대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.2, 223-240. June 2003

나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석

김 민 경*

초등학교에서 교사는 그들이 가르쳐야 하는 수학에 관한 지식 뿐 아니라 그들의 학생들이 미래에 배워야하는 수학에 관한 지식도 풍부하여야 한다. 초등수학의 수와 연산 영역 중에서 초등학교 학생들이 매우 어려워하는 개념 중 하나가 나눗셈 개념이다. 이에 본 연구는 우리나라 초등예비교사 178명을 대상으로, 그들이 실제 교사로서 교육현장에 나서기 바로 이전 시기에 나눗셈 개념에 있어서 적절하게 개념적 지식과 절차적 지식을 관련지어 이해하고 있는지, 나눗셈에서 나누는 수와 나머지와의 관계에 대해 올바르게 이해하고 있는지 등에 관해 알아봄으로써 그들의 수학적 지식의 이해 정도를 살펴보았다. 그 결과, 대부분의 초등예비교사들이 나눗셈에 있어 개념간의 관련성과 단위에 대한 이해가 충분하지 않은 것으로 나타났다.

I. 들어가는 글

교육현장에서 교육의 질 제고에 결정적인 역할을 담당한다고 여겨지는 교사의 역할을 이해하는데 있어서 가장 중요하다고 고려되어지는 요소에 관해 '교사의 지식에 관한 현상 내지는 상황'이라고 Elbaz(1983)는 언급한 바 있다 이처럼 교육에 있어서 교사의 지식의 중요성에 관하여 강조하고 있듯이 수학교육에 있어서 마찬가지로 교사는 그들이 가르쳐야 하는 수학에 관한 깊이 있고 폭넓은 지식(Shulman, 1985) 뿐 아니라 그들의 학생들이 미래에 배워야하는 수학에 관해서도 잘 알아야한다. 실제적으로 수학교육이 모든 학생들을 위하여 실현되기 위해서는 학습자가 어떻게 배워야 하며 어떻게 도전받아야 하는가에 관한 지식뿐 아니라 가르쳐져야 하는, 배워야 하는 수학적 지식 및 소양에 대한 교사의 이론 및 실제에 관하 이해가 필수불가결이라고 보여 진다(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

우리나라 수학교육현장에서 많은 학습자들이 주어진 문제에 대해 짧은 시간에 기계적으로 정확하게 풀기는 하지만 그 문제에 내포되어 있는 많은 수학적 개념들에 대해서는 완전히 이해하지 못하고 기계적으로 문제를 푸는 모습을 자주 접할 수 있다. 이는 수학적 지식의 형성에 있어서 필요한 개념적 지식과 절차적 지식(Hiebert, 1986)간에 적지 않은 괴리가 나타난다고 볼 수 있다. 이는 수학적 지식의 형성 과정에서 개념적 지식과 절차적 지식간의 적절한 조화가 이루어져야 한다는 시사점을 제기하고 있다. 이렇듯 수학교육에서 점차적으로 개념적 이해(NCTM, 1989, 2000)가 강조되고 있는 시점에서 학생에게 교사가 적절하게 수학적 지식을

* 이화여자대학교(mkkim@ewha.ac.kr)

갖게끔 하기 위해서는 교사 자신이 이에 대한 충분한 지식이 있어야 하겠다(Ball, 1990; Brophy , 1991; Carpenter 외, 1988; Fosnot & Dolk, 2001; Lehrer & Franke, 1992; Peterson, 1988; Tirosh, 2000).

초등수학에 있어 7차 교육과정의 6개 영역 중 수와 연산 영역은 다른 영역에 비해 비중과 그 중요도가 매우 큰 영역이다. 초등학교에 들어오면서 학습자들의 수학적 지식이 수감각의 발전과 함께 연산에 대한 이해로 확장되면서 구체물 인식으로부터의 구체적인 수준에서 점점 추상화되어 간다. 이러한 과정에서 수학의 개념 교육은 수와 연산에 관한 용어 및 기호의 선택에서부터 시작된다고 볼 수 있으므로 초등 수준에서는 용어 안에 내재하고 있는 수학적 아이디어의 통합적 훈련이 필요하다고 보여 진다(김재복, 이경환, 허경철, 1999).

