

# 축대칭 문제에서의 동적 응력확대계수의 계산

## Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors in Axisymmetric Problems

이 성 희†

Lee, Sung-Hee

심 우 진\*

Sim, Woo-Jin

(논문접수일 : 2003년 3월 13일 ; 심사종료일 : 2003년 6월 10일)

### 요 지

본 논문에서는 균열을 지닌 축대칭 문제를 해석하기 위하여 시간적분형 운동방정식을 바탕으로 한 유한요소 해법을 제시한다. 유한요소메쉬는 8절점 등매개변수 사변형 요소와 균열선단에서의 1/4절점 삼각형 특이요소로 구성되며, 동적 응력확대계수는 균열면상의 1/4절점의 y방향 변위로부터 구한다. 제시된 해법의 정확성과 타당성을 검증하기 위하여 내부에 원환균열을 지닌 무한 탄성체가 균열면상에서 충격하중을 받을 때의 동적 응력확대계수를 계산하고 타 수치결과와 비교 검토하였다. 응용 예제로서 원환균열과 원주균열을 지닌 중실축과 중공축의 동적 응력확대계수를 균열의 길이와 축의 길이에 따른 영향을 자세히 조사하였다. 균열길이가 커지면 동적 응력확대계수가 커지고, 축의 길이가 길어지면 동적 응력확대계수 곡선의 폭도 함께 증가됨을 확인하였다. 그리고 균열의 위치가 안쪽에 포함될 경우보다는 바깥쪽에 포함될 때 더 큰 동적 응력확대계수가 발생됨을 밝힌다.

**핵심용어** : 과도, 축대칭, 동적 응력확대계수, 원환균열, 원주균열, 유한요소법

### Abstract

In this paper, the finite element method for the elastodynamic axisymmetric fracture analysis is presented in matrix form through the application of the Galerkin method to the time integral equations of motion with no inertia forces. Isoparametric quadratic quadrilateral element and triangular crack tip singular elements with one-quarter node are used in the mesh division of the finite element model. To show the validity and accuracy of the proposed method, the infinite elastic medium with the penny shaped crack is solved first and compared with the analytical solution and the numerical results by the finite difference method and the boundary element method existing in the published literatures, and then the dynamic stress intensity factors of solid and hollow cylinders of finite dimensions having penny-shaped cracks and internal and external circumferential cracks are computed in detail.

**Keywords** : transient, axisymmetric, dynamic stress intensity factors, penny-shaped crack, circumferential crack, finite element method

### 1. 서 론

과도 선형 동탄성 문제들의 해석은 많은 연구자들에 의해 진행되어 왔으며, 그 해법으로는 수치적 해법,<sup>1)~21)</sup> 해석적 해법,<sup>22)~26)</sup> 그리고 실험적 해법<sup>27),28)</sup> 등으로 분류할 수가 있다. 그리고 수치적 해법에는 유한요소법(FEM),<sup>1)~12)</sup>

경계요소법(BEM),<sup>13)~19)</sup> 그리고 유한차분법(FDM),<sup>20),21)</sup> 등이 있다. 수치적 해법은 기하학적 형상 및 차원에 제한이 없으며, 실험적 해법에 비해 실험을 제작하지 않고서도 해를 미리 예측할 수 있다는 점에서 많은 관심을 끌고 있다. 본 논문에서는 유한요소법을 도구로 하여 균열을 지닌 축대칭 문제에서의 동적 응력확대계수에 관해 연구한다.

† 책임저자, 금오공과대학교 생산기술연구소 연구원  
전화: 054-467-4221; Fax: 054-467-4221  
E-mail: sunghee@kumoh.ac.kr

\* 정회원, 금오공과대학교 기계공학부 교수

\* 이 논문에 대한 토론을 2003년 9월 30일까지 본 학회에 보내주 시면 2003년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

축대칭 구조물은 형상, 재질, 하중조건 등이 중심축에 대해 회전대칭 조건을 만족하는 형태로 실제 산업현장에서 자주 접하게 된다. 예를 들면, 압력 용기, 복합 원통, 화학반응 용기, 플라이휠, 동력 전달에 사용되는 중실축 혹은 중공축 등이 여기에 속한다. 이러한 축대칭 문제들에 대한 응력해석은 정적하중의 경우에는 많은 문헌<sup>29),30)</sup>에서 취급하고 있으나, 동적하중의 경우에는 해석이 다양하지 못하다.

저자들은 최근에 기존의 시간미분형 운동방정식을 바탕으로 한 동탄성 해법과는 달리 시간적분형 운동방정식을 바탕으로 한 시간영역에서의 동탄성 해법을 발표<sup>7)</sup>하였다. 그리고 이를 응용하여 축대칭 문제에서의 기하학적 불연속(노치, 홈, 원공 등)이 응력집중에 끼치는 영향을 조사하여 발표<sup>9)</sup>하였다.

본 논문에서는 그 해법의 응용으로서 원환균열 및 원주 균열을 지닌 축대칭 문제의 동적 응력확대계수의 수치계산에 적용하고자 한다. 이를 위해서 내부에 원환균열을 지닌 무한 탄성체가 균열면상에서 충격하중을 받을 때의 동적 응력확대계수를 계산하고, 타 수치결과와 비교하여 제시된 해법의 정확성과 타당성을 검증한다. 그리고 다른 예제로써 축대칭 문제의 여러 형상 중에서 동력 전달에 많이 사용되는 중실축과 중공축이 원환균열과 원주균열을 지닐 때 균열의 길이와 축의 길이가 동적 응력확대계수에 미치는 영향에 대해 조사하고 논의한다.

## 2. 축대칭 해석을 위한 유한요소방정식

### 2.1 지배방정식

과도 선형 동탄성 문제의 지배방정식은 운동방정식, 변형률-변위 관계식, 응력-변형률 관계식으로 구성된다.<sup>31),32)</sup> 즉,

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + \rho f_i(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \{ u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t) \} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{x}$ 는 공간 벡터,  $t$ 는 시간 변수,  $\sigma_{ij}$ 는 응력,  $\rho$ 는 밀도,  $f_i$ 는 체적력,  $u_i$ 는 변위,  $\epsilon_{ij}$ 는 변형률,  $D_{ijkl}$ 은 탄성 계수 행렬이다. 그리고, 위와 같은 지배방정식을 풀기 위한 경계 및 초기조건은 다음과 같다.

