

파워흐름유한요소법에 의한 중고주파수 영역에서 단순 평판의 진동 해석

Analysis of Vibration of a Simple Plate In a Medium-to-High Frequency Range With Power Flow Finite Element Method

서 성 훈† 홍 식 윤* 길 현 권** 허 영***
Seo, Seong-Hoon Hong, Suk-Yoon Kil, Hyun-Gwon Huh, Young
(논문접수일 : 2002년 8월 21일 ; 심사종료일 : 2003년 3월 31일)

요 지

본 논문에서는 중고주파수 영역에서 진동하는 단순평판의 진동을 해석하기 위하여 파워흐름유한요소법을 적용하였다. 파워흐름해석법에서 주어지는 진동 에너지배방정식의 해를 구하기 위한 수치해석 도구로써 유한요소법을 활용하였다. 이러한 파워흐름유한요소법을 적용하여 중고주파수 영역에서 진동하는 단순평판의 진동 변위와 진동인텐시티 분포를 구하였다. 또한 수치해 결과를 엄밀해와 유한요소법에 의한 근사해와 비교함으로써, 파워흐름유한요소법은 중고주파수 영역에서 진동 변위 및 진동 인텐시티를 예측하기 위하여 효과적으로 적용될 수 있음을 보였다.

핵심용어 : 파워흐름유한요소법, 진동 에너지배방정식, 중고주파수, 진동 변위, 진동인텐시티

Abstract

In this paper Power Flow Finite Element Method(PFFEM) has been implemented to analyze the vibration of a plate in mid and high frequency ranges. In order to solve the vibration energy governing equation in Power Flow Analysis(PFA), The Finite Element Method(FEM) was used as a numerical tool. It allowed one to predict the distribution of displacement and intensity in the plate vibrating at mid and high frequencies. The results were compared with the analytical solutions and the approximate FEM solutions. The comparison showed that PFFEM can be an effective tool to analyze the structural vibration in mid and high frequency ranges.

Keywords : power flow finite element method(PFFEM), vibration energy governing equation, medium-to-high frequency range, vibration displacement, vibration intensity

1. 서 론

구조물 진동의 경우 주로 저주파수 영역의 진동을 고려하게 되나, 구조물의 소음 방사와 관련된 고체음의 경우는 중고주파수 영역까지 고려하여야 한다. 고체음을 저감하기 위해서는 중고주파수 영역에서 발생하는 진동의 공간적 분포와 진동에너지의 전달경로에 대한 이해가 절실히 필요하

며, 나아가 중고주파수 영역에서의 진동을 예측하기 위한 해석 방법의 필요성이 증대되어 왔다. 진동을 해석하기 위해서 저주파수 영역에서는 유한요소해석법¹⁾이 사용되고 있다. 유한요소 해석법의 경우는 진동수가 증가하게 되면 진동장을 형성하는 파동의 파장이 작아지므로 중고주파수의 진동 해석을 위해서는 구조체를 더욱 작은 요소로 나누어야 한다. 따라서 고주파수 영역에서의 적용은 많은

† 책임저자, 학생회원 · 서울대학교 조선해양공학과 대학원
전화: 02-880-7331; Fax: 02-888-9298
E-mail: ship9428@gong.snu.ac.kr

* 서울대학교 조선해양공학과 조교수

** 수원대학교 기계공학과 부교수

*** 정회원 수원대학교 토목공학과 부교수

· 이 논문에 대한 토론을 2003년 9월 30일까지 본 학회에 보내주 시면 2003년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

계산 시간과 비용이 많이 요하게 된다는 단점이 있다. 고주파를 해석하기 위해서는 일반적으로 통계적에너지해석법²⁾을 사용하고 있다. 그러나 이 해석법은 전체 진동계를 진동에너지의 형태가 유사한 다수의 하부구조로 분할한 후 이들 각 요소의 시간 및 공간에 대한 평균값만을 제공하게 되는 단점이 있다.