초등수학의 수와 연산 영역 중에서 초등학교 학생들이 매우 어려워하는 개념 중 하나가 나눗셈 개념이며 특히 분수의 나눗셈이 그러하다. 이와 관련하여 교사들 특히 초등예비교사들이 분수의 나눗셈을 기능적으로 어떻게 하는지에 관해 알고는 있지만 분수의 나눗셈 과정을 그 개념과 연계하여 설명하지는 못하였다는 Simon(1993) 및 Tirosh(2000) 등의 연구 결과를 고려해 볼 때, 나눗셈 개념에 대한 교사들의 이해 정도를 알아볼 필요가 있겠다. 이에 본 연구는 우리나라 초등예비교사들이 실제 교사로서 교육현장에 나서기 바로 이전 시기에 나눗셈 개념에 있어서 적절하게 개념적 지식과 절차적 지식을 관련지어 이해하고 있는지, 나눗셈에서 나누는 수와 나머지와의 관계에 대해 올바르게 이해하고 있는지 등에 관해 알아봄으로써 그들의 수학적 지식의 이해 정도를 살펴

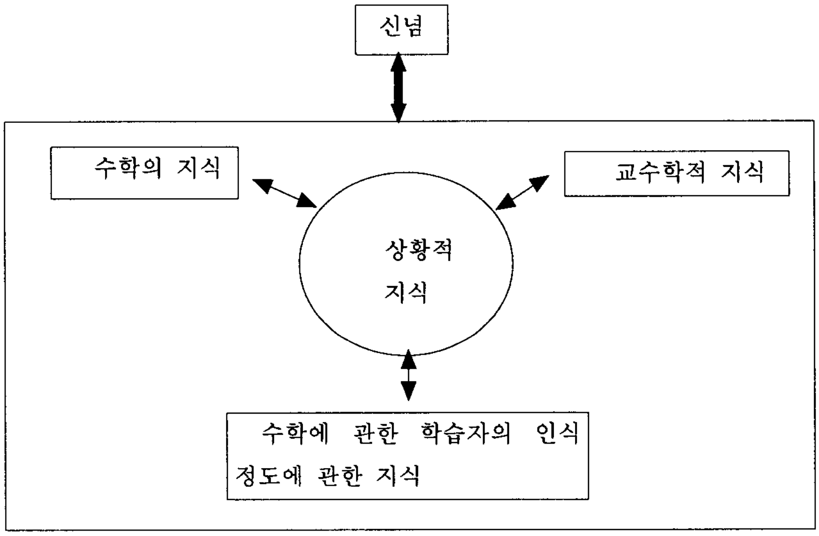
로써 그들의 수학적 지식의 이해 정도를 살펴 보고자한다.

II. 이론적 고찰

1. 교사의 수학적 지식

21세기의 교사의 역할에 대해 Hatfield 등(2000)은 '교육과정의 선정자-평가자와 교육과정 제작자의 역할을 담당하는 모듈 교사(module teacher)'라고 언급한 바 있다. 이는 교육과정 실행에 있어 그 성공 여부는 교사가 어떻게 교육내용을 선정, 구성, 평가하여 보다 적절한 교육과정으로 수정, 보완하는가에 달려 있다고 봄으로써 교사의 역할을 매우 중요하게 표현하고 있다. 그런데 이러한 교사들, 특히 초등교사와 중학교 교사들의 경우에 있어, Fennema와 Franke(1992)는 그들의 수학적 지식정도가 충분하지 않으며 매우 좋지 않다는 증거를 제시하고 있다. 또한 Brown, Cooney, Jones(1990)은 초등예비교사들이 초등수학을 가르치는데 필요한 수학적 이해 수준에 도달하지 못하였다고도 지적하였다. 이러한 현실은 단지 미국의 경우에만 적용되는 것은 아닐 것이다. 수학교육의 성공적인 결과를 기대하기 위해서는 우선 교사들의 수학적 지식의 함양이 우선되어야 할 것이다. 이러한 수학적 지식의 함양을 위해서 고려되어야 할 교사의 지식 및 수학적 지식의 구성요소에 관해 다음과 같이 설명되고 있다.

