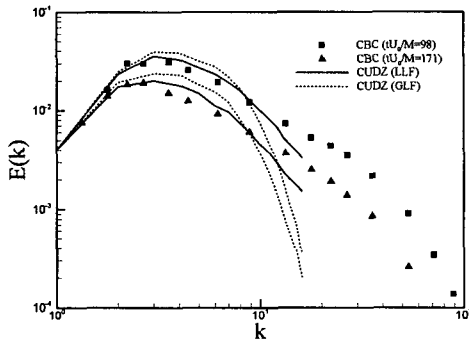
Fig. 2(a)는 파수중첩오차가 제거되지 않은 COM4-div, COM4-adv 및 COM4-sk로 계산된 에너지 스펙트럼을 SPDA의 결과와 함께 나타내었다. Fig. 2(b)는 각각 파수중첩오차가 있는 경우와 제거된 경우의 CUDZ와 CUD3<sup>(4, 16)</sup>로 계산된 스펙트럼을 나타낸 것이다.

Fig. 2(a)에서 COM4-sk가 가장 적은 파수중첩오차를 보이며, SPDA의 결과와 매우 유사함을 볼 수 있다. 이 결과는 정적 오차 해석<sup>(1)</sup> 및 기존 결과들<sup>(17-19)</sup>과 잘 일치한다. 그러나, Fedioun 등<sup>(2)</sup>의 주장과는 달리 COM4-adv의 경우 오히려 COM4-div보다 큰 파수중첩오차를 보임을 알 수 있는데, Part II의 정적 오차해석 및 Blaisdel 등<sup>(17)</sup>의 연구에도 이런 결과가 나타난 바 있다.

그러나, 정적 오차해석의 결과와는 달리, Fig. 2로부터 파수중첩오차의 영향은 Fig. 1에 나타난 아격자 응력의 영향보다 훨씬 작으며 단지 고주파 영역에만 영향을 미침을 알 수 있다. 특히 상류차분의 경우(Fig. 2(b)) 파수중첩오차의 영향이 거의 없음을 알 수 있는데, 이는 정적 오차해석의 결과와 상반된 것이다. 특히, COM4, CUDZ 및 CUD3의 결과의 비교를 통해 수치소산이 커질수록 파수중첩오차가 줄어드는 경향을 확인할 수 있다. 상류차분의 경우 파수중첩오차가 줄어드는 이유에 대해 다음과 같은 설명이 가능하다. 첫째, 수정파수의 실수부와 허수부의 서로 다른 역할에 의한 오차의 상쇄효과를 들 수 있다. 예를 들어 1 차원



(a) Power spectra of finite differencing errors with the von Karman spectrum



(b) 3-D energy spectra

Fig. 3 Effect of flux-vector splitting on finite differencing error

비선형항  $\partial uu / \partial x$  의 차분을 생각하자. 이 때 상류 차분에 의한 파수중첩오차는 다음과 같다.

$$E^{alias}(k) = ik_r \sum_{p+q=k \pm N} \hat{u}(p)\hat{u}(q) - k_i \sum_{p+q=k \pm N} \hat{u}(p)\hat{u}(q) \quad (8)$$

여기서 실수  $k_r$  과  $k_i$  는 각각 수정파수의 실수부 및 허수부를 나타내며  $N$  은 격자수이다. (8)의 두 항은 명백히 서로 다른 형태의 오차를 나타낸다. 만일 전자가 진동 오차(dispersive error)라면 후자는 감쇄오차(dissipative error)가 되며, 비선형항과  $\hat{u}(k)$  의 값에 따라 그 역도 성립한다. 따라서 수정파수의 실수부에 의한 오차가 수치적 대류항이라면 허수부에 의해 발생한 오차는 수치확산항의 역할을 할 수 있다.

둘째, 유한 차분오차와의 상호작용에 의해 파수 중첩오차가 줄어들 수 있다. 고정된 에너지 스펙트럼을 가정하는 정적오차해석의 경우와는 달리,

실제 계산에서 에너지 스펙트럼은 계속 변할 뿐 아니라 유한 차분오차로 인해 오염되어 고주파영역의 감쇄가 지속적으로 발생한다. 따라서, 수치확산이 매우 큰 유한차분기법의 경우 고주파 영역의 에너지 감쇄로 인해 중첩될 에너지가 거의 없는 상황도 존재할 수 있다. 이러한 메커니즘은 수정파수의 허수부가 커질수록 파수중첩오차가 줄어드는 것을 설명해준다.

또 중심차분의 경우 파수중첩오차의 영향이 정적오차에 의해 예측된 것보다 작은 이유 중 한가지는 아격자 응력모델의 수치오차에 대한 '적응 메커니즘(self-adjusting mechanism)'이 작동되기 때문으로 생각되며, 이에 대해서는 3.4 절에 설명될 것이다.

### 3.3 상류차분에 의한 부가적인 수치확산

중심차분의 특성은 파수공간에서의 수정파수해석으로 충분하지만 상류차분의 경우는 그렇지 않다. 이는 수정파수가 정의되지 않는 비선형 상류차분은 물론 선형 상류차분에도 해당된다. 이것은 상류차분을 구성하는 유속-벡터 분리법(flux-vector splitting, 이하 FVS)과 충격파 포획기법에 기인한다. 이 절에서는 이 요소들이 수치확산에 어떤 영향을 미치는지 분석하고자 한다.

