

## LES 에서 중심 및 상류 컴팩트 차분기법의 적합성에 관하여 (II) - 정적 오차 해석 -

박노마\* · 유정열† · 최해천\*\*

(2003 년 2 월 25 일 접수, 2003 년 5 월 2 일 심사완료)

### On the Suitability of Centered and Upwind-Biased Compact Difference Schemes for Large Eddy Simulations (II) - Static Error Analysis -

Noma Park, Jung Yul Yoo and Haecheon Choi

**Key Words :** Compact Difference Scheme(컴팩트 차분기법), Large Eddy Simulation(큰 에디모사), Finite Differencing Error(유한 차분오차), Aliasing Error(파수 중첩오차)

#### Abstract

The suitability of high-order accurate, centered and upwind-biased compact difference schemes for large eddy simulation is evaluated by a spectral, static error analysis. To investigate the effect of numerical dissipation on LES solutions, power spectra of discretization errors are evaluated for isotropic turbulence models in both continuous and discrete wavevector spaces. Contrary to the common belief, the aliasing errors from upwind-biased schemes are larger than those from comparable non-dissipative schemes. However, this result is the direct consequence of the definition of the power spectral density of the aliasing error, which poses the limitation of the static error analysis for upwind schemes.

#### 1. 서 론

상류차분기법은 충격파와 같이 불연속면이 존재하는 유동장의 해석을 위해 여전히 가장 효과적인 차분기법이다. 또한 난류 유동의 경우, 상류차분은 내재된 수치확산으로 인해 파수 중첩오차(aliasing error)를 조절할 수 있는 능력이 있다. 따라서, 난류유동의 큰 에디모사(large eddy simulation, 이하 LES)를 위해 많은 연구들<sup>(1-5)</sup>에서 상류차분기법의 가능성을 연구하고 있다. 특히, 저자들의 앞선 연구<sup>(6)</sup>(이하 Part I)에서 수행된 난류채널 및 원형 실린더 주위 유동의 LES는 고차의 상류차분기법의 LES의 적용에 대해 매우 유용한 정보를 제공한다. 그러나, 이는 특정한 유동과 계산조

건 하에서 얻어진 결론으로 모든 유동장과 수치기법에 대해 일반화되기 어렵다. 실제로 난류 채널과 실린더 유동의 수치해석 결과로부터 수치확산의 영향에 대해 상반된 평가가 가능하다. 채널유동의 경우 컴팩트 상류차분기법들을 적용할 경우 수치소산으로 인해 유동이 층류화되어 이러한 유동장에 전혀 적합하지 않음이 밝혀졌다. 반면, 실린더 유동의 경우 상류차분기법은 비록 전단층의 천이를 늦게 예측하는 문제가 있지만 격자 해상도가 높을 경우 상류차분으로도 충분히 좋은 결과를 얻을 수 있음을 보여준다. 이는 Part I 에서 언급한 상류차분을 적용한 다른 LES 결과들<sup>(1-5)</sup>에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 다른 수치적인 요인을 배제한 이상적인 조건에서 이론적인 해석을 통해 상류차분의 이산화오차가 LES 에 미치는 영향을 밝혀야 할 필요성이 커지고 있다.

Vremen 등<sup>(7)</sup>은 2 차 및 4 차의 중심 차분기법을 혼합층 유동의 LES 에 적용한 결과를 필터링된 DNS 결과와 비교함으로써 이산화오차가 아격자 응력(subgrid-scale stress)의 계산에 미치는 영향을

\* 서울대학교 기계항공공학부

† 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : jyoo@plaza.snu.ac.kr

TEL : (02)880-7112 FAX : (02)883-0179

\*\* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

연구하였다. Ghosal<sup>(8)</sup>은 연속적인 파수공간에서 주어진 에너지 스펙트럼으로 모델링된 등방성 난류에 대해 여러 중심차분기법들을 적용해 얻은 유한 차분오차 및 파수중첩 오차의 크기를 아격자 응력의 크기와 비교함으로써 이산화오차의 영향을 연구하였다. Kravchenko와 Moin<sup>(9)</sup>은 1차원 스펙트럼 해석을 통해 대류항의 구성 형태와 파수중첩오차의 관계를 밝혔으며, 의사-스펙트럴 코드를 변형해 여러 중심차분기법들을 적용한 LES를 난류 채널유동에 대해 수행하였다. 그 결과 파수중첩오차가 제거될 수 없는 유한 차분기법의 경우, 엇대칭형(skew-symmetric)의 대류항이 파수중첩오차를 최소화함을 밝혔다. Fedioun 등<sup>(10)</sup>은 이산화된 파수공간에서 속도장의 푸리에 계수를 직접 가정하는 방법을 통해 Kravchenko와 Moin<sup>(9)</sup> 및 Ghosal<sup>(8)</sup>의 연구를 재해석하였다. 그러나 이러한 연구들은 모두 (의사) 스펙트럴 기법이나 중심차분기법들에 대해서 이루어진 이론적 연구이며, 상류차분의 경우는 아직 이러한 연구가 수행된 바 없다.

본 연구에서는 Ghosal<sup>(8)</sup>과 Kravchenko와 Moin<sup>(9)</sup> 및 Fedioun 등<sup>(10)</sup>의 해석방법을 컴팩트 중심차분 및 상류차분에 적용해 이산화오차와 아격자 응력의 크기를 정량적으로 나타내고 비교함으로써 상류차분의 수치확산이 파수중첩 및 유한 차분오차에 어떤 영향을 주는 지 비교 평가하고자 한다.

본 연구에서는 특히 상류차분에 관한 다음 질문들에 대한 대답을 모색하고자 한다.

- 1) 상류차분에 내재된 수치소산은 실제로 파수중첩 오차를 줄이는 데 기여하는가?
- 2) 상류차분에 의한 오차가 해상된 해에 미치는 영향을 계산할 수 있는가?
- 3) 만일 이것이 가능하다면 수치확산을 조절함으로써 감소된 파수중첩 오차와 증가된 유한 차분오차가 어떤 균형점에 이르러 전체 이산화오차가 최소가 되는 '최적 상류차분'을 구할 수 있을 것인가?

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 Ghosal<sup>(8)</sup> 및 Fedioun 등<sup>(10)</sup>의 방법을 따라 연속 및 이산화된 파수공간에서 유한 차분오차, 파수중첩오차 및 아격자 응력의 스펙트럼을 구하는 방법이 요약되었다. 3절에서는 등방성 난류유동 모델들에 대한 상류차분의 이산화오차들이 계산되고 분석되었다. 4절에서는 컴팩트 차분기법을 적용하여 대류항의 형태에 대한 Kravchenko와 Moin<sup>(9)</sup>의 1차원 해석이 수행되었다. 본 연구를 통한 중요한 발견들은 마지막 절에 요약되었다.