교사가 지녀야 할 지식에 대해 Lappan과 Theule-Lubienski(1992)는 수학에 대한 지식, 교육학에 대한 지식, 그리고 학생에 대한 지식 등 3가지로 분류하였다. 한편 Shulman(1986)은



[그림 1] 상황 전개를 위한 교사의 지식 모델(Greer, 1992, p162)

이를 좀더 세분화하여 교과 내용에 관한 지식, 교육학적 지식, 다른 교과 내용에 관한 지식, 교육과정에 과한 지식, 학생에 관한 지식, 일반 교육학에 관한 지식 등 7가지로 구분한 바 있다. 교사가 지녀야 할 지식에서 공통적으로 언급되는 요소로서 수학 교과에 대한 지식을 들고 있다.

좀 더 구체적으로 수학교과에 있어서의 교사의 지식에 관하여 Fennema와 Franke(1992)는 수학의 지식, 학습의 이해, 수학적 표상에 관한 이해, 그리고 교수학적 지식으로 분류하고 있다. 특히 교실에서의 상황에서 일어날 수 있는 교사의 수학적 지식에 관한 모델을 다음의 [그림 1]과 같이 제시하였다. 교사가 지니는 지식이 상호작용적이면서도 동적이라고 표현한 이 모델은 교사의 수학적 내용에 대한 지식, 교수학적 지식, 학생의 인식에 대한 지식, 그리고 교사의 신념을 포함한다. 수학교과의 주요 6개 영역에서 수와 연산 영역 중 특히 연산 지도에 있어 남승인(2000)은 수학학습에서 가장 기본적이며 기초적인 도구이며 수단의 하나인 연산 지도를 위해 교사는 연산의 의미와 성질, 그 활용과 알고리즘에 대해 이해해야 하며 다양한 계산법 및 그 변천과 특성을 이해해야 한다고 지적하였다.

2. 나눗셈의 의미 및 지도

초등수학의 나눗셈 지도에 있어서 교사가 지녀야 할 지식이란 나눗셈에 관한 지식, 나눗셈 지도에 관한 교수학적 지식, 그리고 나눗셈에 대한 학습자의 이해정도가 서로 상호보완적으

<표 1> 포함제와 등분제

구분	포함제	등분제
예제	10개의 사탕을 갖고 있는 영희는 친구들에게 2개씩 나누어주고 싶다. 몇 명의 친구들에게 2개씩의 사탕을 나누어 줄 수 있을까?	두 명의 친구와 10개의 사탕을 갖고 있는 영희는 그 친구들에게 10개의 사탕을 똑같이 나누어주고 싶다. 각 친구들은 몇 개의 사탕을 갖게 될까?
알고 있는 것	10개의 사탕	10개의 사탕
	나누어 주고자 하는 사탕 개수(2개)	두 명의 친구(2명)
알아야 하는 것	몇 명의 친구들 (5명)	각 친구들이 갖게 되는 사탕의 개수 (5개)

로 연계된 상황적인 지식이라고 볼 수 있다. 여기서 나눗셈에 관한 지식은 나눗셈 개념이 포함제, 등분제, 측정 변환, 면적 개념을 이용하여 다양한 모델로 표현될 수 있음을 이해하는 것이 필요하다(Greer, 1992). 요약적으로 나눗셈에 관한 기본적인 모델은 다음의 <표 1>과 같이 포함제와 등분제로 설명될 수 있다.

우선 포함제의 경우 10을 2로 나누는 상황에서 10을 2씩 반복해서 빼는 경우에 해당한다. 이러한 포함제는 측정의 나눗셈의 의미를 포함하고 있으며 주어진 양에 어떤 양이 얼마만큼 들어갈 수 있는지를 의미한다. 이 경우 제한점이라면 피젯수는 제수보다 커야한다는 점이며 그 몫이 자연수인 경우는 반복되는 뺄셈이라고 볼 수 있다. 다른 모델인 등분제는 피제수는 제수(除數)보다 커야 하며 제수는 자연수이어야 하며 이 제수가 똑같이 나누어 갖는다는 상황을 포함한다. 우리나라 교과서의 경우 나눗셈의 개념 도입은 3-가 단계에서 시작하는데 포함제, 그리고 등분제로 소개되며 그 예제는 다음과 같다.

포함제: 영민이는 사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어 선물하려고 한다. 모두 몇 봉지를 만들 수 있는가?(3-가 44쪽)

등분제: 수민이는 10개의 빵을 친구와 나누어 먹으려고 접시에 담고 있다. 5사람이 똑같이 나누어 먹으려면 한 접시에 몇 개씩 담으면 되는가?(3-가 48쪽)

나눗셈의 개념 지도 이후에는 실제적으로 나눗셈을 어떻게 하는가하는 방법을 다루면서 몫과 나머지를 구하는 방법을 다룬다.