유속벡터분리법의 영향을 살펴보기 위해 본 연구에서 채택된 국소 Lax-Fridrichs 분리법(이하 LLF-FVS) 외에 다음과 같은 전역 Lax-Fridrichs 분리법(이하 GLF-FVS)을 생각하자.

$$f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm |c|u) \quad (9)$$

이때  $c$  는 통상적으로 전체 계산영역에서 가장 큰 고유치로 고정된다. 1차 및 2차 미분에 대한 수정파수를  $k' = k_r + ik_i$  와  $k''$  으로 정의하고 다음과 같이 차분된 Burgers 방정식을 생각하자.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\delta^+ f^+(u)}{\delta x} + \frac{\delta^- f^-(u)}{\delta x} = \nu \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \quad (10)$$

이 때,  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  이다. (10)을 푸리에 변환하면

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \hat{u}(k) = -\frac{1}{2} ik' (\hat{f}(k) + |c| \hat{u}(k)) - \frac{1}{2} ik'' (\hat{f}(k) - |c| \hat{u}(k)) \quad (11)$$

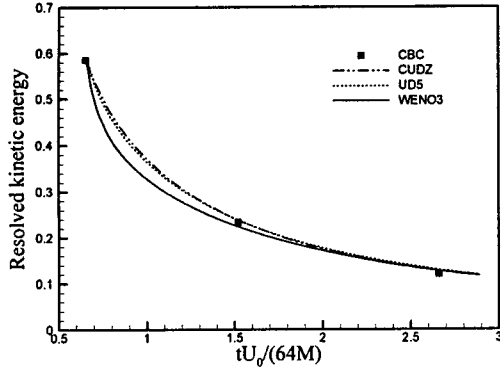


Fig. 4 Comparison of linear and nonlinear upwind schemes: decay of the resolved kinetic energy

가 되고 식 (11)에 수정파수를 대입하면

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + vk^* - |c|k_i \right) \hat{u}(k) &= -ik_r \hat{f}_k \\ &= -\frac{i}{2} k_r \left( \sum_{p+q=k} \hat{u}(p)\hat{u}(q) + \sum_{p+q=k \pm N} \hat{u}(p)\hat{u}(q) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

가 됨을 알 수 있다. 여기서 우변의 두 번째 항은 파수 중첩오차를 나타낸다. 식 (12)로부터 GLF-FVS에 의해 추가적인 선형 차분오차  $-|c|k_i \hat{u}_k$ 가 생성되었음을 알 수 있는데, 이는 순수 감쇄항이다. Part I of Fig. 1에 나타난 바와 같이 모든 파수에서  $k_i \leq 0$  이고, 적절히 무차원된 시스템에서  $|c| \sim O(1)$  임을 감안할 때 매우 낮은 레이놀즈 수 유동을 제외한 대부분의 유동에서  $-|c|k_i \gg vk^*$ 가 성립한다. 이는 고차 상류기법의 해상력이 유속분리기법에 의해 발생한 수치확산으로 인해 상당히 잠식됨을 의미한다. 이러한 GLF-FVS의 실패는 유속분리로 인해 선형항이 발생하기 때문이며, 이 항으로 인해  $\hat{u}(k)$ 의 모드가 시간에 대해 선형적으로 감소하게 된다. 반면, LLF-FVS나 Steger-Warming<sup>(10)</sup> 또는 Van Leer<sup>(20)</sup>의 FVS기법은 유속분리로 인한 선형항을 발생시키지 않는다. 그러나 이러한 FVS 기법들 역시 정체점의 진동이나 경계층의 과도한 확산과 같은 문제를 가지고 있으며<sup>(21)</sup> 이는 매우 잘 알려져 있다. FVS의 대안으로 Roe의 유속 차분 분리법<sup>(22)</sup>(flux difference splitting)이나 AUSM<sup>(21)</sup> 등이 널리 쓰이고 있다. 그러나, 이들은 기본적으로 유속 재구성기법으로 CUD 등과 같은 유한 차분기법과 결합할 수 없으며, 특히 파수공간에서의 해석이 불가능하므로 본 연구에서는 고려하지 않았다.

Navier-Stokes 시스템에서 GLF-FVS에 의한 확산 효과를 확인하기 위해 Part II의 유한차분오차에 대한 정적 오차해석을 재수행하였다. Fig. 3(a)는 Von Karman 에너지 스펙트럼에 대해 LLF와 GLF를 적용해 계산한 CUDZ의 유한차분오차 스펙트럼을 COM4-div 및 아격자 응력의 스펙트럼과 함께 나타낸 것이다. 그림에서 GLF에 의한 오차는 모든 파수에서 오차를 10 배 이상 증가시킴을 알 수 있다. Fig. 3(b)는 CBC의 등방성 난류유동 해석결과이다. GLF-FVS를 적용한 CUDZ의 결과는 LLF-FVS를 적용한 경우에 비해 수치소산이 매우 커서 절단파수 근처에서 에너지가 급격히 소실됨을 알 수 있다. 또 이 경우 중간파수 영역의 에너지가 커지는 현상을 관찰할 수 있는데, 이 경향은 수치소산이 있는 경우 일관되게 나타난다. 이는 고주파 영역의 수치소산으로 인해 큰 스케일에서 작은 스케일로의 에너지 전달이 원활히 이루어지지 못함으로써 난류유동의 중요한 특성인 에너지 캐스케이드(cascade)가 형성되지 못하고 중간 파수영역에 에너지가 쌓이기 때문이다. 이상의 수치실험 및 해석결과로부터 유속분리법은 유한 차분기법만큼 오차에 큰 영향을 미치며, 특히 GLF와 같은 선형 유속분리법은 난류유동해석에 부적합함을 알 수 있다.