## 2. 이산화오차와 아격자 응력

### 2.1 지배방정식 및 유한 차분기법

압축성효과의 배제와 해석의 편의를 위해 비압축성 유동을 가정하였으며, 한 변의 길이가  $L$ 인 정육면체  $\Omega$ 에서 정의된 등방성 균질 난류유동을 고려하기로 한다. 이러한 등방성 유동은 다음의 Navier-Stokes 방정식으로 기술된다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -N_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

여기서  $u_i = (u_1, u_2, u_3)$ 는 연속방정식을 만족하는 속도벡터이고,  $P$ 는 밀도로 나눈 압력,  $\nu$ 는 유체의 동점성 계수이다.  $N$ 는 비선형항으로 보존형(conservative form;  $N_i^d$ ), 대류형(advective form;  $N_i^a$ ) 및 엇대칭형(skew-symmetric form;  $N_i^s$ ) 등으로 구성될 수 있으며 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_i^d &= \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \\ N_i^a &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ N_i^s &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

본 연구에서는 Part I에서 정의된 4차의 컴팩트 중심차분기법<sup>(11)</sup>(이하 COM4)과 3차의 컴팩트 상류차분기법인 CUDZ<sup>(6,12)</sup> 및 CUD3<sup>(6,13)</sup>를 기본 차분기법으로 하였다. 상류차분의 경우 Part I에서 언급한 국소 Lax-Friedrichs 유속벡터 분리법이 적용되었으며, 따라서 보존형의 대류항만이 고려되었다. 한편 COM4의 경우 (2)의 세 형태가 모두 고려되었다. 편의를 위해 각각의 형태는 차분기법 뒤에  $-\text{div}$ ,  $-\text{adv}$  및  $-\text{sk}$ 를 붙여 구분하기로 한다. 예를 들어, COM4-sk는 비선형항이 엇대칭형으로 기술된 COM4를 의미한다. 또, 편의를 위해 표준적인  $n$ 차 정확도의 중심 및 상류차분은 각각 CD $n$ 과 UD $n$ 으로 명명하였다.

### 2.2 연속적인 파수공간에서의 이산화오차

파수공간에서 (1)의 해  $\Psi = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ 는  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^3$ 인 무한하고 연속적인 파수벡터 공간에서 정의되지만, 수치해  $\Psi_0$ 는 이 부분집합인  $\mathbf{k} \in B$ 에서 정의되어야 한다. 이 때  $\mathbf{k} = (2\pi n_1/L, 2\pi n_2/L, 2\pi n_3/L)$  ( $n_1, n_2, n_3$ 는 정수)는 파수 벡터이다. 또한  $B$ 는  $B = [-$

$\pi/\Delta, \pi/\Delta]^3 \equiv [-k_m, k_m]^3$  인 파수벡터공간이고,  $\Delta$ 는 격자 간격이며 따라서  $k_m$ 은 최대해상가능 파수가 된다. 여기서 실제 수치해는 이산화된 격자에서 정의되지만  $B$ 는 충분히 연속적이라고 가정하자. 이는 물리적 공간에서  $L$ 이  $\Delta$ 에 비해 매우 클 때, 이상적으로는  $L \rightarrow \infty$ 일 때 성립한다. 이 가정으로 인해  $\mathbf{k} \in B$ 인 모든 파수에서 수치오차가 정확하게 정의될 수 있다.

따라서, 오차를 정의하는 데 필요한 정확한 해는  $\Psi$ 가 아닌, '이상적인 수치해', 즉 모델링 오차와 이산화오차가 전혀 없는 수치해로  $\Psi_0$ 의 성분이다.  $\mathbf{k} \in B$ 인 파수벡터에 대해  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ 를 기저 벡터(basis vector)로 하는 힐버트 공간  $H_0$  내에  $\|\Psi - \Psi_0\|$ 를 최소화하는 투영연산자  $\Pi$ 가 존재한다. 따라서 이상적인 수치해  $\Psi_0^{ideal} = \Pi\Psi$ 이며, 다음 방정식의 해로 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}) = -ik_n P_{im}(\mathbf{k}) \left[ \hat{G}(\mathbf{k}) \int_B \int_B dpdq \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) + \hat{\tau}_{mn}(\mathbf{k}) \right] - \nu k^2 \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_i(\mathbf{k}) \quad (3)$$

여기서 비선형항은 보존형으로 구성되었다.  $\delta$ 는 Dirac delta 함수이고, 텐서  $P_{ij}(\mathbf{k})$ 는  $\mathbf{k}$ 에 수직한 평면으로의 투영 텐서로 다음과 같이 정의된다.

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (4)$$

여기서  $\hat{G}(\mathbf{k})$ 는 필터 커널  $G(\mathbf{r})$ 의 전달함수이다. 격자 스케일과 아격자 스케일의 정확한 분리룰 위해 다음과 같은 푸리에 절단 필터를 고려한다.

$$\hat{G}(\mathbf{k} | k_m) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{k} \in B = [-k_m, k_m]^3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

또,  $\hat{\tau}_{mn}(\mathbf{k})$ 는 이상적인 아격자 응력모델, 즉 정확한 아격자 응력으로 식 (3)에서 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$\hat{\tau}_{mn}(\mathbf{k}) = \hat{G}(\mathbf{k}) \left[ \int_B \int_B dpdq \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \right] \quad (6)$$

따라서 (1)의 이상적인 수치해 (3)은 격자 필터를 적용한 이상적인 LES 해가 됨을 알 수 있다.

한편, 유한차분기법을 적용한 수치해는 수정파수를 이용하여 (3)을 연속적인 파수공간  $B$ 에서 의

사-스펙트럴기법으로 근사시킨 것이며 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}) = -ik'_n P'_{im}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \left[ \hat{G}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda} \int_B \int_B dpdq \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{a}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) + \hat{\tau}_{mn}(\mathbf{k}) \right] - \nu k'' \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_i(\mathbf{k}) \quad (7)$$

여기서  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}''$ 는 각각 1 차 및 2 차 미분의 수정파수이다. 이 때  $\Lambda \equiv (2pk_m, 2qk_m, 2rk_m)$ 이고  $p, q, r$ 은 0,  $\pm 1$ 의 값을 가진다. 여기서

$$P'_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta_{ij} - k'_i k'_j / k'_i k'_i \quad (8)$$

이 (3)의 투영 텐서  $P_{ij}$  대신 도입되었는데, 이는 유한 차분을 이용하는 경우에도 연속방정식을 정확히 만족시키기 위해서이다.<sup>(10)</sup> 시간 전진에 의한 영향을 무시한 정적인 수치오차는 (3)과 (7)의 우변항의 차로 생각할 수 있다. 이 수치오차는 유한 차분오차 ( $= E_i^{FD}(\mathbf{k})$ )와 파수 중첩오차( $= E_i^{alias}(\mathbf{k})$ )로 나누어지며 각각 다음과 같다.

$$E_i^{FD}(\mathbf{k}) = i\hat{G}(\mathbf{k}) \left[ k'_n P'_{im}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - k_n P_{im}(\mathbf{k}) \right] \int_B \int_B dpdq \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) + \nu(k'' - k^2) \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_i(\mathbf{k}), \quad (9)$$

$$E_i^{alias}(\mathbf{k}) = ik_n P'_{im}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \hat{G}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda_0} \int_B \int_B dpdq \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{a}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}). \quad (10)$$

(10)에서  $\Lambda_0$ 는 (7)의  $\Lambda$ 에서  $p = q = r = 0$ 인 경우를 제외한 것이다. 이러한 오차는 파워 스펙트럼을 통해 파수에 대한 스칼라함수로 나타낼 수 있다. 유한차분 오차의 파워 스펙트럼은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon^{FD}(k) &= 4\pi k^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{8\pi^3}{L^3} \left\{ E_i^{FD}(\mathbf{k}) E_i^{FD}(\mathbf{k})^* \right\}_\Omega \\ &= \left\{ 8\pi k^2 \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{ipq}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Phi_{mp}^*(\mathbf{r}) \Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{r}) + 4\pi k^2 \nu^2 |k' - k|^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \right\}_\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

이 때  $\{ \}_\Omega$ 은 파수공간에서 반경  $k$ 인 구 위의 표면 평균이고,  $\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = k'_n P'_{im}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - k_n P_{im}(\mathbf{k})$ 이다.  $\Phi_{ij}$ 는 등방성 난류의 속도 상관 텐서로