한 자리수에서 점점 두 자리, 세 자리 수의 나눗셈을 다루고 다음으로는 분수와 소수로 확장하여 나눗셈을 하며 알고리즘으로 나눗셈하는 방법도 포함한다.

우리나라 교육과정(교육부, 1997)에서 나눗셈에 관한 내용 및 학습목표는 다음의 <표 2>와 같이 요약된다.

<표 2> 우리나라 교육과정에서 제시된 나눗셈 지도 내용

단계	내용	학습목표
3-가	나눗셈의 도입	-생활에서 나눗셈이 이루어지는 경우를 찾아 나눗셈의 의미를 이해한다. -곱셈과 나눗셈 사이의 관계를 이해한다.
	곱셈과 나눗셈 중	-곱셈구구 범위에서 나누어 떨어지는'(두 자리 수) ÷(한 자리 수)'의 계산을 익숙하게 할 수 있고, 나눗셈에서 몫의 의미를 이해한다.
	곱셈과 나눗셈의 활용	-곱셈과 나눗셈을 실생활 문제에 활용할 수 있다.
3-나	곱셈과 나눗셈 중	-'(두 자리 수) ÷(한 자리 수)'의 계산을 익숙하게 할 수 있고, 나눗셈에서 나머지를 이해한다.
4-가	자연수의 사칙연산	-나누는 수가 두 자리수인 나눗셈을 익숙하게 할 수 있다. -덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 계산 문제를 해결할 수 있다.
5-나	분수, 소수의 곱셈과 나눗셈	-'(분수)÷(자연수)'의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다. -몫이 소수인 '(자연수)÷(자연수)'의 계산을 할 수 있다. -소수의 나눗셈의 계산 원리를 이해하고, '(소수)÷(자연수)'의 계산을 할 수 있다.
6-나	분수와 소수의나눗셈	-나누는 수가 분수인 나눗셈을 할 수 있다. -나누는 수가 소수인 나눗셈을 할 수 있다. -간단한 분수와 소수의 혼합 계산을 할 수 있다.

또한 7차 교육과정에 근거한 교과서(3-나)에서 나눗셈 알고리즘 지도에 있어서는 수모형을 이용하고 있는데, 예를 들어 53쪽의 42 나누기 2의 경우 다음의 과정으로 전개하고 있다.

- 42의 수모형을 놓는다.
- 십 모형 4개를 2개씩 묶음으로 묶는다.
- 십 모형은 몇 묶음인지 알아본다.
- 낱개 모형 2개를 2개씩 묶음으로 묶는다.
- 낱개 묶음은 몇 묶음인지 알아본다.
- 42÷2의 계산 결과는 얼마라고 생각하는지 적는다.
- 왜 그렇게 생각했는지 적어본다.

먼저 40에 2가 몇 개 들어가는지 계산한 후 남은 수에 2가 몇 번 들어가는지 알아보는 방법으로 설명하고 있다. 이러한 방법으로의 소개의 목적은 나눗셈하는 방법을 알고리즘의 단순한 적용으로 설명할 것이 아니라 실제적으로 수모형의 활용을 통해 나누어지는 과정을 알고리즘으로 기호화하는 방법과 연계하여 그 의미를 확실히 전달하고자 노력으로 보여 진다.

나눗셈 내용의 주요한 내용이라고 볼 수 있는 분수의 나눗셈은 나눗셈을 곱셈으로 나타

내 보며 단위분수에 대한 이해를 한 후 (단위분수)÷(자연수), (진분수)÷(자연수)로 확장한다. 그리고 (대분수)÷(자연수), 분모가 같은/다른 진분수끼리의 나눗셈, (자연수)÷(진분수), 가분수와 대분수의 나눗셈을 통하여 분수의 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 분수 나눗셈의 간편한 방법을 알아내어 혼합계산을 해결하게 된다. 또한 소수의 나눗셈 지도는 소수 나누기 자연수로 시작하여 소수 나누기 소수로 확장한다. 이러한 과정을 거쳐 결론적으로 분수와 소수의 혼합계산을 다루게 된다.