유한요소법과 통계적 에너지해석법의 한계점들을 보완하기 위한 방법으로 중고주파수 대역에서 적용 가능한 파워흐름해석법(Power Flow Analysis, PFA)³⁾을 들 수가 있다. 이 파워흐름해석법은 진동에너지흐름 형태에 따른 고유의 에너지지배방정식을 정립하고 해석함으로써 진동변위의 공간적 분포와 진동에너지의 전달 경로 등을 제시할 수 있는 방법이다. 파워흐름해석법을 위한 에너지지배방정식은 보⁴⁾와 평판 진동의 면외진동^{5),6)}에 대하여 정립되었으며, 최근에 본 논문 저자들 일부에 의하여 평판의 면내진동⁷⁾에 대하여 정립되어졌다. 이러한 파워흐름해석법의 해를 구하기 위한 수치해석 도구로써 유한요소법을 적용하는 파워흐름유한요소법이 도입되었으며, 보⁴⁾와 평판⁵⁾의 경우에 대하여 적용되었다. 이 후 이러한 파워흐름유한요소법은 평판으로 이루어진 복합구조물의 면외진동^{8),9)} 해석에 이용되었다. 최근에는 본 논문 저자들 일부에 의하여 파워흐름유한요소법의 적용 확장이 이루어져서, 평판으로 이루어진 복합구조물의 면외 및 면내 진동을 해석할 수 있게 되었다.^{10),11)} 중고주파수 영역에서 적용되는 파워흐름유한요소법의 경우 공진주파수 각각의 영향을 고려하기보다는, 해당 주파수 밴드에 대한 평균 진동값을 제공하게 된다. 이러한 점을 고려하여, 중주파수 대역에서 해당 공진주파수의 영향을 고려하기 위한 하이브리드 유한요소법에 대한 연구¹²⁾도 이루어지고 있으며, 보의 진동 해석에 적용되고 있다.

파워흐름유한요소법의 경우 저주파수 영역에서의 진동해석에 사용된 유한요소 모델링을 그대로 적용하여, 기존의 유한요소해석법 보다 훨씬 높은 주파수 영역에 대하여 해석이 기대된다. 또한 파워흐름유한요소법에 대한 근사 진동해를 구하기 위한 적용이 문헌에서 이루어졌지만, 중고주파수 대역에서 2차원 구조물에 대한 이론적 검증은 이루어지지 않았다. 본 논문에서는 중고주파수 대역에서 진동하는 평판의 진동 해를 구하기 위하여 파워흐름유한요소법을 적용하였다. 이러한 근사해를 유한요소법에 의한 근사해와 비교하였다. 이 경우 주파수 10,000 Hz 까지 파워흐름유한요소법의 근사해를 구하기 위하여, 유한요소법에서 적용한 300 Hz에서의 모델을 그대로 이용하였다. 이러한 결과로써 저주파수 영역에서의 진동해석에 사용된 유한요소 모델링을 그대로 이용하여 파워흐름유한요소법을 적용

할 수 있으며, 기존의 유한요소해석법 보다 훨씬 높은 고주파수 영역에 대한 진동 해를 구할 수 있음을 보였다. 또한 진동 변위 및 진동인텐시티 해에 대한 파워흐름유한요소법의 근사해를 엄밀해와 비교함으로써 이론적인 검증을 수행하였다. 이러한 해석을 통하여 파워흐름유한요소법은 중고주파수 영역에서 진동 변위 및 진동 인텐시티를 예측하기 위하여 효과적으로 적용될 수 있음을 보였다.

2. 진동 해석

2.1 파워흐름유한요소법

면외 가진력에 의하여 발생하는 평판 진동에서 전파성 파동인 굽힘파를 고려하는 경우, 진동에너지밀도 e 를 변수로 하는 에너지지배방정식과 진동 인텐시티 벡터는 다음과 같이 표현된다.⁵⁾

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle = \Pi_{in} \quad (1)$$

$$\langle \vec{I} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \quad (2)$$

여기서 ω 는 가진 각주파수이고, η 는 구조감쇠에 의한 내부손실계수 그리고 $\langle \rangle$ 는 해당 물리량의 시간 평균값을 나타낸다. c_g 는 굽힘파의 에너지전달속도이며, Π_{in} 는 외부 가진력에 의하여 구조물에 입력되는 입력파워를 나타낸다.