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \quad (12)$$

로 정의되고, 여기서  $E(k)$ 는 미리 주어진 유동장의

3 차원 에너지 스펙트럼이다. 식 (11)의 유도를 위해 Millionschikov 가정<sup>(8,14)</sup>이 적용되었다. 상세한 유도과정 및 (11)의 적분값 계산 방법은 Ghosal<sup>(8)</sup>을 참고하라. 마찬가지로, 파수중첩 오차의 파워 스펙트럼은 다음과 같다.

$$\varepsilon^{\text{alias}}(k) = 8\pi k^2 \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda_0} \left\{ k_n P'_{im}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (k_q P'_{ip}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')^*) \right\}_B \int_B \int_{\Omega} d\mathbf{r} d\mathbf{s} \Phi_{mp}^*(\mathbf{r}) \Phi_{nq}^*(\mathbf{s}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{a} - \mathbf{r} - \mathbf{s}) \quad (13)$$

그러나 식 (13)의 파수중첩오차의 파워 스펙트럼은 정육면체 공간  $B$  내의 적분을 포함하고 있어 유한차분오차의 계산에 적용된 구형 대칭성을 활용할 수 없는 문제가 발생한다. 따라서 (13)의 적분을 정육면체 공간  $B$  에 접하는 최소 및 최대의 구형 공간 내의 적분으로 대체하고, 각각을 파수중첩오차의 하한(lower bound) 및 상한(upper bound)으로 정의하면 실제 파수중첩오차의 스펙트럼은 이 두 값 사이에 있다고 가정할 수 있다.<sup>(8)</sup>

한편, 이들 오차의 크기를 아격자력의 크기와 비교하기 위해 전체 비선형항과 아격자력의 파워 스펙트럼을 구해야 한다. 비선형항 전체의 파워 스펙트럼  $M(k)$ 는 (3)의 대류항으로부터 얻어지므로 식 (11)의  $\Delta_{imn}$  을  $-k_n P_{im}$  으로 대체하고 점성항을 빼면 얻어진다. 또, 아격자력의 스펙트럼  $\mathcal{G}(k)$  은 식 (3), (6) 및 (11)에서

$$\frac{\mathcal{G}(k)}{4\pi k^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{8\pi^3}{L^3} \left\{ F_i^>(\mathbf{k}) F_i^>(\mathbf{k})^* \right\}_{\Omega}, \quad (14)$$

$$F_i^>(\mathbf{k}) = -ik_n P_{im}(\mathbf{k}) \hat{\tau}_{mn}(\mathbf{k})$$

로 주어짐을 알 수 있다.  $\mathcal{G}(k)$  또한  $N(k)$ 와 같은 방법으로 계산가능하나, 파수중첩오차의 스펙트럼과 같이 정육면체 공간  $B$  내의 적분을 포함하고 있으므로 마찬가지로 방법으로 상한 및 하한값으로 대체된다. 하지만 (6)에서 알 수 있듯이 아격자력의 스펙트럼은  $B$  바깥 영역의 적분을 구하는 것이므로,  $B$  에 접하는 최소의 구에서의 적분이 상한, 최대의 구에서의 적분이 하한에 해당한다.

### 2.3 이산 파수공간에서의 수치오차

#### 2.3.1 유한 차분 및 파수중첩오차

비록 수치적분이 수행되어야 하나 2.2 절에서 정의된 수치오차의 파워 스펙트럼은 해석적인 방법에 속하며, 오직 3 차원 에너지 스펙트럼  $E(k)$  와 수정파수의 정보만을 필요로 한다. 그러나, 상류차

분의 경우 영역 내 모든 위치에서 유동의 방향에 대한 정보가 필요하다. 즉,  $E(k)$  만으로는 불충분하며 속도장의 완전한 정보가 주어져야 한다. 따라서 2.2 절의 오차 스펙트럼은 상류차분에 직접 적용될 수 없다. 또한 연속적인 파수공간에서 등방성 난류의 속도장을 지정하는 것이 거의 불가능하므로 이 경우 이산 파수공간을 이용하여야 한다 이를 위해 우선 연속적인 물리적 공간에서 오차를 정의하고 이를 다시 이산 파수공간으로 변환하는 방법을 생각하자.

식 (9)로 정의된 유한 차분오차의 물리적 공간에서의 표현이  $e_i^{FD}(\mathbf{x})$  라 하면 이는 다음과 같다.

$$e_i^{FD}(\mathbf{x}) = - \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\delta}{\delta x_j} \right) \left( \bar{u}_i^{-DA} u_j + \bar{P} \delta_{ij} + \tau_{ij} \right) + v \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\delta^2}{\delta x_j \delta x_j} \right) \bar{u}_i \quad (15)$$

여기서  $\delta/\delta x$  는 유한차분을 나타낸다. 상첨자  $DA$  는 파수 중첩오차가 제거된 값을 의미한다.  $e_i^{FD}(\mathbf{x})$  는  $\Delta$ 보다 큰 스케일만을 나타낼 수 있지만 2.2 절의 가정에 의해  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  인 모든 영역에서 정의된다. 이는 유한차분 연산자  $\delta/\delta x_j$  도 마찬가지로이다. 예를 들어, 2 차의 중심차분의 경우  $\Omega$ 내의 모든 점  $(x_1, x_2, x_3)$ 에 대해

$$\frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_1} = \frac{1}{2\Delta} [f(x_1 + \Delta, x_2, x_3) - f(x_1 - \Delta, x_2, x_3)]$$

와 같이 정의될 수 있다. 상류차분을 위해 대류항의 플럭스벡터에 대해 Part I 에서 정의된 유속 분리법이 적용되어야 한다. 이는 플럭스  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  에 대해 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\delta \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\delta \mathbf{x}} = \frac{\delta^+ \mathbf{F}^+(\mathbf{u})}{\delta \mathbf{x}} + \frac{\delta^- \mathbf{F}^-(\mathbf{u})}{\delta \mathbf{x}} \quad (16)$$

여기서  $\delta^+/\delta \mathbf{x}$  및  $\delta^-/\delta \mathbf{x}$  는 각각 상류 및 하류차분(downwind scheme)을 의미한다. 수정파수를 도입하면 식 (16)은 푸리에 공간에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$FT \left[ \frac{\delta \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\delta \mathbf{x}} \right] = ik'_x \hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{u}) + ik'_x \hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{u}) \quad (17)$$

여기서  $k_x^*$ 는  $x$  방향 수정파수의 켈레복소수로서 하류차분을 의미한다. 물론 식 (17)은  $k_x' = k_x^*$ 인 중심차분에 대해서도 성립한다. (17)을 적용하면, 임의의 정수  $N$ 에 대해 모드  $k_M = N/2$ 까지 정의된 식 (15)의 이산 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$E_i^{FD}(\mathbf{k} | k_M) = \hat{G}(\mathbf{k} | k_M) \left\{ P_{im}'(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \hat{N}_m'(\mathbf{k}') - P_{im}(\mathbf{k}) \hat{N}_m(\mathbf{k}) \right. \\ \left. + \hat{r}_{mn}(\mathbf{k}) \left\{ k_n' P_{im}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - k_n P_{im}(\mathbf{k}) \right\} \right. \\ \left. + \sqrt{k_x' - k_x^2} \hat{u}_i(\mathbf{k}) \right\} \quad (18)$$

$$\hat{N}_m(\mathbf{k}) = ik_n \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) \quad (19)$$

$$\hat{N}_m'(\mathbf{k}') = ik_n' \hat{C}_{mn}^+ + ik_n'^* \hat{C}_{mn}^- \\ C_{mn}^\pm = \frac{1}{2} \left( u_m^M \pm |u_m^M| \right) \mu_n^M \quad (20)$$

여기서  $u_m^M$ 은  $M = 3N/2$ 까지의 모드를 이용해 구한  $\hat{u}_m(\mathbf{k})$ 의 역푸리에 변환, 즉

$$u_m^M(\mathbf{x}) = \sum_{k_3=-M/2}^{M/2} \sum_{k_2=-M/2}^{M/2} \sum_{k_1=-M/2}^{M/2} \tilde{u}_m(\mathbf{k}) e^{i(k_1x_1 + k_2y_1 + k_3z_k)} \quad (21)$$

으로 정의된다. 이 때,  $i, j, k = 0, \dots, M-1$ 이고

$$\tilde{u}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \hat{u}(\mathbf{k}) & \text{if } \mathbf{k} \in [-k_M, k_M]^3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

이다. 식 (21)과 (22)는 소위 3/2-범칙 또는 zero-padding 기법<sup>(15)</sup>으로 파수중첩오차를 제거하기 위해 도입되었으며, 실제로 (19)의 계산에도 적용되었다.