한편 미국의 경우(NCTM, 2000)는 3-5학년 단계와 6-8학년 단계에서 나눗셈을 다루고 있는데 크게 다음의 두 가지의 주요 내용을 포함한다.

■ 나눗셈의 의미와 다른 연산들 간의 관계를 이해하기
■ 능숙하게 나눗셈을 계산하며 타당한 어림셈하기

각 단계의 차이는 3-5학년의 경우는 주로 자연수의 나눗셈을 다루는 반면, 6-8학년의 경우는 분수, 소수로 확장하여 나눗셈을 다루고 있다는 점이다.

또한 일본의 초등수학의 경우(강완, 백석윤, 1998 참조)는 다음과 같이 요약된다.

■ 3학년: 정수에 대하여 나눗셈의 의미를 이해하고 기초적인 계산이 가능하며 그 유용성을 알고 정확하고 능률적으로 이해하기
■ 5학년: 소수의 나눗셈의 의미에 대해 이해하고 소수와 분수에 대하여 계산하기
■ 6학년: 분수의 나눗셈에 대하여 이해하고 그 이해의 폭을 넓히기

3. 나눗셈에 대한 선행연구

나눗셈에 관한 연구로는 우선 학생들의 나눗셈에 대한 인식에 관한 연구를 들 수 있는데 이에 관한 연구로는 나눗셈을 포함하는 1단계 문장제의 의미론적 구조에 관한 연구(Schmidt & Weiser, 1995)와 함께 나눗셈에 대한 초등학생들의 풀이전략 연구(Boero, 1989; Grouws & Good, 1976; Harel & Behr, 1991; Mulligan & Mitchelmore, 1997), 등분제와 포함제의 관계에 대한 인식(Neuman, 1999) 연구, 교구를 사용하였을 때의 효과 연구(Burton, 1992), 그리고 나눗셈에 있어 3-8학년 학생들이 나타내는 오류 및 오개념 분석 연구(Graeber & Baker, 1991; Stefanich & Rokusek, 1992) 등을 들 수 있다.

또한 Silver(1986)는 흔히 알고리즘 위주의 나눗셈에 익숙해 있는 학생들이 등분제와 포함제의 연계적 이해가 없음을 지적하며 나눗셈에 관한 개념적 이해와 절차적 이해간의 연결의 중요성을 언급하기도 하였다. 또한 초등학생들이 나눗셈을 이해해 가는데 있어 그들 간의 풀이과정에 대해 서로 토론하며 그들의 아이디어를 나눌 수 있는 경험이 중요하다(Kamii & Warrington, 1995; Weilan, 1985)는 연구 결과도 나타났다.

다음으로는 교사/예비교사의 나눗셈에 대한 인식에 관한 연구(Graeber & Tirosh 1988; Graeber, Tirosh & Glover, 1989,; Harel 외, 1989; Huinker, 1989; Silver & Burkett, 1994; Simon, 1993; Tirosh, 2000 등)를 들 수 있는데 대부분의 연구 결과들이 초등예비교사들이 나눗셈에 대해 폭넓게 이해하고 있지 않고 있으며 나눗셈에 대한 오개념을 갖고 있음을 나타냈다. 관련 연구들 중 초등예비교사의 나눗셈에 관한

Simon(1993)의 연구를 살펴보면 다음과 같다. 이 연구에서는 초등예비교사 33명을 대상으로 다섯 개의 개방식 나눗셈 관련 문제를 사용하여 그들의 나눗셈에 대한 이해 정도를 측정하였다. 이들 문제는 알고리즘을 사용하여 풀기보다는 그 이상의 이해가 있어야 해결할 수 있는 문제들로 구성되어 있다. 이는 나눗셈에 관한 초등예비교사들의 이해 정도에 있어 다음의 두 가지 관점을 중점으로 평가하고자 하였다.

- 관련성(절차적 지식/개념적 지식, 실생활 상황/상징적 계산, 추상적/실제적 상황)
- 단위(unit)에 대한 이해

먼저 관련성에 관한 평가에 있어서, 나눗셈이라는 연산이 개념적 지식을 바탕으로 절차적 지식이 유의미하게 관련지어질 때, 실제적 상황에서 필요한 상징적 계산이 적절히 이루어질 때, 추상적인 세계와 실제적인 세계가 잘 연계되어 있을 때 나눗셈이 실제적으로 가능하기에 이를 고려한 것으로 보여 진다. 이를 평가하기 위하여 다양한 나눗셈의 상황을 제시하고 있다.