에너지지배방정식인 식(1)을 유한요소법으로 해석하기 위하여, 가중잔여법을 적용한다. 가중함수 ν 를 취하면 다음과 같은 식을 얻게 되고,

$$\int_D \left\{ -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle - \Pi_{in} \right\} \nu dD = 0 \quad (3)$$

발산정리를 이용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\int_D \left\{ \frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \cdot \nabla \nu + \eta\omega \langle e \rangle \nu \right\} dD - \int_D \Pi_{in} \nu dD + \int_D \nu \left\{ \vec{n} \cdot \frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \right\} d\Gamma = 0 \quad (4)$$

여기서 \vec{n} 은 경계 Γ 에서의 법선 벡터를 나타낸다. 식(4)는 진동에너지밀도와 인텐시티와의 관계를 의미하는 식(2)를 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\int_D \left\{ \frac{C_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \cdot \nabla \nu + \eta\omega \langle e \rangle \nu \right\} dD \\ = \int_D \Pi_{in} \nu dD + \int_D \nu (-\vec{n}) \cdot \langle \vec{T} \rangle d\Gamma \quad (5)$$

이 경우 평판 경계로부터 입력 파워가 없는 경우 수치적 근사해는 갤러킨 근사법(Galerkin approximation)을 사용하여 유한개의 기지함수 합으로 다음과 같이 표현한다.

$$\langle e \rangle = \sum_1^n e_j \phi_j \quad (6)$$

여기서 ϕ 는 라그랑제 다항식(Lagrange interpolation function)이다. 또한 가중함수는 근사해의 기지함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\nu = \sum_1^n \phi_j \quad (7)$$

식(6), (7)를 식(5)에 대입하여 정리하면 파워흐름유한 요소법의 요소행렬식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[K^{(e)}]\{e^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{Q^{(e)}\} \quad (8)$$

여기서

$$K_{ij}^{(e)} = \int_D \left(\frac{C_g^2}{\eta\omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j + \eta\omega \phi_i \phi_j \right) dD \quad (9)$$

$$F_i^{(e)} = \int_D \Pi_{in} \phi_i dD,$$

$$Q_i^{(e)} = \int_{\Gamma} \frac{C_g^2}{\eta\omega} \phi_i (-\vec{n}) \cdot \nabla e d\Gamma \quad (10)$$

$K_{ij}^{(e)}$, $F_i^{(e)}$, $Q_i^{(e)}$ 는 각각 행렬과 질량행렬 항을 포함하고 있는 계수행렬, 입력파워 그리고 요소 경계의 에너지 흐름을 나타낸다. 그리고 ϕ 는 Lagrange 다항식(Lagrange interpolation function)을 나타낸다.

2.2 파워흐름유한요소해석의 계산

요소행렬식인 식(8)~(10)의 적분계산은 유한요소법에서 주로 사용하는 가우스 구적법을 이용한다. 이 요소행렬식을 조립하여 다음과 같은 전체 행렬을 구할 수 있다.

$$[K]\{e\} = \{F\} + \{Q\} \quad (11)$$

여기서 행렬 $\{F\}$ 는 노드에 입력되는 파워의 값과 관계된다. 면외 접가진력 $F(t) = F_0 e^{-i\omega t}$ 에 의한 평판 진동의 경우, 입력파워는 평판에 대한 가진점의 임피던스 Z 를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi_{in} = \frac{1}{2} |F_0|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z} \right\} \quad (12)$$

여기서 Re 은 해당 값의 실수 값을 의미한다. 이 경우 임피던스 값의 근사해로 무한 평판에 대한 가진점의 임피던스 값을 다음과 같이 이용할 수 있다.¹³⁾

$$\operatorname{Re}\{Z\} = 8\sqrt{D\rho h} \quad (13)$$

여기서 D, ρ, h 는 평판의 강성계수, 밀도 그리고 두께를 나타낸다.