식 (18)에서 높은 레이놀즈수 유동의 경우 점성항은 매우 작으므로 세번째 항은 무시될 수 있다.<sup>(8)</sup> (18)의 두번째 항에 나타난 아격자 응력의 이산화에 대해서는 2.3.2 절에 설명될 것이다.

이러한 이산 파수영역에서의 계산은 상류차분을 다루기 위해 불가피하지만 연속적 파수영역에서의 계산에 비해 분명한 장점이 있는 데, 그 중 한가지는 파수중첩 오차가 더 간단하면서 명확하게 정의된다는 점이다. 파수중첩 오차는 다음과 같이 구해진다.

$$E_i^{\text{alias}}(\mathbf{k} | k_M) = -\hat{G}(\mathbf{k} | k_M) P_{im}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \times \\ \left\{ \hat{N}_m^{\text{DA}}(\mathbf{k}') - \hat{N}_m^{\text{alias}}(\mathbf{k}') \right\} \quad (23)$$

여기서  $\hat{N}_m^{\text{DA}}(\mathbf{k}')$ 는 식 (20)과 (21)에서 정의된 파수중첩 오차가 제거된 비선형항이고,  $\hat{N}_m^{\text{alias}}(\mathbf{k}')$ 는 파수중첩 오차를 포함하는 비선형항이며, (21)에서 단지  $M = N$ 으로 놓음으로써 같은 방법으로 구할 수 있다. 반면 연속적 파수영역에서 정의된 파수중첩 오차 (13)은 정의상  $3^3 - 1 = 26$ 개 파수중첩 모드의 합을 필요로 할 뿐 아니라 2.2 절에서 구한 바와 같이 상한 및 하한만을 알 수 있을 뿐이다.

이산화된 접근의 또 다른 장점은 식 (2)에서 정의된, 보존형 이외의 다른 형태의 비선형항에 대해서도 오차들이 쉽게 정의된다는 점이다. 예를 들어, 대류형 및 엇대칭형을 적용하는 경우 식 (18)과 (23)의  $\hat{N}_m'(\mathbf{k}')$  및  $\hat{N}_m(\mathbf{k})$ 를 다음과 같이 대체함으로써 얻어진다.

$$\hat{N}_i(\mathbf{k}')^a = i \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (p_n' + q_n') \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) \quad (24)$$

$$\hat{N}_i(\mathbf{k}')^s = \frac{1}{2} ik_n' \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) \\ + \frac{1}{2} i \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (p_n' + q_n') \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) \quad (25)$$

반면, Ghosal<sup>(8)</sup> 및 2.2 절의 연속적인 접근법에서는 해석적 접근의 어려움으로 인해 보존형만이 고려되었다.

(18)과 (23)의 오차는 정수 파수에 대해서만 정의되므로 이 결과를 연속적 파수공간에 대한 오차 스펙트럼과 비교했을 때 낮은 파수의 해상도가 떨어지는 문제가 발생한다. 이 문제는 이 절에서 정의된 최대파수  $k_M$ 을 2.2 절의  $k_m$ 의 정수 배, 즉  $k_M = k_p \cdot k_m$  ( $k_p$ : 정수)으로 정의하고, (18)과 (23)의 오차를  $k_p$ 를 이용해 재규격화함으로써 해결된다. 이를 통해 이산 파수영역에서의 결과를 2.2 절의 연속적인 접근법의 결과에 근접시킬 수 있다. 이에 대해서는 다음 절에 다시 논의될 것이다.

### 2.3.2 속도장 생성 및 아격자력의 계산

이산 파수공간에서 오차를 기술하기 위해서는 2.3.1 절에서 언급한 바와 같이 에너지 스펙트럼 대신 완전한 등방성 난류유동의 속도장이 주어져야 한다. 등방성 난류의 모델로서 흔히 연속방정식과 주어진 에너지 스펙트럼을 만족하면서 무작위 위상을 가진 속도장을 이용한다.<sup>(10)</sup> 그러나 이는 실제적인 등방성 난류와 거리가 멀다. 본 연구에서는 그 대안으로 Carati 등<sup>(16)</sup>이 제안한 실제 Navier-Stokes 방정식의 해를 이용한 반복계산 방법을 이용하였는데, 이로써 연속방정식과 주어진 에너지

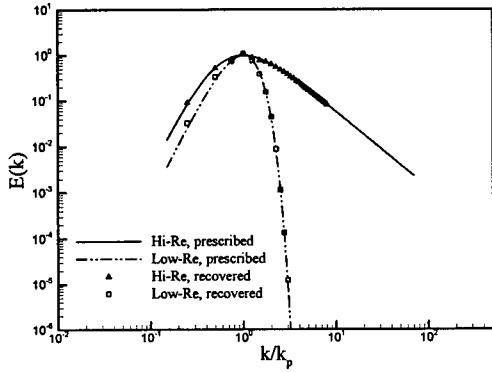


Fig. 1 Prescribed and recovered energy spectra for high-Reynolds number(von Karman) and low-Reynolds number models

스펙트럼을 만족하면서 속도 미분량의 skewness 가 -0.5 에 근접한 실제적인 등방성 난류유동을 생성할 수 있었다.

속도장의 생성에 이용되는 에너지 스펙트럼으로 다음과 같은 von Karman 스펙트럼과 Gaussian 스펙트럼을 고려하였다.

$$E^{high}(k) = \frac{a(k/k_p)^4}{\{b + (k/k_p)^2\}^{17/6}}, \quad (26)$$

$$E^{low}(k) = c(k/k_p)^4 \exp\{-2(k/k_p)^2\}$$

이들은 각각 고 레이놀즈수 및 저 레이놀즈수 유동을 대표하며, 또한 둘 다  $k/k_p = 1$  에서 최대값  $E(k) = 1$  를 가지도록  $a = 2.682, b = 0.417, c = 7.389$  로 주었다. 본 연구의 주된 관심사는 고 레이놀즈수 난류유동이므로, 특별한 언급이 없는 한 모든 결과는 von Karman 모델을 적용한 결과이다. 또  $k_m = 8, k_p = 4$  로 주었다. 따라서  $k_M = k_p \cdot k_m = 32$  이다. 즉, 연속적인 3 차원 파수  $k (0 \leq k \leq 8)$  가 32 개의 등간격 이산파수공간으로 근사됨을 의미한다. Fig. 1 은 생성된 속도장의 스펙트럼을 각각 von Karman 및 Gaussian 모델의 스펙트럼과 비교한 것이다. 그림에서 주어진 에너지 스펙트럼이 잘 복원되었음을 알 수 있다.