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \hat{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad t_i(\mathbf{x}, t) = \hat{t}_i(\mathbf{x}, t)$$

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_{0i}(\mathbf{x}, 0), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) = \dot{u}_{0i}(\mathbf{x}, 0) \quad (4)$$

여기서,  $\hat{u}_i$ 와  $\hat{t}_i$ 는 경계면에서의 변위와 표면력값이며,  $u_{0i}$ 와  $\dot{u}_{0i}$ 는 변위와 속도에 관한 초기값이다.

식(1), (2), (3) 및 (4)는 축대칭 문제의 경우에 원통좌표계( $r, \theta, z$ )로 표현되며 식(2), (3)은 다음처럼 행렬식으로 표현된다.<sup>10)~12)</sup>

#### 2.1.1 변위

$$\{u\} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (5)$$

여기서,  $u, w$ 는  $r$ 과  $z$  방향 변위이며

$$\{\delta\}^T = \{(u_1, w_1), (u_2, w_2), \dots, (u_m, w_m)\} \quad (6)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 2.1.2 변형률

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = [B]\{\delta\} \quad (8)$$

여기서,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \dots & \frac{N_m}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial z} & \frac{\partial N_m}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (9)$$

#### 2.1.3 응력

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{\delta\} \quad (10)$$

여기서,

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \text{Symm.} & & 1 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

위 식들에서,  $\{\delta\}$ 는 절점변위 벡터,  $[M]$ 은 형상함수 행렬,  $[B]$ 는 변형률-변위 행렬, 그리고  $[D]$ 는 탄성계수 행렬이다.

## 2.2 유한요소방정식

시간영역에서의 동탄성 문제에 관한 기존의 해법은 식(1)을 바탕으로 한 변분식이 사용되었다. 그러나 식(1)은 라플라스 변환을 이용하여 시간적분형 운동방정식으로 바꿀 수가 있다.<sup>7)</sup>

$$g^* \sigma_{ij,j} + g^* \rho f_i - \rho \{-t \dot{u}_{0i} - u_{0i} + u_i\} = 0 \quad (12)$$

여기서  $g = g(t) = t$  이다.

식(12)에 변분을 곱하고 그 영역적분을 영으로 하면 변분식이 얻어진다.

$$\int_{\Omega} [g^* \sigma_{ij,j} + \rho \{g^* f_i + (t \dot{u}_{0i} + u_{0i})\} - \rho u_i] \delta u_i d\Omega = 0 \quad (13)$$

체적력을 무시하고, 부분적분을 통하여 위 식을 전개하면 다음과 같은 변분식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g^* \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (t \dot{u}_{0i} + u_{0i}) \delta u_i d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)의 첫항을 계산하기 위해서, 시간축을 등간격으로 나누고, 응력분포가 각 시간구간에서 일정하다고 가정한다. 변위와 변형률에 대해서도 동일한 가정이 성립한다. 그러나, 이러한 가정은 미분형 방정식을 기본으로 한 변분식에는 사용할 수가 없다.

동탄성 문제의 시간영역 해석에서 종속함수는 시간함수와 공간함수의 곱의 시리즈의 표현을 수식전개시에 많이 이용한다.<sup>11)</sup>

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \quad (15)$$

여기서,  $\Phi_n(t)$ 는 전시간축상의 시간절점에 관한 내삽함수로서 시간구간에서 다음처럼 정의된다.

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= 1, \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ \Phi_n(t) &= 0, \quad \text{그 밖의 다른 구간에서} \end{aligned} \quad (16)$$

$\sigma_{ij}^n(\mathbf{x})$ 는 임의의 시간구간에서 일정하며 공간변수에 관한 응력함수이다. 식(15)를 식(14)의 등식 좌측의 첫 항에 대입하고, 초기치가 영이라고 가정하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N (N-n + \frac{1}{2}) \Delta t^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, 시간증분  $\Delta t$ 는 일정하다. 식(17)에서 등식 우측의 외력항은 초기에 힘이 가해지고 그 후에 일정하게 유지되는 것으로 가정했을 때 다음처럼 된다.

$$\int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma = \frac{t^2}{2} \int_{\Gamma} \hat{t}_i(\mathbf{x}) \delta u_i d\Gamma \quad (18)$$

여기서,  $t_i(\mathbf{x}, t) = \hat{t}_i(\mathbf{x}) H(t)$ 이며,  $H(t)$ 는 단위계단함수이다. 식(18)을 식(17)에 대입하고 행렬식으로 표현하면, 동탄성 문제의 시간영역에서의 일반적 해석을 위한 유한요소방정식이 다음처럼 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta t^2 \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^N \\ & + \int_{\Omega} \rho [M]^T [M] d\Omega \{u_i\}^N \\ & = \frac{t^2}{2} \int_{\Gamma} [M]^T \hat{t}_i(\mathbf{x}) d\Gamma \\ & - \Delta t^2 \sum_{n=1}^{N-1} (N-n + \frac{1}{2}) \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^n \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)의 유한요소방정식은 동탄성 문제의 일반적 해석을 위한 것이므로, 그 식에 앞 절에서 설명된 축대칭 문제에서의 응력, 변형률 및 변위에 관한 행렬식 그리고 원통좌표계의 미소체적( $d\Omega = 2\pi r dr dz$ )과 미소면적(내압:  $d\Gamma = 2\pi r dz$ , 축하중:  $d\Gamma = 2\pi r dr$ )을 각각 대입하면 원통형 축대칭 문제에 관한 유한요소방정식이 얻어진다. 따라서, 각 시간구간에서 종속함수가 일정하게 변한다는 가정하에서 축대칭 문제 해석을 위한 유한요소방정식은 다음처럼 표현된다.

$$[\bar{K}]\{\delta\}^N = \{\bar{F}(t)\} + \{\bar{R}\}^{N-1} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 [K] &= 2\pi \int_0^a [B]^T [D] [B] r dr dz, \\
 [M] &= 2\pi \int_0^a \rho [N]^T [N] r dr dz, \\
 [\bar{K}] &= \left[ \frac{1}{2} \Delta t^2 [K] + [M] \right], \\
 \{\bar{F}\} &= \pi \int_0^a [N]^T \hat{t}_i r dz, \\
 \{\bar{R}\}^{N-1} &= -\frac{1}{2} \Delta t^2 [K] \sum_{n=1}^{N-1} (2N-2n+1) \{\delta\}^n
 \end{aligned} \quad (21)$$

식(20)에서  $[\bar{K}]$ 는 일정하므로, 시간축상에서 매시간 계산작업은  $t = N\Delta t$ 로 하여  $\{\bar{F}\}$ 를 계산하고,  $\{\bar{R}\}^{N-1}$ , 즉, 과거의 동적변위가 현시각에 미치는 영향을 계산한 후에, 가우스 소거법을 이용해서 식(20)을 풀면 된다.