다음으로 비선형 상류차분의 충격파 포획항에 의한 영향을 살펴보았다. WENO3는 식 (5)의 완만도 지시자  $IS_k$ 가 0에 접근할 경우, 즉 해가 충분히 부드러운 분포를 가질 때 5차의 상류편향 차분<sup>(4)</sup>(이하 UD5)로 귀결된다. 그러나 WENO3가 충격파와 같은 불연속면을 가지지 않는 난류유동장을 부드러운 유동장으로 간주할 지는 매우 의문스럽다. 난류유동장의 특성상 필연적으로 해상되지 않는 고주파성분이 발생하게 되고, 따라서 그 격자군(stencil)에서의  $IS_k$ 가 커지게 된다. 이때 식 (3), (4)로부터 WENO는 그 격자군에 대해 낮은 가중치  $\omega_k$ 를 부과함으로써 플럭스 구성에서 제외해 버림을 알 수 있다. 따라서 WENO는 충격파 포획항 내에 해상되지 않은 고주파를 감쇄시키는 메커니즘을 가지고 있다고 생각된다. 따라서 UD5와 WENO3의 결과를 비교함으로써 충격파 포획항에 의한 영향을 관찰할 수 있다. Fig. 4는 CBC의 등방성 난류에 대해 CUDZ, UD5 및 WENO3를 적용한 경우의 운동에너지의 시간변화를 나타낸다. UD5로 계산된 운동에너지는 CUDZ와 거의 일치하지만, WENO3의 경우는 고주파영역의 에너지가 큰  $t < 1.5$ 에 수치소산이 집중됨을 알 수 있다. 이는 명백히 불연속 포획 메커니즘이 해상된 영역의 난

류를 감쇄시키기 때문이다. 따라서 비선형, 충격과 포획기법은 선형 상류차분에 비해 부가적인 수치 확산을 가진다.

3.4 아격자응력과 이산화오차의 상호작용

3.2 절에서 언급한 바와 같이 본 연구에서 고려된 아격자 응력모델은 수치오차에 대한 적응 메커니즘을 가지게 되는 데, 이로 인해 수치오차의 영향이 상당히 줄어든다. 이 현상을 이해하기 위해 유한 차분기법을 적용하면서 아격자력만 스펙트럴 기법을 적용하여 계산된 값으로 대체한 ‘이상적 LES’를 수행하였다. 이때, 실제 LES와 이상적인 LES의 차이를 통해 수치오차와 아격자력 간의 상호작용의 영향을 조사할 수 있다. 본 연구에서 고려한 SPEVM의 경우, 단지 스펙트럴 기법을 적용한 결과에서 얻은 절단파수의 에너지 스펙트럼  $E(k_c)$ 를 식 (7)에 적용함으로써 이상적인 LES가 구현된다.

Fig. 5는 COM4-div와 CUDZ를 적용한 이상적인 LES 및 실제 LES로 구한 에너지 스펙트럼이다. 두 차분기법 모두에 대해 실제 LES가 이상적인 LES에 비해 실험 값에 훨씬 근접함을 알 수 있다. COM4의 실제 LES의 경우 파수중첩오차의 영향이 줄어드는 것을 알 수 있는데, 파수중첩 오차가 발생하면  $E(k_c)$ 가 증가하고, 이는 식 (7)의 와점도를 증가시키므로 이로 인해 파수중첩오차가 줄어든다. 한편, CUDZ의 실제 LES의 경우 유한차분오차가 줄어들는데, 수치소산으로 인해  $E(k_c)$ 가 줄어들고 그 결과 와점도가 줄어들어 수치소산량을 줄이는 데 기여한다. SPEVM 뿐만 아니라 DSM도 마찬가지로 적응 메커니즘을 가지는 데, DSM의 경우 검사필터와 격자필터를 적용한 속도장의 차이

가 SPEVM의  $E(k_c)$ 에 해당하는 역할을 한다. 따라서 아격자 응력의 적응 메커니즘으로 인해 실제 계산에서 수치오차의 영향은 정적 오차 해석 또는 오차항 자체로 분석한 결과에 비해 항상 작다. 이러한 아격자 응력과 수치오차의 상호작용에 의한 효과는 3.5 절에 제시할 동적 오차의 정의에 의해 유한 차분과 파수 중첩오차로 흡수된다.