이러한 점들을 고려하면 식(11)은 에너지 밀도의 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[K+J]\{e\} = \{F\} \quad (14)$$

여기서 $[J]$ 는 연결요소행렬이며, 에너지밀도와 파워흐름과의 관계, $\{Q\} = [J]\{e\}$ 로부터 결정된다. 식(14)는 에너지 밀도 e 를 변수로 하는 행렬이며 역행렬을 이용하면 에너지 밀도를 구할 수 있다. 식(14)로부터 $\{e\}$ 의 각 요소를 구하게 되면, 진동에너지밀도와 인텐시티는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\langle e \rangle = \sum_1^n e_j \phi_j \quad (15)$$

$$\langle \vec{T} \rangle = -\frac{C_g^2}{\eta\omega} \sum_1^n e_j \nabla \phi_j \quad (16)$$

그리고 진동 변위 w 의 rms값은 식(15)에서 구한 진동 에너지밀도를 이용하여 다음과 같은 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\langle w^2 \rangle^{1/2} = \frac{\langle e \rangle}{m\omega^2} \quad (17)$$

여기서 m 은 구조물의 단위 면적당 질량을 나타낸다.

2.3 해석 모델

해석 모델로는 단순 지지된 평판을 고려하였다. 크기는

$3(L_x) \times 3.89(L_y) \times 0.18(h)$ m이며, 재질은 콘크리트로서 탄성계수 $2.5 \times 10^{10} N/m^2$, 밀도 $2.4 \times 10^3 kg/m^3$, Poisson비 0.2, 감쇠계수 0.05 로 고려하였다. 이러한 평판은 아파트 구조물을 이루는 한 요소에 해당한다.

평판의 진동을 발생시키는 가진력으로서의 진동수 ω 와 크기 1N의 면외 점가진력을 고려하고, 가진 위치는 평판의 중앙 위치로 고려하였다.

3. 결 과

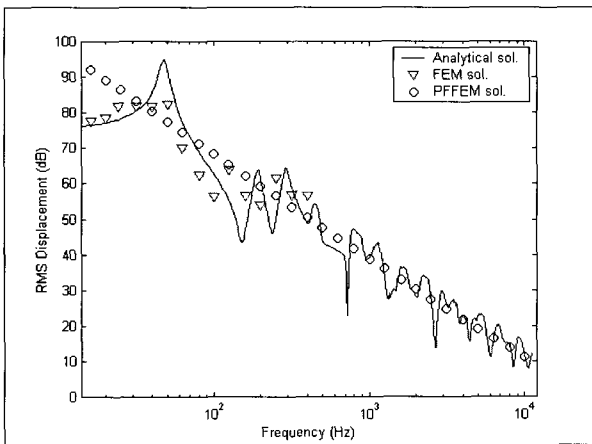
단순 지지된 유한 평판의 진동을 해석하기 위하여 파워흐름유한요소법을 적용하였다. 적용 주파수는 1/3옥타브 구간 중심주파수를 택하여 16 Hz 부터 10,000 Hz 까지 고려하였다. 또한 유한요소법에 의한 진동 변위 해를 구하여 파워흐름유한요소법에 의한 해와 비교하였다. 이 경우 파워흐름유한요소법과 유한요소법을 적용하기 위하여서는 요

소 수 30×40 을 고려하였다. 그리고 진동 변위를 각 고유진동수에서의 모드 합으로 나타냄으로써 2Hz 간격으로 엄밀해를 구하고, 파워흐름유한요소법과 유한요소법에 의한 근사해들과 비교하였다.