### 3. 수치해석 예

먼저, 내부에 원환균열을 지닌 무한 탄성체가 균열면상에서 충격하중을 받을 때의 동적 응력확대계수(dynamic stress intensity factor, DSIF)를 구하고 타 수치결과와 비교하여 제시된 해법과 이를 바탕으로 만들어진 유한요소 프로그램의 타당성을 확인한다. 이를 근거로 하여 나머지 예제들에서는 원환균열과 원주균열을 지닌 중심축 및 중공축의 여러 가지 기하학적 변수 변환에 따른 DSIF를 계산하고 비교한다. 한편 유한요소 메쉬에는 8절점 등매개변수 사변형 요소를 사용하였으며, 균열선단에서는 변형을 분포가  $1/\sqrt{r}$ 의 특이성을 갖는 삼각형 특이요소를 사용하고 (Fig. 1(b) 참조),  $\theta = 180^\circ$  (균열면)에 위치한 1/4절점에서의 균열개구변위로부터 DSIF를 구한다. 수치 계산에 사용된 물성치는 강철의 데이터로써 밀도는  $\rho = 7.85 \times 10^3$

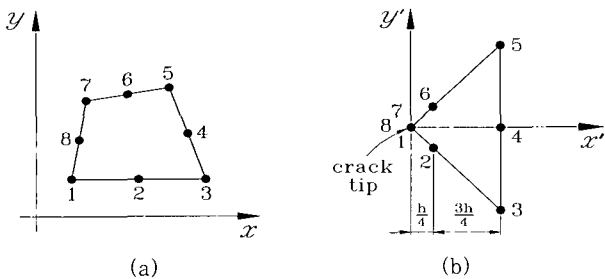


Fig. 1 (a) 8-noded quadrilateral isoparametric element  
(b) Triangular quarter point element with  $r^{-1/2}$  singularity

kg/m<sup>3</sup>, 탄성계수는  $E = 205 \times 10^9$  kg/m sec<sup>2</sup>, 프와송비는  $\nu = 0.29$ 로 하였으며, 이때 횡파속도  $c_2 = 3.182 \times 10^3$  m/sec로 계산된다. 그리고 무차원화된 시간증분  $\beta$ 를 다음처럼 정의하여 사용한다.

$$\beta = c_2 \Delta t / a \quad (22)$$

### 3.1 내부에 원환균열을 지닌 무한 탄성체가 균열면상에서 충격하중을 받을 때

Fig. 2(a)에서와 같이 축대칭형 무한 탄성체 내부에서 원환균열(penny-shaped crack)면상에 수직하게 충격하중  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ 이 작용하는 문제를 해석하기 위하여, Fig. 2(b)에서처럼 대칭성을 이용하여 유한요소모델을 만들었으며, 균열길이( $a = 25$  mm)와 반경( $b$ )의 비는 1:10, 원통길이( $L = 10a$ )는 반경길이의 동일하게 하였으며, 경계조건은 그림에서처럼 롤러로 고정하였다. 이때 사용된 총 요소수는 170개 그리고 총 절점수는 553개이다.

평면변형률 그리고 모드 I 조건하에서, 균열선단 주위의  $x, z$ 방향의 변위장은 다음과 같다.<sup>33)</sup>

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \frac{K_I(t)}{G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서,  $G$ 는 전단계수이고,  $r, \theta$ 는 Fig. 2(a)에서처럼 균열선단을 중심으로 하는 극좌표이다.

Fig. 3에는 경계요소법(BEM)을 사용하고, 시간증분  $\beta = 0.07, \nu = 0.29$ , 그리고 총 요소수 168개를 사용한

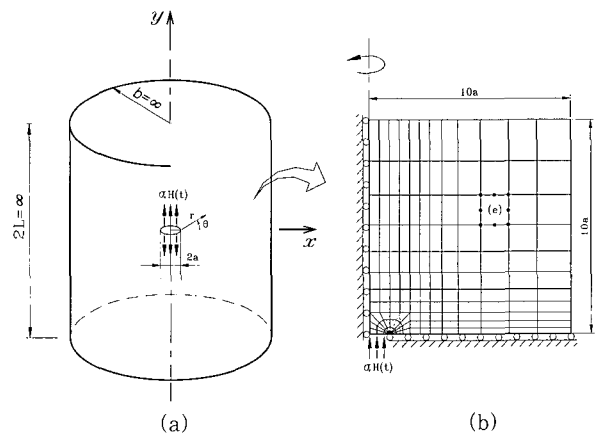


Fig. 2 (a) Impacted penny-shaped crack within an infinite elastic medium  
(b) Finite element model

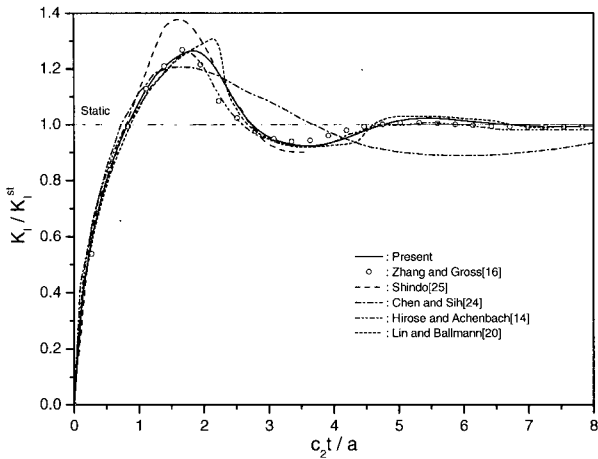


Fig. 3 Dynamic stress intensity factor of the penny-shaped crack within an infinite elastic medium