이제 이산 파수공간에서 아격자력 (14)를 구해보자. 이때, 이산시스템에서는  $B$  바깥 영역에 모두가 존재하지 않기 때문에 주어진  $N^3$  의 격자로는 (14)를 근사할 수 없다. 따라서, 각 방향으로 2 배 많은 격자점에서 속도장을 생성하고, 이 속도장을  $u^{2N}$  이라 하자. 이때 아격자 응력을 다음과 같이

근사한다.

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \approx \overline{u_i^{2N} u_j^{2N}} - \overline{u_i}^N \overline{u_j}^N. \quad (27)$$

이러한 근사가 타당한 이유는 해상된 모든  $k \leq k_c = k_M$  에 영향을 미치는 비선형항의 상호작용이  $2k_c$  를 넘지 않는 국부적인 파수영역에서 주로 발생하기 때문이다.<sup>(17)</sup> 이 가정은 아격자 예측 모델<sup>(17)</sup>의 유도과정에서 성공적으로 적용된 바 있다. 식 (27)은 푸리에 공간에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\tau}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{G}(\mathbf{k}) \left( \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}}^{p,q,k \leq 2k_M} \hat{u}_i^{2N}(\mathbf{p}) \hat{u}_j^{2N}(\mathbf{q}) \right) - \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}}^{p,q,k \leq k_M} \hat{u}_i^N(\mathbf{p}) \hat{u}_j^N(\mathbf{q}) \quad (28)$$

실제 계산에서는  $(2N)^3$  격자계에서  $u^{2N}$  을 먼저 생성한 후, 이를  $k_M$  에서 필터링함으로써  $u^N$  을 구한다. 이렇게 함으로써  $u^{2N}$  은 파수공간에서 절단파수  $k_M$  까지  $u^N$  과 완전히 같은 정보를 가진다. 최종적으로 식 (28)로 구해진 아격자 응력을 (14)에 대입하여 아격자력의 스펙트럼을 구할 수 있다.

Fig. 2 는 (28)로 구한 아격자력의 스펙트럼을 식 (6)과 Ghosal<sup>(8)</sup>의 연구에서 정의된 아격자력의 스펙트럼과 함께 나타낸 것이다. 비교를 위해 전체 비선형항의 스펙트럼도 함께 나타내었다. Fig. 2 로부터 이산파수공간에서 구한 아격자력은 절단파수 근처를 제외하고 연속파수공간에서 구한 아격자력의 하한과 상한 사이에 있음을 확인할 수 있다. 따라서 (28)의 방법으로 구한 아격자력을 정확한 아격자력으로 간주할 수 있다.

본 연구의 목적은 이산화오차가 해상된 해에 미치는 영향을 조사하는 것이므로 아격자 응력의 모델링 오차는 주된 관심의 대상이 아니다. 따라서 본 연구에서는 경험적인 아격자 응력 모델대신 정의에 따른 정확한 아격자 응력을 사용하였다. 그러나 이 접근법은 이산화오차가 아격자모델에 대한 오차보다 더 크다는 가정을 전제한다. 따라서 이 가정을 검증하기 위해 대표적인 아격자 응력 모델인 Smagorinsky 와점성계수 모델(이하 SM)과 동점성 계수모델<sup>(18,19)</sup>(이하 DSM)의 아격자력 스펙트럼을 구해보았다. 두 모델 모두 아격자 응력을 다음과 같이 모델링한다.

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2C_S \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (29)$$

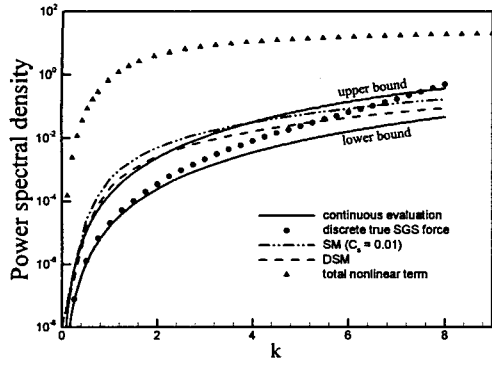


Fig. 2 Power spectra of SGS forces predicted by the continuous and discrete evaluations with the von Karman energy spectrum

이때  $|\hat{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$  이고  $\Delta$ 는 격자 크기이다. 비압축성 유동의 경우  $\tau_{kk}$ 는 모델링되지 않고 압력항에 흡수된다.  $C_S$ 는 조절가능한 계수이며, SM에서 이 값은 시간 및 공간에 대해 상수이다. 반면, DSM에서는 다음과 같이 계산된다.

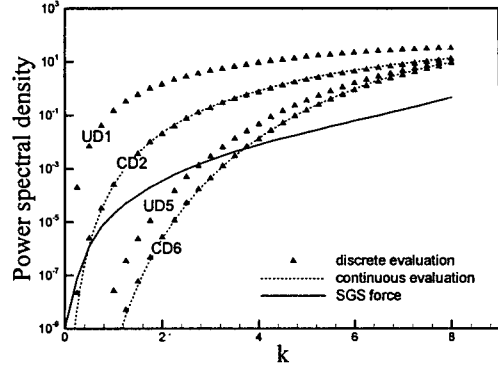
$$C_S \Delta^2 = -\frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle}, \quad (30)$$

이때  $\langle \rangle$ 는 균질방향의 평균을 의미하며

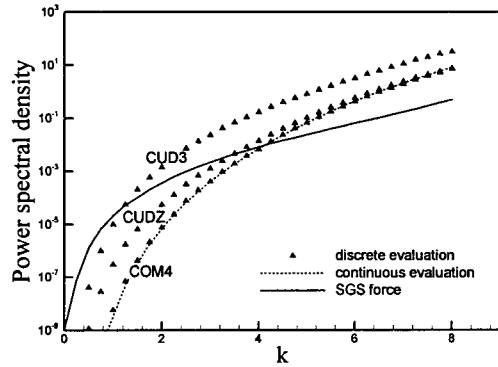
$$\begin{aligned} L_{ij} &= G_T * (\bar{u}_i \bar{u}_j) - \hat{u}_i \hat{u}_j, \\ M_{ij} &= (\hat{\Delta}/\Delta)^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij} - G_T * (|\hat{S}| \bar{S}_{ij}) \end{aligned} \quad (31)$$

로 정의된다. 여기서 임의의  $\phi$ 에 대해  $G_T * \phi \equiv \hat{\phi}$ 는 테스트 필터링을 의미한다. 테스트 필터의 크기는 격자 필터보다 커야 하며, 본 연구에서는 통상적인 값인 2배의 크기로 설정한다. 따라서 테스트 필터와 격자 필터의 크기 비는  $\hat{\Delta}/\Delta = 2$ 이다.

von Karman 모델에 대한 SM과 DSM의 아격자력의 스펙트럼을 Fig. 2에 나타내었다. SM의 경우  $C_S = 0.01$ 로 주었다. 두 모델 모두 전체 비선형항에 대한 아격자력의 크기를 어느 정도 예측함을 볼 수 있다. 그러나, 낮은 파수에서의 아격자력은 크게 예측하고 높은 파수에서는 작게 예측함을 알 수 있다. 한편, DSM에 의해 예측된  $C_S$ 는 약 0.008이며, 따라서 아격자력의 스펙트럼을 SM



(a) UD1, CD2-div, UD5 and CD6-div



(b) CUD3, CUDZ and COM4-div

Fig. 3 Finite differencing errors for various schemes with the von Karman model compared to the SGS force

보다 다소 작게 예측한다. 그러나  $C_S$ 의 값에 관계없이 스펙트럼의 형태는 변하지 않으며 이 형태를 결정하는 것은  $|\hat{S}|S$ 임을 확인할 수 있다. 실험 및 DNS 데이터를 이용한 여러 선형적 실험(a priori test)결과<sup>(20, 21)</sup>로부터 아격자 응력  $\tau$ 와  $|\hat{S}|S$ 의 상관관계가 매우 낮다는 사실이 잘 알려져 있다. 그러나 유동장의 여러 스케일 간의 에너지 전달 메커니즘과 관련하여 와점도 모델의 오차가 어떤 역할을 하는 지에 대해서는 잘 알려져 있지 않다. 따라서 파수공간에서 SM 계열 모델의 거동이 분석될 필요가 있다. 예를 들어, Fig. 2의 스펙트럼의 형태로부터 상수 와점도 모델(SM)을 등방성 난류 유동의 LES에 적용할 경우 나타나는 중간파수 영역의 다소 과도한 소산 및 절단파수 근처의 pile-up 현상<sup>(22)</sup>을 잘 설명할 수 있다.