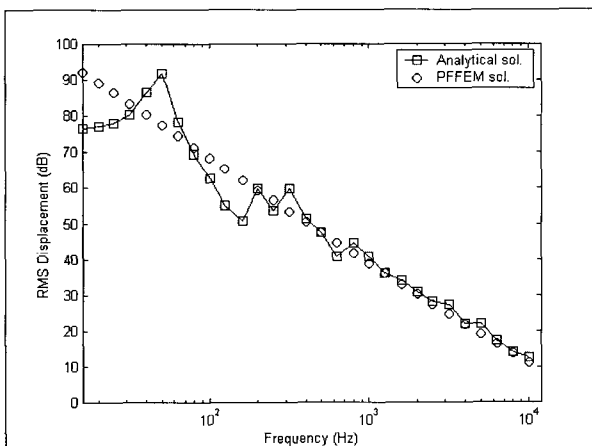
그림 1(a)는 $(x = \frac{1}{2} L_x, y = \frac{5}{8} L_y)$ 위치에서 rms 진동 변위에 대한 유한요소법, 파워흐름유한요소법에 의한 근사해와 엄밀해와 비교한 결과를 보여준다. 이 경우 예상되는 것처럼 저주파수 영역에서 유한요소법에 의한 결과가 엄밀해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 파워흐름유한요소법에 의한 해석 결과의 경우는 저주파수 대역에서 엄밀해와 비교하여 큰 오차를 보여주고 있다. 또한 파워흐름유한요소법의 경우 모든 주파수 영역에서 공진주파수 각각의 영향을 고려하지 못함을 알 수 있다.

그림 1(b)는 엄밀해의 1/3옥타브 각 구간에 대한 주파수 평균값과 파워흐름유한요소법에 의한 결과와의 비교를 보여 주고 있다. 300 Hz 이상의 중고주파수 영역에서 파워흐름유한요소법에 의한 결과가 엄밀해의 주파수 평균값과 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 주파수 300 Hz는 굽힘파의 파장(λ)에 대한 평판 길이(L)의 비는 $L/\lambda \approx 2$ 에 해당하는 주파수이다. 그림 1(b)로부터는 파워흐름유한요소법의 경우 공진주파수 각각의 영향을 고려하기보다는, 해당 주파수 밴드에 대한 평균 진동값을 제공함을 알 수 있다. 그림 1(b)의 결과는 유한요소법에서 사용된 모델링(그림 1(a) 30×40 요소)을 그대로 이용하여 파워흐름유한요소법을 적용할 수 있으며, 중고주파수 영역에서 각 주파수 구간 평균값에 대한 근사해를 효율적으로 구할 수 있음을 나타낸다.

파워흐름유한요소법의 경우, 경계 조건으로서는 평판의 경계로부터 입력되는 파워가 없다는 조건을 사용한다. 그러므로 경계로부터 입력 파워가 없는 한, 단순지거나 고정 지지 등의 경계조건에 영향을 받지 않고 같은 값의 해를 제공하게 된다. 일반적으로 경계조건에 대한 영향은 고유진동수와 진동 모드 변화로 나타나고, 중고주파수 영역보다는 저주파수 영역에서 보다 중요시되게 된다. 중고주파수 영역에서는 모드밀도가 큰 값을 가지므로, 즉 주어진 주파수 범위에서 많은 공진 주파수가 존재하게되어 각 진동모드에 초점을 맞추기보다는 각 주파수 대역에서의 평균값이 보다 더 의미가 있게 된다. 그러므로 경계로부터의 입력 파워가 없는 경우에는 경계조건에 관계 없이, 중고주파수 영역에서 파워흐름유한요소법에 의한 해는 엄밀해의 주파수 구간 평균값에 대한 근사해를 제공하게 된다. 파워흐름유한요소법이 적용되는 중고주파수 범위는 다양한 형태의 구조물과 진동 형태에 따라 다르겠지만, 일반적으로 해당 구조물의 길이와 발생하는 파동의 파장을 고려하여 $L/\lambda \geq 2$



(a) 엄밀해와 유한요소법, 파워흐름유한요소법에 의한 근사해의 비교



(b) 엄밀해(1/3 옥타브 주파수 구간 평균값)와 파워흐름유한요소법에 의한 근사해의 비교

그림 1. $(x = \frac{1}{2} L_x, y = \frac{5}{8} L_y)$ 지점에서의 진동 변위(rms 값)