3.5 최적 상류차분기법

3.2 절에서 보인 바와 같이 수치소산이 증가할수록 파수중첩오차는 감소한다. 이 결과는 유한차분 오차와 파수중첩 오차가 균형을 이루어 전체 이산화오차가 최소가 되는 CUD의  $\alpha$ , 즉 최적 수치 소산량의 존재가능성을 암시한다. 이 절에서는 등방성 난류유동의 수치 오차 분석을 통해 이러한 최적 수치 소산량을 구해보고자 한다. 이를 위해 동적 유한차분, 파수 중첩 및 전체 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \epsilon^{FD}(t) &= \frac{\left\{ \int_0^{k_m} (E^{SPDA}(k,t) - E^{DA}(k,t))^2 dk \right\}^{1/2}}{\int_0^{k_m} E^{SPDA}(k,t) dk}, \\ \epsilon^{alias}(t) &= \frac{\left\{ \int_0^{k_m} (E^{DA}(k,t) - E^{alias}(k,t))^2 dk \right\}^{1/2}}{\int_0^{k_m} E^{SPDA}(k,t) dk}, \\ \epsilon^{total}(t) &= \frac{\left\{ \int_0^{k_m} (E^{SPDA}(k,t) - E^{alias}(k,t))^2 dk \right\}^{1/2}}{\int_0^{k_m} E^{SPDA}(k,t) dk}, \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 상첨자 SPDA는 파수중첩오차가 제거된 스펙트럴기법으로 구한 해, 즉 정확한 해를 의미한다. 또 DA는 파수중첩오차가 제거된 유한 차분법 기법으로 구한 해를, alias는 파수중첩오차가 포함된, 즉 물리적 공간에서 유한차분기법을 적용한 해를 의미한다. (13)과 같이 모든 파수에서의 오차를 적분함으로써 동적오차는 시간만의 함수가 된다.

Fig. 6(a)와 Fig. 6(b)는  $0 \leq \alpha \leq 0.25$ 의 다양한  $\alpha$ 에 대해 시간에 따른 CUD의 동적 유한차분 및 파수 중첩오차를 나타낸 것이다. 여기서  $\alpha = 0$ 은 COM4,  $\alpha = 0.25$ 는 CUDZ를 의미한다. CUD와의 비교를 위해 COM4-sk로부터 구한 동적오차도 함께 나타내었다. Fig. 6에서  $\alpha$ 가 증가함에 따라 유한차분오차가 증가하고 파수중첩오차가 감소하는 것을 알 수 있다. 특히, 파수중첩오차는 수치소산의 증가와 함께 단순감소현상을 보인다. COM4-sk의 경우 CUDZ보다 낮은 파수중첩오차를 보일 뿐아니라

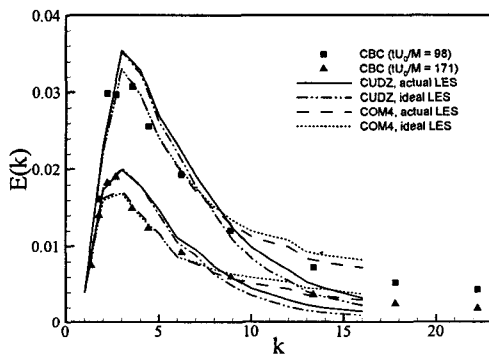
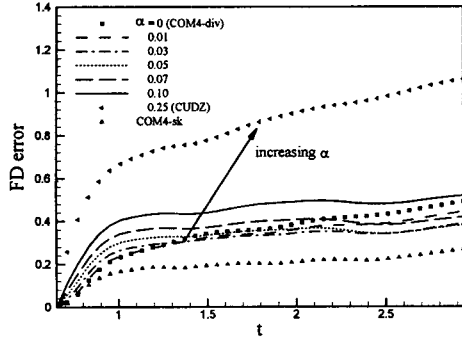
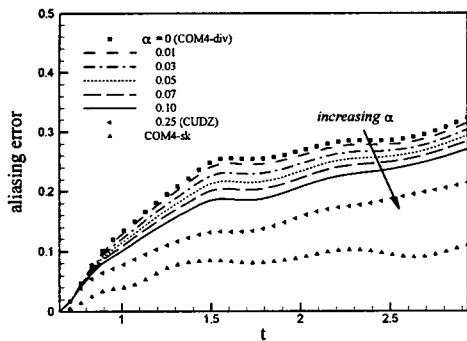


Fig. 5 Actual vs. ideal LES for COM4 and CUDZ: time evolution of energy spectra

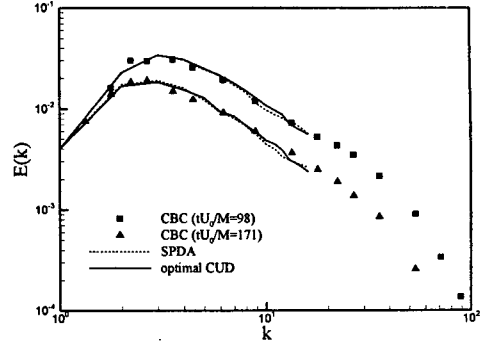


(a) Finite differencing error

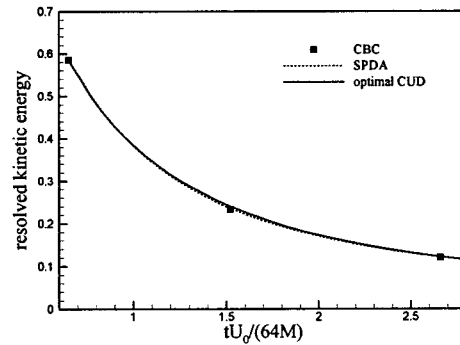


(b) Aliasing error

Fig. 6 Time evolution of dynamic errors for a family of CUD



(a) Time evolution of energy spectra



(b) Decay of the resolved kinetic energy

Fig. 8 Results from optimal CUD ( $\alpha=0.07$ ) compared with those from SPDA

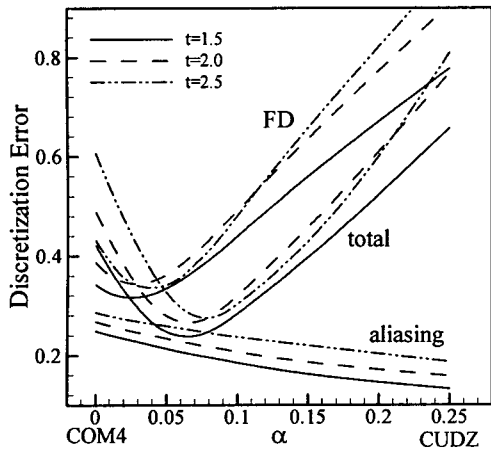


Fig. 7 Dynamic finite differencing, aliasing and total errors as the functions of  $\alpha$