Zhang and Gross<sup>16)</sup>의 결과와, 유한차분법(FDM)을 사용하고  $\nu=0.25$ , 총 요소수는 외경(b)과 길이(L) 방향으로  $910 \times 810$  요소(cells)를 사용한 Lin and Ballmann<sup>20)</sup>의 결과, 그리고 해석적인 방법을 사용한 Shindo,<sup>25)</sup> Chen and Sih,<sup>24)</sup> Hirose and Achenbach<sup>14)</sup>의 결과들과 비교하였는데, 본 해법에 의한 수치결과는  $\beta=1.82$ 일 때 최대 DSIF가 1.26497 임을 알 수 있다. 본 해법의 결과와 가장 유사한 경향을 보이는 것은 동일한 프와송비를 사용한 Zhang and Gross에 의한 수치결과로 최대 DSIF가 1.28 정도 됨을 알 수 있으나, 최대값에 도달하는 시간이 본 해법의 결과와 조금 다르게 나타났다. 그리고 시간증분을 세분화하면 본 해법에서도 최대 DSIF가 1.28 정도 됨을 확인할 수 있었다. 최대값을 지나 정적해에 수렴하는 경향은 본 해석과 Zhang and Gross 그리고 Lin and Ballmann의 결과가 비슷하였다. 참고로 프와송비에 따른 최대 DSIF의 영향을 조사하기 위해  $\nu=0.25$ 로 하여 다시 계산해 보았지만,  $\nu=0.29$ 로 해석한 결과값과 거의 동일하였다. 즉, 프와송비의 변화에 따른 영향이 거의 없었다.

### 3.2 내부에 원환균열을 지닌 환봉이 양단에서 충격 인장하중을 받을 때

Fig. 4(a)에서처럼 환봉 내부에 원환균열을 지닌 환봉 축의 양단에서 단면에 수직하게 충격 인장하중  $\sigma = \sigma_0 H(t)$  이 작용하는 문제를 유한요소해석하기 위하여, Fig. 4(b)에서처럼 대칭성을 이용하여 균열길이( $a=25\text{mm}$ )와 반경(b)의 비를 1:8, 원통길이( $L=16a$ )는 균열길이에 16배로 하였고, 경계조건은 그림에서처럼 물러로 고정하였다.

Fig. 5에는 원환균열의 길이(a, 2a) 변화에 따른 DSIF

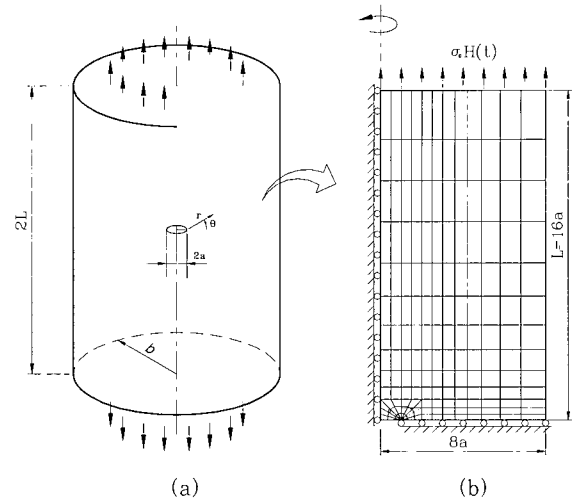


Fig. 4 (a) A cylindrical rod with penny-shaped crack subject to a uniform impact load at the ends (b) Finite element model

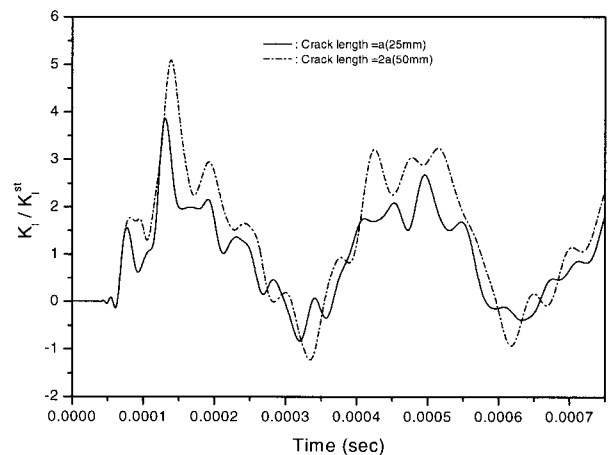


Fig. 5 DSIFs of the cylindrical rod with penny-shaped crack for the variation of crack length

을 비교하였다. 균열길이가 커질수록 DSIF가 커지는 것을 볼 수 있다. 균열길이가 a일 때 최대 DSIF는  $t=1.3050 \times 10^{-4}$  sec 부근에서 3.85997 임을 알 수 있고, 균열길이가 2a일 때 최대 DSIF는  $t=1.3880 \times 10^{-4}$  sec 부근에서 5.09677 임을 알 수 있는데, 균열길이가 2배 증가됨에 따라 DSIF는 약 1.32( $5.09677/3.85997$ )배 정도됨을 알 수 있다. 또한 균열길이가 증가됨에 따라 최대 DSIF가 작용하는 지점이 우측으로 이동됨을 알 수 있다.

Fig. 6에는 균열길이 a에 대한 균열선단에서의 r의 세분화에 따른 DSIF를 비교하였다.  $r/a=0.012, 0.016, 0.020$ 로 하여  $\theta=180^\circ$ 에서의 수치결과를 조사하였는데, 그 결과 r의 세분화에 따른 영향이 거의 없다. 또한, Fig. 4(b)에 도시된 다른 기하학적 변수들의 크기는 변화시키지 않고, 원통길이를 각각  $L=4a(100), 8a(200), 12a(300)$ ,

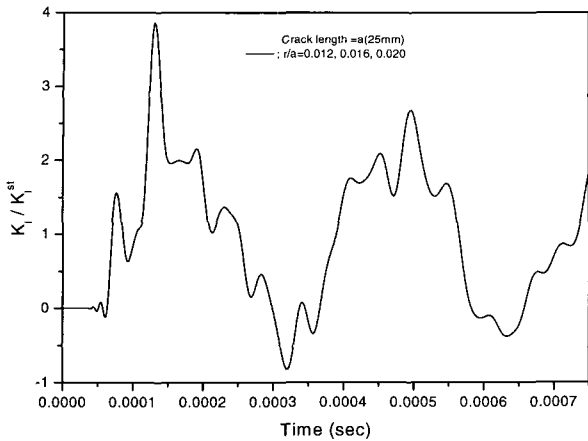


Fig. 6 DSIFs of the cylindrical rod with penny-shaped crack for the variation of radial position