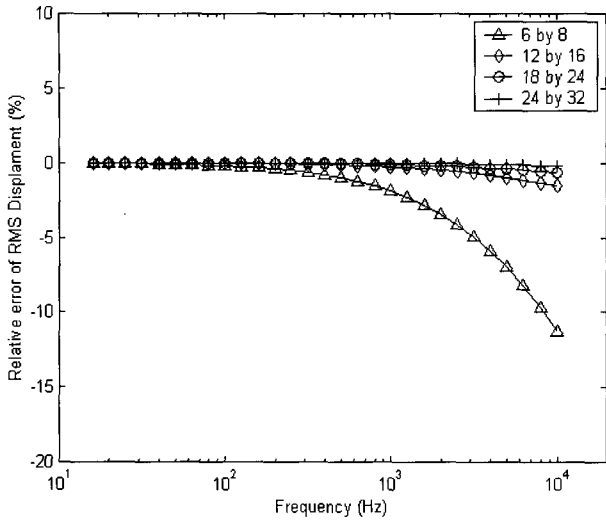


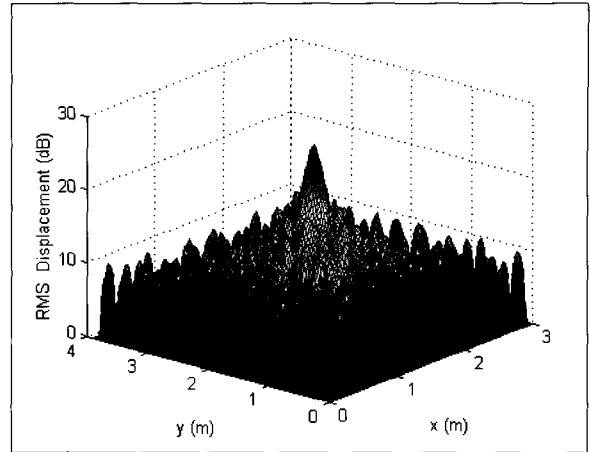
그림 2 요소 수에 따른 파워흐름유한요소법 해의 기준 값에 대한 오차. ($x = \frac{1}{2} L_x, y = \frac{5}{8} L_y$) 지점에서의 진동 변위(rms 값)를 고려하며, 기준 값은 그림 1(b)에서 사용된 요소 수 30×40 에 대한 파워흐름유한요소법 해를 고려.)

이 되는 주파수 범위로 고려할 수 있다.

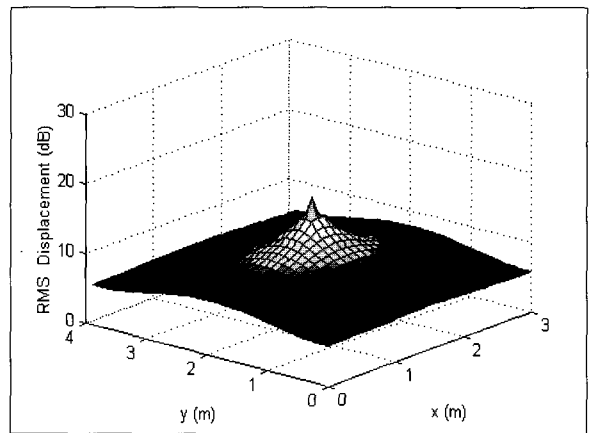
그림 2는 요소 수에 따른 파워흐름유한요소법 해의 기준 값에 대한 오차를 나타내 주고 있다. 이 경우 기준 값은 그림 1(b)에서 사용된 요소 수 30×40 에 대한 파워흐름유한요소법 해를 사용하였다. 그림 2에서 요소 수 18×24 와 24×32 에 대한 해는 $10\text{ Hz} \sim 10\text{ kHz}$ 주파수 영역에서 1% 내의 오차 범위 내에서 수렴성을 보여 주고 있다.

그림 3(a), (b)은 주파수 $10,000\text{ Hz}$ 에서 진동 변위의 평판 전체 공간 분포에 대한 엄밀해와 파워흐름유한요소법에 의한 근사해의 결과를 각각 보여준다. 그림 3(c)는 평판 공간 내 $x = (1/2) L_x$ 지점에서 y 축을 따른 진동 변위(rms 값) 분포에 대한 엄밀해와 파워흐름유한요소법에 의한 결과와의 비교를 보여 주고 있다. 가진점 주위의 근접장을 제외하고는 전체적인 공간 분포 경향을 잘 나타내고 있음을 알 수 있다. 가진점을 포함한 근접장에서의 오차는 다음의 원인에 기인한다. 근접장에서 진동은 굽힘파뿐만 아니라 감쇠파에 의하여 형성되는데, 파워흐름유한요소법에서는 전파성 파동인 굽힘파만을 고려하기 때문이다. 또한 파워흐름유한요소법을 적용시 입력 데이터로서 가진력에 의한 입력 파워를 고려하게 되는데, 해당 가진점의 임피던스 Z 에 대한 엄밀해에 대한 근사 값으로 식(12, 13)에서와 같이 문헌에서 값을 쉽게 구할 수 있는 무한 평판에 대한 임피던스를 이용하게 되기 때문이다.