또한 단위에 대한 이해에 관한 평가는 피젯수를 제수로 나눌 때 몫과 나머지로 구할 수 있어야 하지만 제수를 기준으로 한 나머지의 표현이 제대로 이루어져야 함을 고려한 것이다. 예를 들면 3을 $\frac{2}{3}$로 나누는 경우, 나머지의 결과는 $4\frac{1}{2}$로 표현된다. 이때 분수로 나누는 나눗셈을 제대로 이해하고 있는가는 $\frac{1}{2}$을 $\frac{2}{3}$과 연계하여 제대로 표현하고 설명할 수 있어야 한다. 이 경우, $\frac{1}{2}$의 이해에 있어 많은 학습자들, 교사들조차도 이를 제대로 이해하고 있지 못하다. $\frac{1}{2}$은 나누었던 수, $\frac{2}{3}$를 단위로 보았을 때 얼마를 차지하는가에 대해 $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{2}$만큼이므로 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$인 $\frac{1}{3}$을 차지하는 것이다.

지금까지 언급된 두 가지 평가 관점을 기초로 하여 Simon(1993)의 연구에서 사용되었던 다섯 개의 평가문제 및 관련 요소들은 다음과 같다.

A. 자연수 나눗셈 문장제

51을 4로 나누어 답이 각각 ① $12\frac{3}{4}$, ② 13, 그리고 ③ 12가 나올 수 있는 문장제를 만드는 문제로서 이는 실생활 상황과 상징적 계산간의 관련성 여부를 평가하고자 하였다.

B. 분수 나눗셈 문장제

$\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{4}$로 나누는 문장제 문제를 만들고 분수 나눗셈을 처음 학습한 아동의 입장에서 그 풀이 과정을 서술하는 문제로서 나눗셈 과정에서의 추상적 표현과 실생활간의 관련성 여부를 평가하고자 하였다.

C. 계산기를 이용한 나눗셈

계산기를 이용하여 598473947 나누기 98762를 하는 경우 그 나머지를 구하는 문제로서 단위에 대한 이해와 절차적 지식과 개념적 지식간의 관련성 여부 및 단위에 대한 이해정도를 평가하고자 하였다. 이는 보통 계산기를 이용하는 경우 나눗셈의 결과는 몫과 나머지를 나타내주기 않기에 계산기 계산 결과를 몫과 나머지로 표현할 수 있는지를 평가하였다.

D. 자연수 ÷ 분수

35 ÷ $\frac{3}{8}$의 몫과 나머지 구하는 문제로서 단위에 대한 이해 및 절차적 지식과 개념적 지식간의 관련성 여부를 평가하고자 하였으며 그 내용은 다음과 같다.

Serge는 35컵의 밀가루를 갖고 있다. 과자를 만들려고 보니 한 컵의 $\frac{3}{8}$으로 한판의 과자(한판에서 만들어지는 과자의 양은 같다고 본다)를 만들 수 있다고 한다. Serge가 갖고 있는 밀가루로 가능한 한 많은 과자를 만든다면 몇 판의 과자를 만들고 밀가루는 얼마나 남을까?

E. 나눗셈 알고리즘

715 ÷ 12의 계산 과정에서 나타나는 다음의 과정에서 곱하기와 빼기 과정이 어떻게 답을 찾아나가는데 사용되는지 설명하는 문제로서 절차적 지식과 개념적 지식간의 관련성 여부 및 단위에 대한 이해정도를 평가하고자 하였다.

$$\begin{array}{r} 59 \\ 12\,\overline{)\,715} \\ -\;\underline{60} \\ 115 \\ -\;\underline{108} \\ 7 \end{array}$$

이 연구에서 나타난 결과는 다음의 <표 3>과 같다. 1번의 ②문제의 경우(51을 4로 나누어 13이 나오는 경우), 연구 참여자의 36% 만이 정답을 하였으며 3번(계산기 문제)와 5번(나눗셈 알고리즘)의 경우는 한 명도 나눗셈에 대한 완전한 이해를 나타내지 못하였다. 이는 나눗셈을 하는 연산적 기능에는 익숙해 있지만 실제적으로 수를 나눈다는 의미를 올바로 이해하지 못하고 있어서 나눗셈의 개념적 지식과 절차적 지식간의 연계가 적절히 이루어지지 못했음을 나타낸다. 이는 수를 나눌 때 나누는 수와 나머지를 올바르게 이해하지 못했음을 의미하기도 한다.