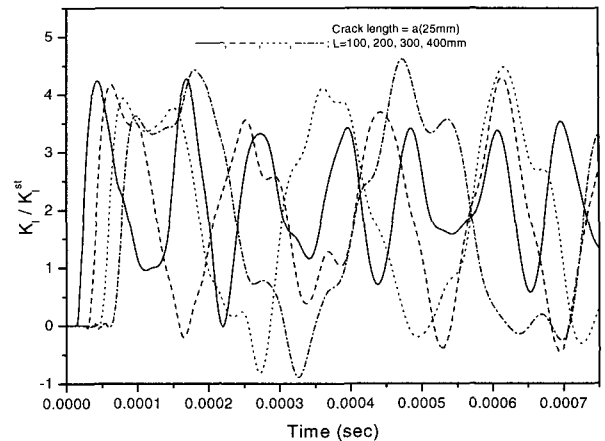


Fig. 8 DSIFs of the cylindrical rod with circumferential crack for the variation of axial length

16a(400mm)로 하여 원통길이 변화에 따른 DSIF결과를 비교 조사하였다. 원통길이가 다르게 되면, 파(wave)가 진행하다가 반사되는 시간들이 제각기 다르기 때문에 정확히 알 수는 없지만, 원통길이가 길어짐에 따라 DSIF 곡선의 폭도 함께 증가됨을 알 수 있다.(Fig. 8, 9) 참고로, 균열 길이를 2a로 증가시켜도 같은 경향의 결과를 얻었다.

### 3.3 외측면에 원주균열을 지닌 환봉이 양단에서 충격 인장하중을 받을 때

Fig. 7(a)에서처럼 원주균열(circumferential crack)을 지닌 환봉축의 양단에서 단면에 수직하게 충격 인장하중  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ 이 작용하는 문제를 유한요소해석하기 위하여, Fig. 7(b)에서처럼 대칭성을 이용하여 균열길이(a=25mm)와 반경(b)의 비를 1:8, 원통길이는  $L=16a$ , 그

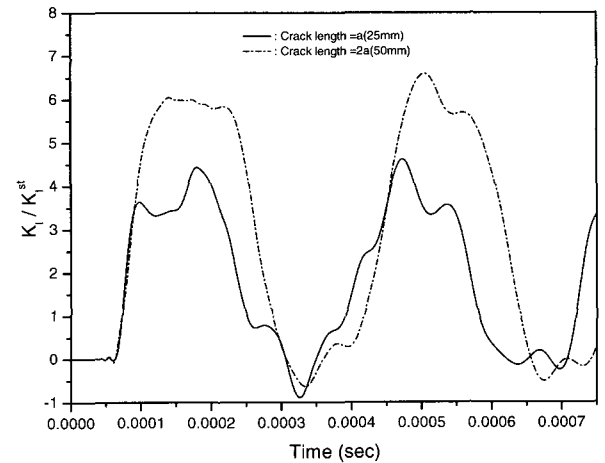


Fig. 9 DSIFs of the cylindrical rod with circumferential crack for the variation of crack length

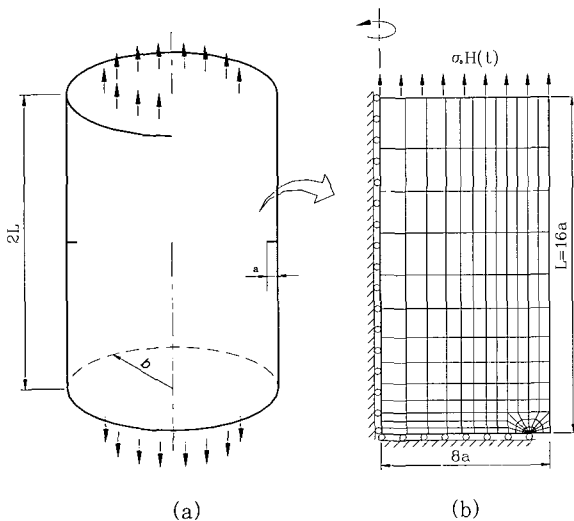


Fig. 7 (a) A cylindrical rod with circumferential crack subject to a uniform impact load at the ends (b) Finite element model

리고 경계조건은 그림에서처럼 물리로 고정하였다. 이때 사용된 총 요소수는 194개 그리고 총 절점수는 629개 이다.

Fig. 8에는 Fig. 7(b)에 도시된 다른 기하학적 변수들의 크기는 변화시키지 않고, 원통길이의 변화에 따른 DSIF을 비교하였는데, 3.2절에서의 예제와 동일한 경향을 보였다.

Fig. 9에는 원주균열의 길이(a, 2a) 변화에 따른 DSIF을 비교하였다. 3.2절의 원주균열을 지닌 환봉과 마찬가지로 균열길이가 커질수록 DSIF가 커지는 것을 볼 수 있다. 균열길이가 a일 때 최대 DSIF는  $t = 1.8029 \times 10^{-4}$  sec 부근에서 4.43190 임을 알 수 있고, 균열길이가 2a일 때 최대 DSIF는  $t = 5.0467 \times 10^{-4}$  sec 부근에서 6.59255 임을 알 수 있는데, 균열길이가 2배로 증가됨에 따라 DSIF는 약 1.49 (6.59255/4.43190)배 정도됨을 알 수 있다. 이 결과들을 원주균열에서 얻은 결과(Fig. 5)와 비교하면, 균열길이가 a일 때 원주균열이 원주균열보다 최대 DSIF가 약 1.15(4.43190/3.85997)배 되고, 균열길이가 2a로

증가되면 DSIF는 약 1.29(6.59255/ 5.09677)배 정도로 그 비가 증가됨을 알 수 있다. 참고로, 균열길이가 a에서 2a로 증가함에 따라 원주균열과 원환균열에 대한 최대 DSIF 값의 비는 약 12.2%(1.29/1.15) 증가됨을 알 수 있다.

### 3.4 내측면에 원주균열을 지닌 원통이 양단에서 충격 인장하중을 받을 때

Fig. 10(a)에서처럼 중공축 안쪽에 원주균열을 지닌 원통축의 양단에서 단면에 수직하게 충격 인장하중  $\sigma = \sigma_0 H(t)$  이 작용하고 있다. 이 문제를 유한요소해석하기 위하여, Fig. 10(b)에서처럼 대칭성을 이용하여 균열길이를 a, 내측반경( $R_i = 4a$ )과 외측반경( $R_o = 8a$ )의 비를 1:2 그리고 원통길이는  $L = 16a$ 으로 하였으며, 경계조건은 그림에서처럼 물러로 고정하였다. 이때 사용된 총 요소수는 174개 그리고 총 절점수는 569개 이다.