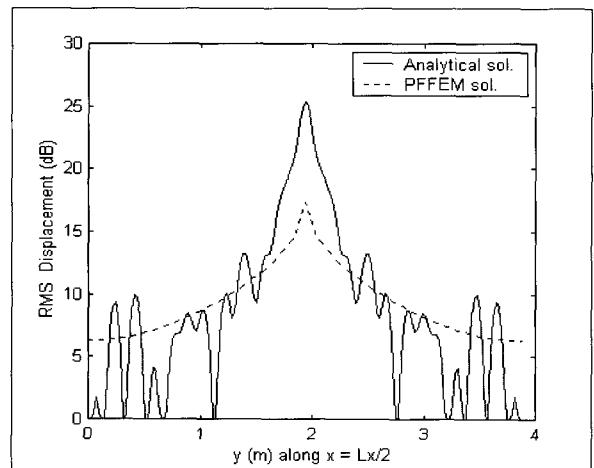
그림 4(a)-(b)는 주파수 $10,000\text{ Hz}$ 에서 진동인텐시티의 공간 분포에 대한 엄밀해와 파워흐름유한요소법에 의한 근사해의 결과를 각각 보여준다. 이러한 결과들을 비교하



(a) 엄밀해



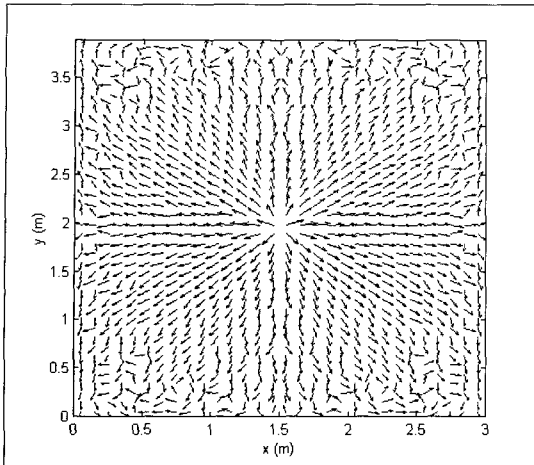
(b) 파워흐름유한요소법에 의한 근사해와 $x = (1/2) L_x$ 에서 y 축을 따른 진동 변위(rms 값) 분포



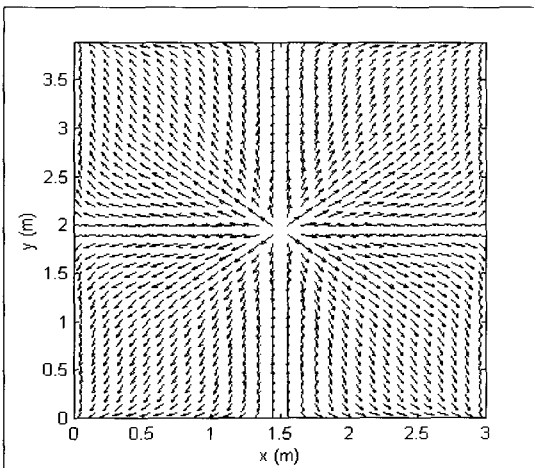
(c) 엄밀해와 파워흐름유한요소법에 의한 근사해와의 비교

그림 3 주파수 $10,000\text{ Hz}$ 에서의 진동 변위(rms 값)의 공간 분포

여 보면, 파워흐름해석법에 의한 근사해가 가진점의 위치 및 진동에너지의 전달 경로를 잘 나타내 주고 있음을 알 수 있다.