유한차분오차도 모든  $\alpha$ 에서의 CUD보다 작음을 알 수 있다. 따라서 이 결과는 비선형항을 엇대칭형으로 구성함으로써 파수중첩오차 뿐만 아니라

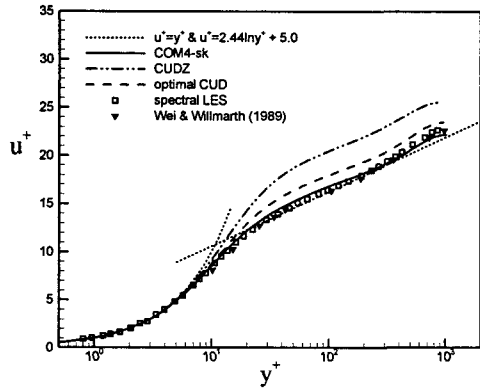
유한차분오차도 최소화할 수 있음을 보여준다.

Fig. 7 은  $t=1.5, 2.0, 2.5$  에서 각각  $\alpha$  에 따른 동적 오차들의 거동을 나타낸다. 유한차분과 파수중첩 오차는 서로 다른 거동을 보이며, 그 결과 전체오차가 최소가 되는  $\alpha$ 가 존재함을 알 수 있다.

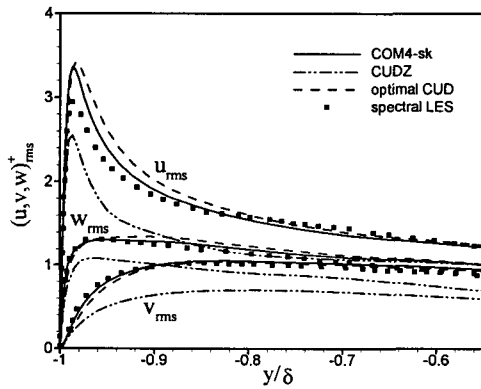
여기서 매우 작은  $\alpha$ 를 제외하고 유한 차분오차가 전체오차보다 오히려 큰 것을 알 수 있는데, 이는 동적오차를 오차항 자체로서가 아니라 해의 차이로서 정의했기 때문이다. 즉, 소산이 지배적인 유한 차분오차는 고주파 에너지의 감쇄를, 파수중첩오차는 고주파의 증폭을 야기하기 때문에 두 효과가 모두 포함된 전체오차는 유한차분오차보다 작아진다. 또한 수치소산이 증가할수록 유한 차분오차의 증가가 파수중첩오차의 감소보다 지배적인 현상이 됨을 알 수 있다.

Fig. 7 에서  $\alpha \approx 0.07$  일 때 전체오차가 최소가 됨을 알 수 있는데, 이 때의 CUD를 최적 CUD라 하자. Part I의 Fig. 1과 같은 수정파수 해석을 통해 최적 CUD는 지금까지 제안된 어떤 상류차분보다도





(a) Mean streamwise velocity



(b) RMS velocity fluctuations

Fig. 9 Mean statistics for a fully developed channel flow: results from optimal CUD

적은 수치소산을 가짐을 알 수 있다. 이 결과는 왜 기존의 상류차분기법들이 난류유동 해석에 적용될 수 없었는지를 설명해준다. 즉, 파수중첩오차의 감소라는 긍정적 효과를 상쇄시킬만큼 큰 수치소산이 유한 차분오차를 통해 나타나기 때문이다.

Fig. 8(a)와 Fig. 8(b)는 각각 최적 CUD로 계산된 등방성 난류의 에너지 스펙트럼 및 운동에너지를 나타낸다. 그림에서 최적 CUD는 SPDA의 결과와 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 본 연구에 나타내지는 않았지만, 최적 소산량의 격자 의존성 및 필터 크기의 영향을 고찰하기 위해 이 유동에 대해 64<sup>3</sup> 격자에서 동적 오차해석을 수행한 결과 거의 유사한 오차의 거동 및 최적 소산량 ( $\alpha = 0.07$ )을 얻을 수 있었다.

그러나, 등방성 난류유동으로부터 유도한 최적 CUD가 다른 유동 또는 다른 아격자 응력 모델에 대해서도 일반적이라고 믿을 근거는 없다. 따라서

물리적 공간에서 실제적인 유동의 LES에 대해서 최적 상류차분의 존재가능성 및 일반성에 대해 검증되어야 할 것이다.

#### 4. 최적 상류차분의 검증: 난류 채널유동

Part I에서와 같이 채널 반폭과 중심속도를 기준으로 한 레이놀즈수 23,000의 난류 채널유동의 LES를 재수행하였다. 계산영역은 주유동, 높이 및 너비 방향으로 각각  $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta/2$ 이며, 이때  $\delta$ 는 채널 반폭이다. 격자수는  $48 \times 64 \times 48$ 이며, 아격자 응력모델로는 DSM이 적용되었다. 보다 자세한 계산조건 및 수치기법은 Part I을 참고하라.