Fig. 11에는 Fig. 10(b)에 도시된 다른 기하학적 변수들의 크기는 변화시키지 않고, 원통길이를 각각  $L = 4a(100)$ ,  $8a(200)$ ,  $12a(300)$ ,  $16a(400\text{mm})$ 로 하여 원통길이 변화에 따른 DSIF 결과를 비교 조사하였다. 이 경우에도 3.3 절의 예제에서 보았던 결과(Fig. 8, 9)와 마찬가지로 원통길이가 길어짐에 따라 DSIF 곡선의 폭도 함께 증가됨을 알 수 있다.

Fig. 12에는 Fig. 10(b)의 유한요소모델에서 균열길이를 2a로 하였을 때, 원통길이 변화에 따른 DSIF를 비교 조사하였다. 균열길이를 a로 한 Fig. 11의 결과값과 비교해 보면, 앞 예제들의 해석 경향과 동일하게 균열길이가 커

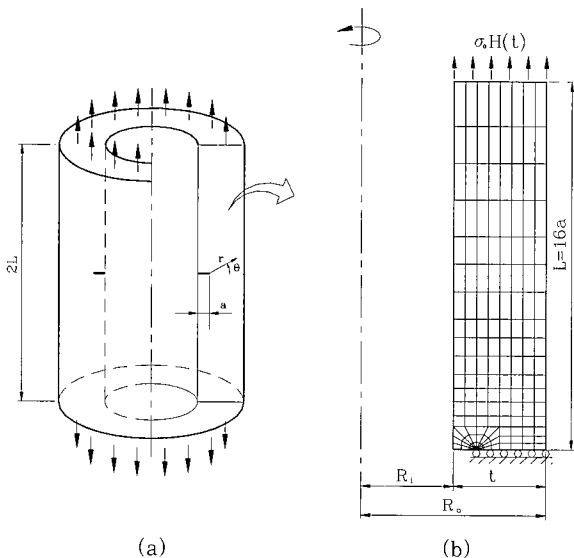


Fig. 10 (a) A hollow cylinder with internally circumferential crack  
(b) Finite element model

질수록 DSIF가 커지는 것을 볼 수 있다. 특히, 원통길이가 짧은 경우  $L = 4a(100\text{mm})$ 에는 균열길이의 변화에 따라 DSIF의 곡선이 심하게 변화되는 것을 알 수 있다.

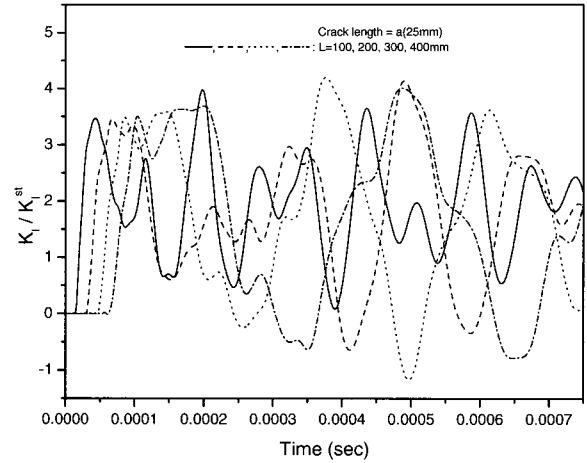


Fig. 11 DSIFs of the hollow cylinder with internally circumferential crack for the variation of axial length

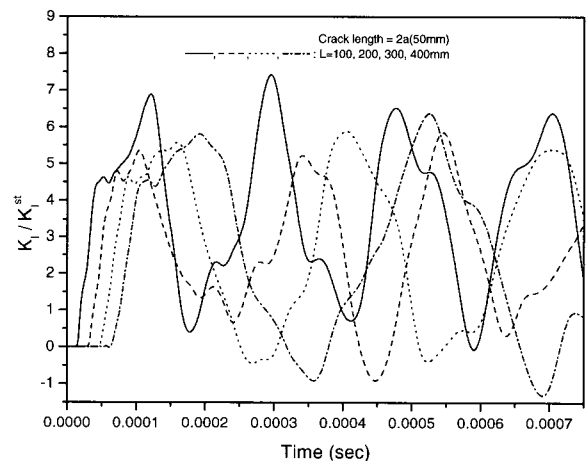


Fig. 12 DSIFs of the hollow cylinder with internally circumferential crack for the variation of axial length

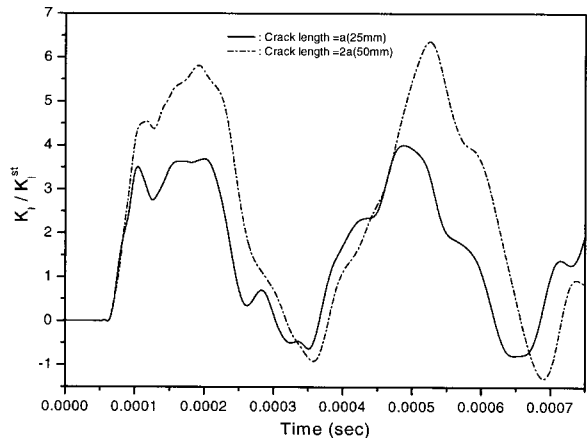


Fig. 13 DSIFs of the hollow cylinder with internally circumferential crack for the variation of crack length

Fig. 13에는 원통길이가  $L=16a(400\text{mm})$ 일 때 중공축 안쪽에 원주균열의 길이( $a, 2a$ ) 변화에 따른 DSIF을 비교하였다. 균열길이가  $a$ 일 때 최대 DSIF는  $t=4.8732 \times 10^{-4} \text{ sec}$  부근에서 4.00875 임을 알 수 있고, 균열길이가  $2a$ 일 때 최대 DSIF는  $t=5.2504 \times 10^{-4} \text{ sec}$  부근에서 6.36656 임을 알 수 있는데, 균열길이가 2배로 증가됨에 따라 DSIF는 약 1.59( $6.36656/4.00875$ )배 정도됨을 알 수 있다.