그러나, 이러한 아격자 응력 모델의 무시할 수

없는 오차에도 불구하고 본 연구에서는 다음과 같은 이유로 이를 고려하지 않는다. 첫째, 아격자 응력 모델의 부정확성에도 불구하고 아격자 소산량의 상관관계는 매우 높기 때문이다.<sup>(20)</sup> 둘째, 같은 아격자응력 모델을 적용한 스펙트럴 기법의 결과를 정확한 해로 정의할 경우, 유한차분기법을 적용한 기법의 결과에는 오직 이산화 오차만이 존재하기 때문이다. 이 경우 아격자 응력모델의 오차는 이산화오차를 결정하는 데 피동적인 역할만을 한다.

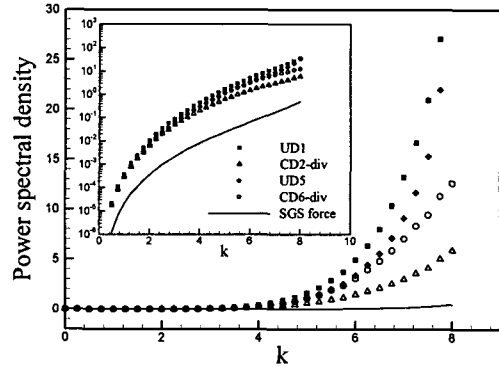
### 3. 오차스펙트럼의 분석

Fig. 3(a)는 식 (18)을 이용해 UD1 및 UD5 와 이에 대응하는 CD2-div 및 CD6-div 의 유한 차분오차 스펙트럼을 아격자력의 스펙트럼과 함께 나타낸 것이다. Fig. 3(b)는 마찬가지로 CUD3, CUDZ 및 COM4-div 의 유한 차분오차 스펙트럼을 나타낸다. 중심차분기법들(CD2-div, CD6-div, COM4-div)에 대해서는 식 (11)로 주어진 연속파수에서의 유한 차분오차 스펙트럼을 함께 나타내었다. 그림에서 두 결과는 거의 일치함을 알 수 있으며, 따라서 본 연구의 이산 접근법은 연속파수에서의 결과를 매우 잘 재현하고 있음을 알 수 있다.

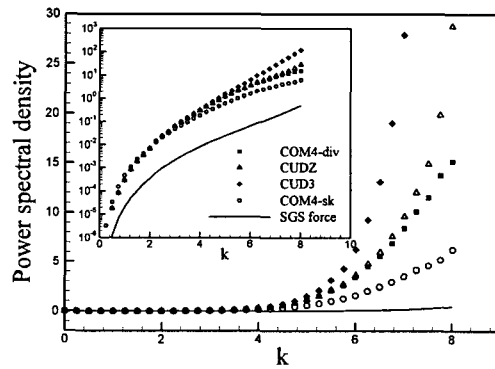
Fig. 3 에서 고차의 차분기법은 저차의 기법에 비해 작은 유한 차분오차를 가지며, 상류차분기법들은 각각에 대응하는 중심차분에 비해 모든 파수에서 큰 유한 차분오차를 가짐을 알 수 있다. 또한 1 차정확도의 상류차분과 같은 저차의 상류차분의 유한 차분오차는 아격자 응력보다 커서 LES 에 적용될 수 없음을 알 수 있다. 물론, 격자수가 많아지면 유한 차분오차가 감소한다. 그러나 이때 아격자 응력 또한 함께 감소하기 때문에 격자수를 증가시켜도,  $k_m$  이 관성영역(inertial range)에 존재하는 한 유한 차분오차와 아격자 응력의 상대적인 비는 거의 변하지 않는다.<sup>(9)</sup> 이는 매우 잘 알려진 LES의 딜레마이며, 격자필터를 사용하는 한 해결할 수 없는 문제이다.

Fig. 4(a)는 UD1, CD2-div, UD5 및 CD6-div의 파수중첩오차를 보여준다. 또 컴팩트 차분기법들, 즉 COM4-div, CUDZ 및 CUD3의 파수 중첩오차는 Fig. 4(b)에 나타내었다. 유한 차분오차와는 달리 차분기법에 상관없이 모든 파수에서 파수중첩 오차는 아격자 응력보다 크음을 알 수 있다. 따라서 이 결과는 저차의 차분기법에서도 파수 중첩 오차가 더 심각한 이산화오차를 암시한다.

중심 차분기법의 경우, 고차정확도의 기법이 더



(a) UD1, CD2-div, UD5, CD6-div



(b) COM4-div, CUDZ, CUD3 and COM4-sk

Fig. 4 Aliasing errors for various schemes with the von Karman spectrum

큰 파수 중첩오차를 보이는 데, 이는 Ghosal<sup>(8)</sup> 등의 결과와 일치한다. 그러나, 상류차분기법의 경우 파수 중첩오차가 수정파수의 허수부에 비례함을 알 수 있다. 즉, 상류차분에 대한 일반적인 믿음과 달리 수치소산이 커질수록 파수중첩오차를 증가시키고 있다. 예를 들어, UD1과 CUD3의 파수 중첩오차는 각각 UD5 및 CUDZ의 그것에 비해 커진다. 뿐만 아니라, 상류차분의 파수 중첩오차는 대응하는 중심차분의 오차에 비해 커짐을 확인할 수 있다.

이러한 결과는 서론에 제기한 질문 1)과 3)에 대해 부정적인 답을 준다. 즉, 수치소산이 증가할수록 유한 차분오차와 파수 중첩오차가 모두 증가하므로 최적 상류차분은 존재하지 않음을 시사한다. 그러나 상류차분에서의 파수 중첩오차의 증가는 오차 파워스펙트럼의 정의에 따른 직접적인 결과일 뿐으로 실제 오차의 증가를 의미하는 지에 대해서는 매우 의심스럽다. 이는 다음 절에서



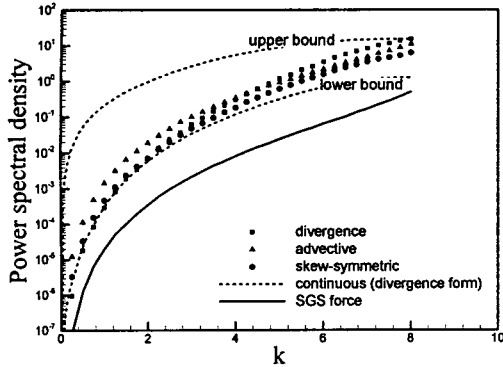


Fig. 5 Comparison of aliasing errors for different forms of nonlinear term with COM4

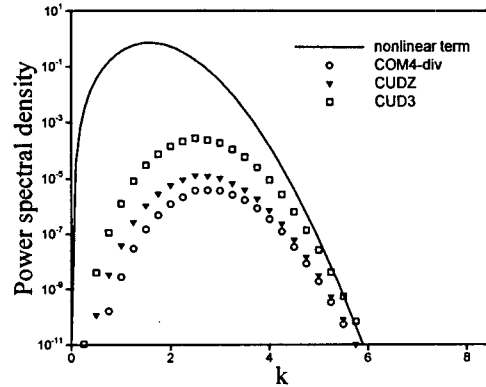


Fig. 6 Finite differencing errors with the low Reynolds number model

수행될 1차원 해석을 통해 보다 명확히 분석될 것이다.