Part I에서 언급한 바와 같이 CUD3 및 CUDZ는 과도한 수치확산으로 인해 난류유동이 유지되지 않고 층류화된다. 뿐만 아니라 본 연구에서 고려한 WENO3는 더욱 급격히 층류화되었는데, 이는 3.3절에서 밝힌 바와 같은 충격파 포획항이 부가적인 수치확산을 제공하기 때문이다. 또 이는 충격파 포획기법을 채널 유동 등의 LES 및 DNS에 적용한 기존의 연구 결과<sup>(23-25)</sup>와도 잘 일치한다.

3절에서 유도된 최적 CUD, 즉  $\alpha = 0.07$ 의 CUD도 난류 채널유동 문제에 있어서는 지나친 수치확산을 발생시키며, 궁극적으로 유동을 층류화시켰다. 다양한  $\alpha$ 에 대한 실험결과  $\alpha \approx 0.01$  근처에서 난류유동이 유지됨을 알 수 있었는데,  $\alpha = 0.008$ 이 불안정성을 야기하지 않는 최소의 값임을 알 수 있었다. 이보다 작은  $\alpha$ 에서는 Part I의 COM4-div와 마찬가지로 불안정성으로 인해 해가 발산하였다. 따라서 보다 일반적인 난류유동에 있어서도 최적 상류차분이 존재함을 알 수 있다. 반면 최적 상류차분을 위한 수치소산량(즉  $\alpha$ 의 값)은 전혀 일반적이지 않음을 알 수 있다.

3절에서 분석한 바와 같이 동적오차가 최소가 되는  $\alpha$ 가 존재하기 위해서는 수치소산이 없는 경우, 즉  $\alpha = 0$ 일 때 유한차분오차와 거의 같은 크기의 파수중첩오차가 존재해야 한다. 이 조건을 만족하기 위해서는 절단파수 근처에 무시할 수 없는 운동에너지를 존재해야 한다. 경계조건이나 형상 등을 통한 에너지 유입이나 교란이 없을 경우 절단파수의 에너지를 결정하는 대표적인 인자는 레이놀즈 수와 격자 해상도이다. 따라서 최적 상류차분을 위한 소산량 또한 이들 인자에 의해 결정된다. 등방성 난류유동과 난류채널유동의 결과로부터 파수중첩오차가 줄어들수록, 즉 절단파수의 에너지가 줄어들수록 최적 CUD를 위한  $\alpha$ 의

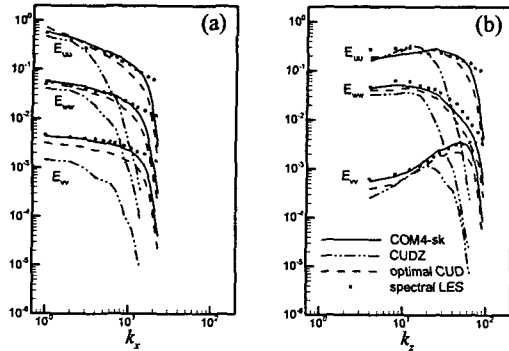


Fig. 10 One-dimensional energy spectra at  $y^+ \approx 15$  for a fully developed channel flow: (a) streamwise wavenumber; (b) spanwise wavenumber

값이 0에 접근할 것으로 추정된다.

등방성 난류유동의 경우  $32^3$ 의 격자로 해상된 운동에너지는 전체 에너지의 60%인데 비해, 채널 유동의 경우 해상된 에너지만으로 전체 난류 섭동량을 복원할 수 있다. 이러한 사실은 채널 유동의 해상도가 등방성 난류의 경우에 비해 좋음을 의미하는 것으로 위의 가설을 뒷받침한다.

Fig. 9(a)와 Fig. 9(b)는 최적 CUD ( $\alpha = 0.008$ )로 계산된 평균속도와 속도 섭동량을 나타낸 것이며, Part I에서 계산된 COM4-sk 및 CUDZ의 결과도 함께 나타내었다. 또한 비교를 위해 실험<sup>(26)</sup> 및 스펙트럴기법을 적용한 LES 결과<sup>(19)</sup>도 함께 나타내었다. Fig. 9에서 수치확산이 제거된 최적 CUD의 결과는 완전 발달된 난류 채널유동을 잘 재현하고 있으며, CUDZ의 결과에 비해 실험 및 스펙트럴 LES의 결과와 대체로 잘 일치한다. 그러나, 최적 CUD의 결과는 COM4-sk의 결과만큼 좋지는 않으며 특히 평균속도장의 경우 벽법칙 및 실험결과와 무시할 수 없는 오차를 보인다. 이는 Fig. 6에서 보인 바와 같이 최적 CUD의 유한 차분 및 파수 중첩오차가 COM4-sk에 비해 크기 때문으로 생각된다.