### 3.5 외측면에 원주균열을 지닌 원통이 양단에서 충격 인장하중을 받을 때

Fig. 14(a)에서처럼 중공축 바깥쪽에 원주균열을 지닌 원통축이 양단에서 단면에 수직하게 충격 인장하중  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ 이 작용하고 있다. 이 문제를 유한요소해석하기 위하여, Fig. 14(b)에서처럼 대칭성을 이용하여 균열길이를  $a$ , 내측반경 ( $R_i=4a$ )과 외측반경 ( $R_o=8a$ )의 비를 1:2 그리고 원통길이는  $L=16a$ 으로 하였으며, 경계조건은 그림에서처럼 롤러로 고정하였다. 이때 사용된 총 요소수는 174개 그리고 총 절점수는 569개 이다.

Fig. 14(b)에 도시된 다른 기하학적 변수들의 크기는 변화시키지 않고, 원통길이를 각각  $L=4a(100), 8a(200), 12a(300), 16a(400\text{mm})$ 로 하여 원통길이 변화에 따른 DSIF 결과는 중공축 안쪽에 원주균열의 원통길이 변화에 따른 DSIF(Fig. 11, 12)와 경향이 유사하여 결과 그래프는 생략하였다. Fig. 15에는 원통길이가  $L=16a(400 \text{ mm})$ 일 때 중공축 바깥쪽에 원주균열의 길이( $a, 2a$ ) 변화에 따른 DSIF을 비교하였다. 균열길이가  $a$ 일 때, 최대 DSIF는  $t=5.1070 \times 10^{-4} \text{ sec}$  부근에서 4.63098 임을 알 수 있고, 균열길이가  $2a$ 일 때, 최대 DSIF는  $t=5.4201 \times 10^{-4} \text{ sec}$  부근에서 8.13009 임을 알 수 있는데, 균열길이가 2배로 증가됨에 따라 DSIF는 약 1.76 ( $8.13009/4.63098$ )배 정도됨을 알 수 있다. 또한, 중공축 안쪽에 원주균열이 존재할 때의 DSIF(Fig. 13)와 비교하면 중공축 바깥쪽에 원주균열이 존재할 때의 DSIF(Fig. 15)가 크다는 것을 알 수 있다.

본 논문 해석결과의 일부로서 최대 DSIF 값에 대하여 요약하면, 내부에 원환균열을 지닌 무한 탄성체가 균열면 상에서 충격하중을 받는 경우에 1.26497 이고, 중실축이 종방향으로 충격 인장하중을 받을 경우, 원환균열을 지닌 경우엔 균열길이  $a$ 일 때 3.85997,  $2a$ 일 때 5.09677 이고, 원주균열을 지닌 경우엔 균열길이  $a$ 일 때 4.43190,  $2a$ 일 때 6.59255 이다. 중공축이 종방향으로 충격 인장하

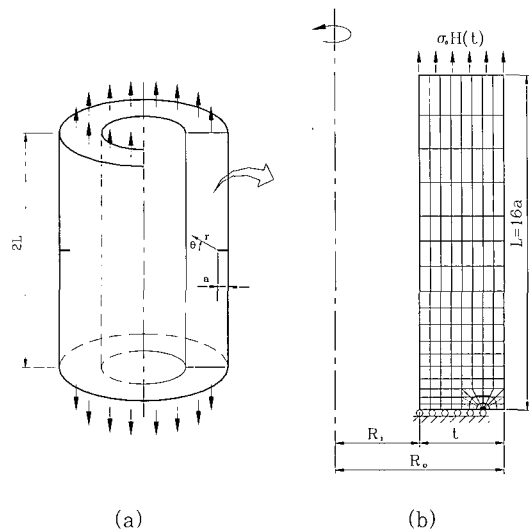


Fig. 14 (a) A hollow cylinder with externally circumferential crack  
(b) Finite element model

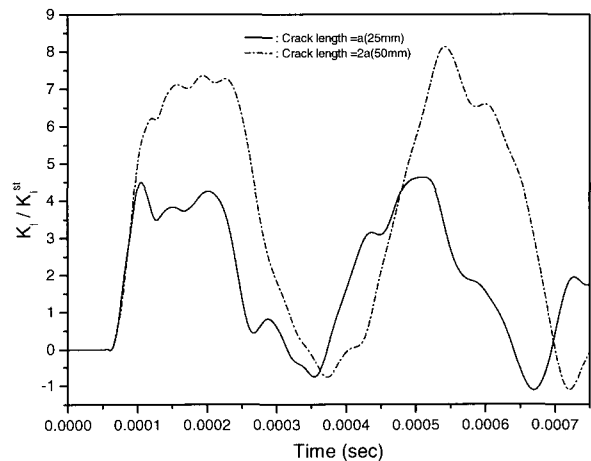


Fig. 15 DSIFs of the hollow cylinder with externally circumferential crack for the variation of crack length

중을 받을 경우, 안쪽에 원주균열을 지닌 경우엔 균열길이  $a$ 일 때 4.00875,  $2a$ 일 때 6.36656 이고, 바깥쪽에 원주균열을 지닌 경우엔 균열길이  $a$ 일 때 4.63098,  $2a$ 일 때 8.13009 이다. 그리고, 중실축의 원주균열이 원환균열보다는 최대 DSIF가 균열길이  $a$ 일 때 약 1.15,  $2a$ 일 때 약 1.29배 되고, 중공축의 바깥쪽 원주균열이 안쪽 원주균열보다는 최대 DSIF가 균열길이  $a$ 일 때 약 1.16,  $2a$ 일 때 약 1.28배 된다.

## 4. 결 론

축대칭 문제의 시간영역에서의 과도 선형 동적 해석을 위한 유한요소방정식을 이용하여 내부에 원환균열을 지닌



무한 탄성체가 균열면상에서 충격하중을 받을 때, 균열선단에서는 1/4절점을 지닌 삼각형 특이요소를 사용하여, 균열면상의 y방향 변위로부터 응력확대계수를 구하고, 그 결과를 타 해법에 의한 수치결과들과 비교하여, 제시된 유한요소방정식의 타당성과 수치결과의 정확성을 입증하였다. 그리고 이를 근거로 원환균열, 원주균열을 포함한 유한길이의 중실축과 중공축에 대한 동적 응력확대계수를 구하였다.

중실축에 대한 최대 DSIF 값은 균열길이가 a, 2a일 때, 원환균열을 포함한 경우 3.85997, 5.09677, 원주균열을 포함한 경우 4.43190, 6.59255 이고, 중공축에 대한 최대 DSIF 값은 균열길이가 a, 2a일 때, 안쪽에 원주균열을 포함한 경우 4.00875, 6.36656, 바깥쪽에 원주균열을 포함한 경우 4.63098, 8.13009 이다.