또한, 본 연구의 해석방법은 미리 주어진  $E(k)$ 가 시간에 대해 변하지 않으므로 정적인 파수중첩 오차(static aliasing error)만을 구할 수 있다. 따라서 시간전진이 고려되는 실제 유동장의 오차와 다를 수 있다.<sup>(10)</sup> 따라서 Fig. 3 과 Fig. 4 의 오차 파워스펙트럼은 그 오차가 해당 파수의 에너지를 증폭시키는지 또는 감쇄시키는 지에 대한 정보를 주지 않으며, 단지 그 크기만을 나타낼 뿐이다. 따라서 시간전진의 효과가 고려되는 동적 오차해석이 이루어져야 하며, 이는 저자들의 다음 연구<sup>(23)</sup>에서 다루어 질 것이다.

Fig. 5는 보존형, 대류형 및 엇대칭형의 비선형항을 적용한 COM4의 파수 중첩오차의 파워스펙트럼을 비교한 것이다. 또 아격자력 및 연속파수영역에서 식 (13)을 이용해 구한 파수 중첩오차의 상한 및 하한값도 함께 나타내었다. 이 결과로부터 COM4-sk의 파수중첩오차가 최소가 됨을 알 수 있는데, 이는 Kravchenko와 Moin,<sup>(9)</sup> Zang<sup>(24)</sup> 및 Blaisdell 등<sup>(25)</sup>의 결과와 일치한다. 그러나 Fedioun 등<sup>(10)</sup>의 결과와는 달리 대류형(COM4-adv)의 경우 파수 중첩오차의 감소가 명확하지 않으며 낮은 파수에서는 오히려 COM4-div보다 더 큰 오차를 보임을 알 수 있다. 그러나 파수 중첩오차가 최소가 되는 COM4-sk의 오차 또한 아격자력의 크기보다 훨씬 크다. 따라서 이 결과는 엇대칭형을 적용해 성공적인 결과를 얻은 바 있는 Part I의 난류 채널 유동장의 LES 결과를 단지 부분적으로만 설명해준다.

한편, (26)의 저 레이놀즈수 (Gaussian) 모델을 적용한 오차스펙트럼은 파수중첩오차 뿐아니라 아격

자력의 스펙트럼 또한 모든 차분기법에서  $10^{-12}$  이하의 매우 작은 값(machine zero)이 됨을 알 수 있었다. 즉, 주어진 격자에서 에너지를 가지는 모든 파수가 해상되었음을 의미한다. 이 경우 LES는 더 이상 의미가 없으며, 계산결과는 곧 DNS 결과임을 의미한다. 그러나 이 경우에도 유한차분오차는 여전히 존재한다. Fig. 6은 이 경우의 유한차분오차의 파워 스펙트럼을 전체 비선형항의 스펙트럼과 함께 나타낸 것이다. 이 때 COM4의 유한차분 오차는 모든 파수에서 비선형항에 비해 매우 작으며 CUDZ 및 CUD3의 오차도 그리 크지 않음을 볼 수 있다. 따라서 이 결과는 층류유동과 잘 해상된 DNS에서 상류차분기법이 거둔 성공을 잘 설명해준다.

#### 4. 비선형항에 대한 1차원 해석

이 절에서는 파수 중첩오차에 미치는 상류차분의 영향을 살펴보기 위해 Kravchenko와 Moin<sup>(9)</sup>과 유사한 1차원 해석을 수행하였다.  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된  $u, v$ 에 대해  $duv/dx$ 의 수치적 구현을 생각하자. 이 때 다음과 같은  $u, v$ 의 푸리에 계수를 가정한다.

$$\hat{u}(k) = \hat{v}(k) = \sqrt{E(k)} \quad (32)$$

이 때,  $E(k)$ 는 (26)의 고 레이놀즈 수 모델 즉, von Karman 스펙트럼이다. 이제 이산화된 등간격 격자점  $x_i (i = 0, 1, \dots, N)$ 로의  $u, v$ 의 투영  $u_i, v_i$ 를 생각하자.  $x_i$ 에서 정의된,  $duv/dx$ 와 해석적으로 같은  $N_1$ 과

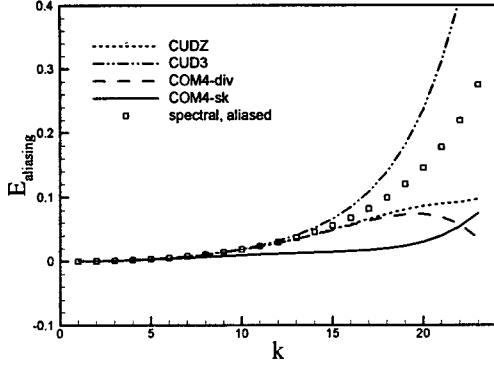


Fig. 7 Aliasing errors for various schemes with one-dimensional von Karman spectrum

$N_2$  를 정의하자.

$$N_1 = \frac{\delta uv}{\delta x} \tag{33}$$

$$N_2 = u \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta x}$$

여기서  $\delta/\delta x$  는 유한차분을 의미한다. 따라서 엇대칭형은  $0.5(N_1+N_2)$ 임을 알 수 있다.  $N_1$  과  $N_2$  의 푸리에변환은 다음과 같다.

$$\hat{N}_1(k) = ik'(k) \left( \sum_{n+m=k} \hat{u}_n \hat{v}_m + \sum_{n+m=k \pm N} \hat{u}_n \hat{v}_m \right)$$

$$\hat{N}_2(k) = \sum_{n+m=k} (\hat{u}_n ik'(m) \hat{v}_m + ik'(n) \hat{u}_n \hat{v}_m) + \sum_{n+m=k \pm N} (\hat{u}_n ik'(m) \hat{v}_m + ik'(n) \hat{u}_n \hat{v}_m) \tag{34}$$

식 (34)의  $N_1$  과  $N_2$  의 둘째 항들이 파수중첩오차를 나타낸다. 이들을 각각  $E_1^{alias}(k)$ ,  $E_2^{alias}(k)$ 라 하면 2절에서와 같이

$$\epsilon_1^{alias}(k) \equiv \frac{2\pi}{L} \left\{ E_1^{alias}(k) \cdot E_1^{alias}(k)^* \right\} \tag{35}$$

으로 파수중첩 오차의 파워 스펙트럼을 정의할 수 있다. 한편 (34)의 수정파수는 일반적으로  $k'(k) = k_r(k) + ik_i(k)$  로 나타낼 수 있는 데, 이를 (34) 및 (35)에 대입하여 정리하면 보존형의 경우 파수중첩오차의 스펙트럼은

$$\epsilon_1^{alias}(k) = (k_r^2 + k_i^2) \left( \sum_{n+m=k \pm N} \hat{u}_n \hat{v}_m \right)^2 \tag{36}$$

와 같다. 식 (36)으로부터 수정파수의 허수부는 파

수중첩오차를 증가시키는 데 기여함을 쉽게 알 수 있다. 예를 들어, UD5의 파수 중첩오차는 모든 파수에서 CD6 보다 큰 데, 이는 두 기법의 수정파수의 실수부가 같기 때문이다. UD1 과 CD2, 또는 UD7 과 CD8 등의 상류-중심 차분 쌍에 대해서도 마찬가지로 결론을 얻을 수 있다. 따라서 (36)은 2절의 결과를 잘 설명하는 1차원 모델이다.