(a) 엄밀해



(b) 파워흐름유한요소법에 의한 근사해

그림 4 주파수 10,000 Hz에서의 진동 인텐시티의 공간 분포

4. 결 론

본 논문에서는 중고주파수 영역에서 면외 점가진력에 의하여 진동하는 평판의 진동해를 구하기 위하여 파워흐름유한요소법을 적용하였다. 수치 계산으로서는 저주파수를 포함하는 광대역(16 Hz - 10000 Hz)을 고려하였으며, 파워흐름해석법에 의한 근사해를 엄밀해와 비교함으로써, 파워흐름해석법의 중고주파수 적용에 대한 이론적 검증을 수행하였다. 또한 파워흐름유한요소법의 근사해를 유한요소법에 의한 근사해와 비교함으로써, 저주파수 영역에서의 진동해석에 사용된 유한요소 모델링을 그대로 이용하여 파워흐름유한요소법을 적용할 수 있으며, 기존의 유한요소해석법 보다 훨씬 높은 고주파수 영역에 대한 진동 해를 구할 수 있음을 보였다. 그리고 파워흐름유한요소법을 이용하여 고주파수 영역에서 진동 에너지 전달 경로를 나타내는 진동 인텐시티를 효과적으로 구할 수 있음을 보였다. 이러한

결과들로부터 파워흐름유한요소법은 중고주파수 영역에서의 진동을 해석하기 위하여 효과적으로 적용될 수 있음을 보였다. 본 연구에서는 콘크리트 단순평판에 대하여 적용이 이루어졌지만, 향후 다양한 재질 또한 연성 보와 평판으로 이루어진 다양한 복합구조물에 대한 파워흐름유한요소법의 적용 확장 연구와 검증에 대한 연구가 이루어져야 한다고 본다.

감사의 글

본 연구의 일부분은 수중음향연구센터를 통한 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw Hill Book Co., 1977
2. R. H. Lyon, *Statistical Analysis of Dynamic Systems: Theory and Applications*, MIT Press, 1975
3. V. D. Belov, S. A. Rybak, and B.D. Tartakovskii, "Propagation of Vibrational Energy in Absorbing Structures", *Journal of Soviet Physics Acoustics*, Vol.23, No.2, 1977, pp.115~119
4. D. J. Nefske, and S. H. Sung, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems: Basic Theory and Application to Beams", *Journal of Vib. Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol.111, 1989, pp.94~100
5. O. M. Bouthier, R. J. Bernhard, "Model of Space-Averaged Energetics of Plates", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol.30, No.3, 1992, pp.138~146
6. O. M. Bouthier and R. J. Bernhard, "Simple Models of the Energetics of Transversely Vibrating Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 1995, pp.149~164
7. D-H Park, S-Y Hong, H-G Kil, J-J Jeon, "Power Flow Models and Analysis on the In-Plane Waves in Finite Coupled Thin Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.244, No.4, 2001, pp.651~668
8. R. J. Bernhard and J. E. Huff, "Structural-Acoustic Design at High Frequency Using the Energy Finite Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.121, 1999, pp.295~301

9. N. Vlahopoulos, L. O. Garza-Rios and C. Mollo, "Numerical Implementation, Validation and Marine Applications of an Energy Finite Element Formulation", *Journal of Ship Research*, Vol.43, 1999, pp.143~156
10. 서성훈, 홍석윤, 길현권, "잠수함 형상의 평판구조물에 대한 파워흐름유한요소해석," 한국소음진동공학회 추계학술대회 논문집, 1999, pp.358~364
11. 박영호, 홍석윤, 길현권, "파워흐름해석 프로그램-PFADS를 이용한 자동차의 진동해석", 한국 음향 학회 하계학술대회 논문집, 2001, pp.525~528
12. N. Vlahopoulos and X. Zhao, "An Investigation of Power Flow In the Mid-Frequency Range for Systems of Co-Linear Beams Based On a Hybrid Finite Element Formulation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.242, 2001, pp.445~473
13. L. L. Beranek, I. L. Ver, *Noise and Vibration Control Engineering*, John Wiley & Sons Inc., 1992