Fig. 10(a)와 Fig. 10(b)는 각각  $y^+ \approx 15$ 에서의 주 유동 및 횡방향으로의 1차원 스펙트럼을 나타낸다. 대부분의 파수영역에서 에너지 소산이 발생하는 CUDZ에 비해 최적 CUD의 스펙트럼은 COM4-sk의 스펙트럼에 훨씬 근접하며 고주파의 에너지를 소산시키지 않음을 확인할 수 있으나 모든 파수에서 약간의 에너지 소산이 발생한다. 그러나 모든 위치에서 그런 것은 아니며, 여기 나타내지는 않았으나 채널 중심에서는 최적 CUD의 스펙트럼은 COM4-sk의 스펙트럼과 거의 일치한다.

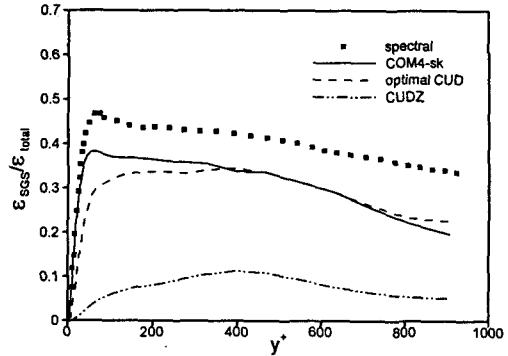


Fig. 11 Ratio of the subgrid-scale dissipation to total dissipation for a fully developed channel flow

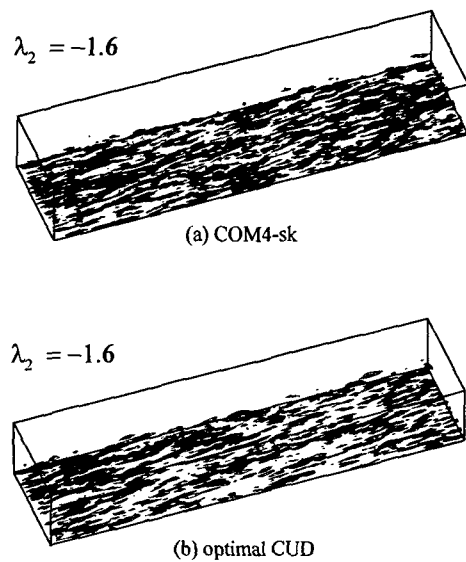


Fig. 12 Instantaneous vortical structures in a turbulent channel flow

이 결과는 벽근처에서는 다소 과도한 수치소산이 발생함을 의미하며, 단일 상수  $\alpha$ 로 모든 위치에서의 최적 소산량을 나타내는 것이 불가능함을 시사한다. 이는 채널유동의 비균질성 때문에 강한 비균질성 및 비균일 격자계로 인한 영향이 최적 상류차분을 결정하는 또 다른 인자가 될 것으로 생각된다.

Fig. 11은 아격자 소산량과 전체 소산량의 비를 나타낸다. 최적 CUD의 결과는 CUDZ에 비해 현저히 향상되었음을 알 수 있으며, COM4-sk의 결과와 대체로 잘 일치한다. 그러나  $y^+ < 400$ 의 영역에서 COM4-sk의 소산량보다 작으며 특히 스펙트럴

LES결과와 COM4-sk에 공통적으로 나타나는  $y^+ = 50$  근처에서의 최대값이 뚜렷이 나타나지 않는다. 따라서 이 영역에서 최적 CUD의 수치소산이 아격자소산을 대체하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 12는  $\lambda_2$ -와동 인식법<sup>(27)</sup>으로 가시화한 순간 유동장으로 COM4-sk의 결과와 최적 CUD의 결과를 비교하였다. Part I의 Fig. 5와 비교해보면, CUDZ가 전혀 다른 유동장을 보여주는 것과는 달리 최적 CUD의 결과는 완전발달된 채널유동의 줄무늬 구조를 잘 보여준다. 그러나 앞서 언급한 바와 같이 벽근처의 다소 과도한 수치소산으로 크기가 약한 구조가 나타남을 볼 수 있다.

## 5. 결론

동적 오차해석을 통해 LES에 있어서 중심 및 상류 컴팩트 차분기법의 적합성을 연구하였다. 수치소산이 해상된 해에 미치는 영향을 조사하기 위해 컴팩트 차분기법을 포함한 다양한 중심 및 상류차분을 적용해 등방성 난류유동에 대한 LES를 수행하였다. 특히, 오차를 포함한 해와 오차 원인이 제거된 해의 차를 통해 동적오차를 정의함으로써 상류차분이 파수 중첩오차를 경감시키는 동시에 유한 차분오차를 증가시킨다는 사실을 밝힐 수 있었다. 특히, 수치소산이 증가할수록 유한 차분오차의 영향이 지배적임을 알 수 있었다. 또 본 연구에서는 컴팩트 상류차분의 수치 소산량을 조절함으로써 유한 차분오차와 파수 중첩오차가 균형을 이루어 전체 이산화오차가 최소화되는 최적 상류차분이 존재함을 밝혔다. 또 상류차분기법을 구성하는 유속벡터 분리법과 충격파 포획항이 또 다른 수치소산의 원인이 됨을 알 수 있었다. 중심차분의 경우 비선형항을 엇대칭형으로 구성함으로써 파수 중첩오차를 최소화할 수 있을 뿐 아니라, 유한 차분오차도 최소화됨을 보였다.