Fig. 7 은 CUDZ, CUD3, COM4-div, COM4-sk 및 스펙트럴기법의 파수중첩오차를 나타내며 이 때 격자수는  $N = 48$  이다. Fig. 7로부터 파수 중첩오차의 파워스펙트럼이 (수정파수)<sup>2</sup> 에 의해 결정됨을 확인할 수 있다. (36)의 정의에 따라, CUD3의 파수중첩오차는 스펙트럴기법의 오차보다도 크게 된다. 또한 1차원 해석에서도 대부분의 파수영역에서 COM4-sk 가 파수 중첩오차를 최소화시킴을 알 수 있다.

### 5. 결론

본 연구에서는 파수공간에서의 정적 오차해석을 통해 LES에 있어 중심 및 상류 컴팩트 차분기법의 적합성을 평가하였다. 수치소산이 해상된 해에 미치는 영향을 조사하기 위해 연속 및 이산화된 파수공간에서의 등방성 난류유동의 이산화오차의 파워 스펙트럼을 계산하였다. 특히, 연속 파수공간에서 수행된 Ghosal<sup>(8)</sup>의 해석 기법을 이산 파수공간으로 투영시키는 방법을 제안하였으며, 이를 통해 상류차분과 다양한 형태의 비선형항에 대한 유한 차분 및 파수 중첩오차의 스펙트럼을 구할 수 있었다. 해석 결과, 중심차분기법의 경우 고차의 차분기법이 유한 차분오차를 줄이는 대신 파수 중첩오차를 증가시킨다는 기존의 결과를 확인할 수 있었다. 또, 본 연구에서 제안된 이산 파수에서의 해석기법은 연속 파수에서 유도된 이산화오차의 스펙트럼을 정확하게 재현할 수 있을 뿐만 아니라 오차를 보다 명확하게 정의할 수 있음을 알 수 있었다.

또, 중심 차분기법의 경우 대류항을 엇대칭형으로 구성함으로써 파수 중첩오차를 최소화할 수 있음을 밝혔다. 이는 Part I과 같은 수치 실험이나 기존의 1차원 모델을 이용한 이론적 연구에서 이미 알려진 사실이나, 본 연구는 Navier-Stokes 모델을 적용한 최초의 이론적 결과라는 의의를 가진다.

그러나, 일반적인 믿음과는 달리 상류차분의 파수 중첩오차는 대응하는 중심차분의 오차에 비해 크며 수치소산이 커질수록 파수 중첩오차가 커짐을 알 수 있었다. 그러나, 이 결과는 오차 스펙트

럼의 정의에 따른 결과일 뿐으로, 상류차분을 적용한 실제 수치해에 대해서는 아무런 정보를 주지 않는다. 따라서, 실제 이산화오차는 수치해와 오차항의 상호작용 등 시간전진 효과를 고려한 동적 오차해석을 통해 밝혀져야 하며, 이는 저자들의 이어지는 다음 논문<sup>(23)</sup>에서 수행될 것이다.

### 후 기

본 연구는 교육부 BK21사업과 과학기술부 창의적연구진흥사업의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Breuer, M., 1998, "Numerical and Modeling Influences on Large Eddy Simulations for the Flow Past a Circular Cylinder," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, pp.512~521.
- (2) Garnier, E., Mossi, M., Sagaut, P., Comte, P. and Deville, M., 1999, "On the Use of Shock-Capturing Schemes for Large-Eddy Simulation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 153, pp. 273~311.
- (3) Mossi, M and Sagaut, P., 2003, "Numerical Investigation of Fully Developed Channel Flow Using Shock-Capturing Schemes," *Computers & Fluids*, Vol. 32, pp. 249~274.
- (4) Ladeinde, F., Cai, X., Visbal, M and Gaitonde, D. V., 2001, "Turbulence Spectra Characteristics of High Order Schemes for Direct and Large Eddy Simulation," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 36, pp. 447~474.
- (5) Meinke, M., Schroder, W., Krause, E. and Rister, Th., 2002, "A Comparison of Second- and Sixth-order Methods for Large-Eddy Simulations," *Computers & Fluids*, Vol. 31, pp. 695~718.
- (6) Park, N., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2003 "On the Suitability of Centered and Upwind-biased Compact Different Schemes for Large Eddy Simulation: Part I – Numerical Test," *Trans. Of the KSME B*, Vol. 27, No. 7, pp. 973~983.
- (7) Vreman, B. Geurts, B. and Kuerten, H., 1996 "Comparison of Numerical Schemes in Large-Eddy Simulation of the Temporal Mixing Layer," *Int. J. Numer. Met. Fluids*, Vol. 22, pp. 297~311.
- (8) Ghosal, S., 1996, "An Analysis of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulence," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 187~206.
- (9) Kravchenko, A. G. and Moin, P., 1997, "On the Effect of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulent Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 131, pp. 310~322.
- (10) Fedioun, I., Lardjane, N. and Gökcalp, I., 2001. "Revisiting Numerical Errors in Direct and Large Eddy Simulations of Turbulence: Physical and Spectral Space Analysis," *J. Comput. Phys.*, Vol. 174, pp.816~851.
- (11) Lele, S. K., 1992, "Compact Finite-Difference Schemes With Spectral-Like Resolution," *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, pp. 16~42.
- (12) Zhong, X., 1998, "High-Order Finite-Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Boundary-Layer Transition," *J. Comput. Phys.*, Vol. 144, pp. 662~709.
- (13) Tolstykh, A. I. and Lipavskii, M. V., 1998, "On Performance of Methods with Third- and Fifth-Order Compact Upwind Differencing," *J. Comput. Phys.*, Vol. 140, pp. 205~232.
- (14) Lesieur, M., 1987, *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academics, Dordrecht.
- (15) Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., 1988, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- (16) Carati, D., Jansen, K. and Lund, T., 1995, "A Family of Dynamic Models for Large-Eddy Simulation," Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research.
- (17) Domaradzki, J. A. and Loh, K., C., 1999, "The Subgrid-Scale Estimation Model in the Physical Space Respresentation," *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 2330~2342.
- (18) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. 1991, "A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 1760~1765.
- (19) Lilly, D., 1992, "A Proposed Modification of the Germano Subgrid Scale Closure Method," *Phys. Fluids A*, Vol.4, pp. 633~634.
- (20) Clark, R. G., Ferziger, J. H., and Reynolds, W. C., 1979, "Evaluation of Subgrid Models Using an Accurately Simulated Turbulent Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 91, pp. 1~16.
- (21) Liu, S., Meneveau, C., and Katz, J., 1994, "On the Properties of Similarity Subgrid-Scale Models as Deduced from Measurements in a Turbulent Jet," *J. Fluid Mech.*, Vol. 275, pp. 83~119.
- (22) Kang, H. S., Chester, S., and Meneveau, C., 2002, "Decaying Turbulence in an Active-Grid-Generated Flow and Comparisons with Large-Eddy Simulation," *J. Fluid Mech.*, in press.
- (23) Park, N., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2003 "On the Suitability of Centered and Upwind-biased Compact Different Schemes for Large Eddy Simulation: Part III – Dynamic Error Analysis," *Trans. Of the KSME B*, Vol. 27, No. 7, pp. 995~1006.
- (24) Zang, T. A., 1991, "On the Rotation and Skew-Symmetric Forms for Incompressible Flow Simulations," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 7, pp. 27~40.
- (25) Blaisdell, G. A., Spyropoulos, E. T. and Qin, J. H., 1996, "The Effect of the Formulation of Nonlinear Terms on Aliasing Errors in Spectral Methods," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 21, pp. 207~219.