이상의 수치결과로서 균열길이가 커질수록 최대 DSIF가 커지며, 축의 길이가 길어질수록 DSIF 곡선의 폭이 함께 증가된다. 그리고 중실축과 중공축 둘 다 균열의 위치가 안쪽에 포함되는 경우보다는 바깥쪽에 포함되는 경우 더 큰 DSIF가 발생된다.

끝으로, 복잡한 산업기계라도 직선운동이나 회전운동 및 요동운동과 같은 동력을 전달하는 부분에는 대다수 축대칭 형상을 가진 원형 단면의 중실축 및 중공축 혹은 여러 가지 복합 형상으로 존재할 수 있는데, 이런 경우에도 본 논문에서 제시한 해법을 적용하여 동적 하중을 받는 축대칭 문제의 응력해석에도 기초 자료로 활용할 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. Aberson, J. A., Anderson J. M., and King, W.W., "Dynamic Analysis of Cracked Structures Using Singularity Finite Elements", Sih, G.C.(ed.), *Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems*, Noorhoff, Leyden. 1977
2. Kishimoto, K., Aoki, S., and Sakata, M., "Dynamic Stress Intensity Factors Using J-Integral and Finite Element Method", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.13, 1980, pp.387~394
3. Nishioka, T., *Recent Developments in Computational Dynamic Fracture Mechanics*, in: M. H. Aliabadi, ed., *Dynamic Fracture Mechanics (Computational Mechanics Publications, Southampton)*, 1995
4. Harari, I., Hughes, T.J.R., Grosh, K., Malhotra, M., Pinsky, P.M., Stewart, J.R. and Thompson, L. L., "Recent Developments in Finite Element Methods for Structural Acoustics", *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol.3, 1996, pp.131~309
5. Tan, M. and Meguid, S.A., "Dynamic Analysis of Cracks Perpendicular to Bimaterial Interfaces Using a New Singular Finite Elements", *Fin. El. Anal. Des.*, Vol.22, 1996, pp.69~83
6. Li, C., Zou, Z., and Duan, Z., "Stress Intensity Factors for Functionally Graded Solid Cylinders", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.63, 1999, pp.735~749
7. Sim, W. J. and Lee, S. H., "Transient Linear Elastodynamic Analysis in Time Domain Based on the Integro-Differential Equations", *Int. J. Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 14, No.1, 2002, pp.71~84
8. 황갑운, 조규중, "충격하중이 작용하는 평판의 동적 응력 해석", 한국전산구조공학회 논문집 제8권, 제1호, 1995, pp.137~146
9. 심우진, 이성희, "축대칭 문제에서의 동적 응력집중 해석", 대한기계학회 논문집 A권, 제26권 제11호, 2002, pp.2364~2373
10. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method*(4th edn.), McGraw-Hill, London, 1991
11. Reddy, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1993
12. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996
13. Sladek, J. and Sladek, V., "Dynamic Stress Intensity Factors Studied by Boundary Integro-Differential Equations", *Num. Meth. Eng.*, Vol. 23, 1986, pp.919~928
14. Hirose, S. and Achenbach, J. D., "Time-Domain Boundary Element Analysis of Elastic Wave Interaction with a Crack", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.28, 1989, pp.629~644
15. Dargush, G. F. and Banerjee P. K., "Time Dependent Axisymmetric Thermoelastic Boundary Element Analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.33, 1992, pp.695~717
16. Zhang, Ch. and Gross, D., *On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks*, Compu-

- tational Mechanics Publications, Southampton, 1998
17. Tsinoopoulos, S.V., Kattis, S.E., Polyzos D., and Beskos, D.E., "An Advanced Boundary Element Method for Axisymmetric Elastodynamic Analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.175, 1999, pp.53~70
  18. Wen, P.H., Aliabadi, M.H., and Rooke, D.P., "A Mass-Matrix Formulation for Three-Dimensional Dynamic Fracture Mechanics", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.173, 1999, pp.365~374
  19. 김태규, 조상봉, 권재도, 최선호, "2차원 Laplace 변환 경계요소법에 의한 이종재료 접합면 균열의 충격해석", 대한기계학회 논문집 A권, 제18권, 제5호, 1994, pp.1158~1168
  20. Lin, X. and Ballmann, J., "A Numerical Scheme for Axisymmetric Elastic Wave in Solids", *Wave Motion*, Vol.21, 1955, pp.115~126
  21. Chen, Y. M., "Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by a Large-rangian Finite Difference Method(the HEMP code)", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.7, 1975, pp.653~660
  22. Chen, E. P., "Elastodynamic Response of a Penny-Shaped Crack in a Cylinder of Finite Radius", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 17, 1979, pp. 379~385
  23. Kim, K. S., "Dynamic Propagation of a Finite Crack", *Int. J. Solids Structures*, Vol.15, 1979, pp.685~699
  24. Chen, E.P. and Sih, G.C., "Transient Response of Cracks to Impact Loads", Sih, G.C. (ed.), *Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems*, Noordhoff, Leyden, 1977
  25. Shindo, Y., "Axisymmetric Elastodynamic Response of a Flat Annular Crack to Normal Impact Waves", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.19, No.5, 1984, pp.837~848
  26. 김경수, 박준범, 정배훈, "응력파에 의한 구조부재의 동적파괴 해석", 한국전산구조공학회 논문집 제10권, 제4호, 1997, pp.195~203
  27. 이억섭, 조종두, 홍성경, 성낙중, "응력확대계수와 J-적분 결정을 위한 코스틱스방법의 실험조건에 관한 연구", 대한기계학회 논문집 A권, 제18권, 제9호, 1994, pp.2331~2338
  28. 백운철, 황재석, "이방성비가 큰 직교이방성체의 반 무한 균열에 대한 동적 응력확대계수에 관한 연구," 대한기계학회 논문집 A권, 제24권, 제6호, 2000, pp. 1557~1564
  29. Ross, C. T. F., *Finite Element Programs for Axisymmetric Problems in Engineering*, Ellis Horwood, Halsted Press, New York, 1984
  30. Bakr A. A., *The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986
  31. Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1975
  32. Graff K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover, New York, 1975
  33. Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research, Hellertown, 1973