파수공간에서 등방성 난류유동의 해석을 통해 얻은 결론은 물리적 공간에서 난류채널유동의 LES를 통해 검증되었다. 난류 채널유동에도 최적 상류차분이 존재함을 확인하였으나, 최적 수치소산량은 등방성 난류유동에서 얻은 값과는 달랐다. 등방성 난류유동과 채널유동의 결과로부터 절단파수 근처에서의 운동에너지, 즉 파수 중첩오차가 커질수록 최적 수치 소산량도 증가함을 알 수 있었으며, 따라서 비균질 유동의 경우 이는 공간의 함수일 것으로 추정된다. 즉, 일반적으로 레이놀즈 수, 격자해상도 및 절단파수에서의 에너지의 함수로 구성되는 최적 소산량에 대한 무차원 법칙(scaling

law)이 존재할 것으로 생각되며, 이 법칙의 유도는 차후의 과제로 남긴다.

## 후 기

본 연구는 교육부 BK21사업과 과학기술부 창의적연구진흥사업의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Park, N., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2003 "On the Suitability of Centered and Upwind-biased Compact Different Schemes for Large Eddy Simulation: Part II - Static Error Analysis," *Trans. Of the KSME B*, Vol. 27, No. 7, pp. 984-994.
- (2) Fedion, I., Lardjane, N. and Gökalp, I., 2001, "Revisiting Numerical Errors in Direct and Large Eddy Simulations of Turbulence: Physical and Spectral Space Analysis," *J. Comput. Phys.*, Vol. 174, pp.816-851.
- (3) Ghosal, S., 1996, "An Analysis of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulence," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 187-206.
- (4) Park, N., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2003 "On the Suitability of Centered and Upwind-biased Compact Different Schemes for Large Eddy Simulation: Part I - Numerical Test," *Trans. Of the KSME B*, Vol. 27, No. 7, pp. 973-983.
- (5) Zhong, X., 1998, "High-Order Finite-Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Boundary-Layer Transition," *J. Comput. Phys.*, Vol. 144, pp. 662-709.
- (6) Anderson, W., Thomas, J. and Van Leer, B., 1986, "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splitting for the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol. 24, pp. 1453-1460.
- (7) Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S., 1987, "Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III," *J. Comput. Phys.*, Vol. 71, pp. 231-303.
- (8) Liu, X-D., Osher, S. and Chan, T., 1994, "Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes," *J. Comput. Phys.*, Vol. 115, pp. 200-212.
- (9) Jiang, G. S. and Shu, C. W., 1996, "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes," *J. Comput. Phys.*, Vol. 126, pp. 202-228.
- (10) Steger, J. L. and Warming, R. F., 1981, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equations with Applications to Finite Difference Methods," *J. Comput. Phys.*, Vol. 40, pp. 263-293.
- (11) Lele, S. K., 1992, "Compact Finite-Difference Schemes With Spectral-Like Resolution," *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, pp. 16-42.
- (12) Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., 1971, "Simple Eulerian Time Correlation of Full- and Narrow-Band

- Velocity Signals in Grid-Generated, 'Isotropic' Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 48, pp. 273~337.
- (13) Carati, D., Jansen, K. and Lund, T., 1995, "A Family of Dynamic Models for Large-Eddy Simulation," Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research.
- (14) Metais, O. and Lesieur, M., 1992, "Spectral Large-Eddy Simulation of Isotropic and Stably Stratified Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 239, pp. 157~194.
- (15) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W., 1991, "A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 1760~1765.
- (16) Tolstykh, A. I. and Lipavskii, M. V., 1998, "On Performance of Methods with Third- and Fifth-Order Compact Upwind Differencing," *J. Comput. Phys.*, Vol. 140, pp. 205~232.
- (17) Blaisdell, G. A., Spyropoulos, E. T. and Qin, J. H., 1996, "The Effect of the Formulation of Nonlinear Terms on Aliasing Errors in Spectral Methods," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 21, pp. 207~219.
- (18) Zang, T. A., 1991, "On the Rotation and Skew-Symmetric Forms for Incompressible Flow Simulations," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 7, pp. 27~40.
- (19) Kravchenko, G. and Moin, P., 1997, "On the Effect of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulent Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 131, pp. 310~322.
- (20) van Leer, B., 1982, "Flux-Vector Splitting for the Euler Equations," in *Lecture Notes in Physics*, Vol. 170 (Springer-Verlag, New York/ Berlin), p. 507~512.
- (21) Liu, M. S. and Steffen, Jr., C. J., 1993, "A New Flux Splitting Scheme," *J. Comput. Phys.*, Vol. 107, pp. 23~39.
- (22) Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, pp. 357~372.
- (23) Meinke, M., Schroder, W., Krause, E. and Rister, Th., 2002, "A Comparison of Second- and Sixth-order Methods for Large-Eddy Simulations," *Computers & Fluids*, Vol. 31, pp. 695~718.
- (24) Mossi, M. and Sagaut, P., 2003, "Numerical Investigation of Fully Developed Channel Flow Using Shock-Capturing Schemes," *Computers & Fluids*, Vol. 32, pp. 249~274.
- (25) Garnier, E., Mossi, M., Sagaut, P., Comte, P. and Deville, M., 1999, "On the Use of Shock-Capturing Schemes for Large-Eddy Simulation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 153, pp. 273~311.
- (26) Wei, T. and Willmarth, W. W., 1989, "Reynolds-Number Effects on the Structure of a Turbulent Channel Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 204, pp. 57~95.
- (27) Jeong, J. and Hussain, F., 1995, "On the Identification of a Vortex," *J. Fluid Mech.*, Vol. 285, pp. 69~94.