<표 3> 각 문제별 정답 분포

(%)

문 제	정 답
A. 자연수 나눗셈 문장제	
① 나눗셈	76
② 올림	36
③ 버림	61
B. 분수 나눗셈 문장제	30
C. 계산기 이용 문제	0
D. 자연수 ÷ 분수	15
E. 나눗셈 알고리즘	0

III. 나눗셈 이해 분석을 위한 조사연구

1. 조사 대상 및 연구 절차

조사 대상은 서울에 위치한 초등교사양성대학교에서 2000, 2001, 2002년도에 초등수학기초이론과 초등수학교육방법 과목을 수강한 3, 4학년 학부생인 초등예비교사 178명이다. 학기초 분수의 개념이나 나눗셈의 개념 지도가 시작되기 전에 연구 대상에게 나눗셈 검사지를 통한 나눗셈에 관한 이해 정도를 측정하는 평가가 이루어졌다.

<표 4> 각 문제별 평가하고자 하는 요소

문제	평가 요소	
	관련성	단위(unit)에 대한 이해
A. 자연수 나눗셈 문장제	○(실생활 상황과 상징적 계산 간)	×
B. 분수 나눗셈 문장제	○(추상적 상황과 실제적 상황 간)	×
C. 자연수 ÷ 분수	○(절차적 지식과 개념적 지식 간)	○
D. 나눗셈 알고리즘	○(절차적 지식과 개념적 지식 간)	○

2. 나눗셈 검사지

초등예비교사들의 나눗셈에 관한 수학적 지식의 이해 정도를 알아보기 위하여 수행된 본 연구에서는 Simon(1993)의 선행연구에서 사용되었던 다섯 개의 개방식 문제 중 계산기를 사용해서 풀 수 있는 문제를 제외한 나머지 네 문제를 현 우리나라의 교육 상황을 고려하여 수정, 보완하여 사용하였다. 이들 나눗셈 문제는 알고리즘을 사용하여 단순히 기능적으로 풀기보다는 나눗셈에 관한 그 이상의 이해가 있어야 해결할 수 있는 문제들로 구성되어 있다. 이는 나눗셈에 관한 초등예비교사들의 이해 정도에 있어 절차적 지식과 개념적 지식 간의 관련성 여부를 측정하면서 분수 나눗셈의 경우는 나누는 수에 대한 이해(단위) 정도를 측정하고자 하였다.

A. 분석 방법 및 평가 기준

본 연구에서 사용된 나눗셈에 관한 네 문제에서 보고자 하였던 지식의 평가 관점은 크게 관련성과 단위에 대한 이해로서 각 문항에 대한 해당부분은 다음의 <표 4>와 같다. 예를 들어 C. 나눗셈 알고리즘의 경우 보고자 하였던 관련성 지식은 절차적 지식과 개념적 지식간의 관련성이었으며 단위에 대한 이해도를 측정하였다. 각 문항에 대한 응답자의 모든 응답은 정답과 오답으로 처리되었으며, 확실하게 정답을 나타내는 경우, 정답으로 처리되었으며 완전한 이해를 나타내지 못하는 모든 경우, 오답으로 처리하였다.

○: 해당됨
×: 해당사항 없음

<자연수 나눗셈 문장제>

■ 55를 4로 나누어 답이 각각 다음과 같이 나올 수 있는 문장제 만들기

① $13\frac{3}{4}$, ② 14, ③ 13

55를 4로 나누는 경우, 대부분의 학생이 계산의 결과가 $13\frac{3}{4}$ 이라고 생각하는데 14와 13이 나오는 경우, 즉 나눗셈에서 올림과 버림에 관한 상황 이해로 확장되는지를 평가하고자 하였다. 연구 대상이 응답한 문장제 중에서 올림이나 내림의 경우가 나타날 수 있는 상황을 제시하지 않고 반올림을 한다거나 올림, 내림을 한다는 언급을 함으로써 문제를 풀고자 하였던 경우는 오답처리를 하였다. 우리나라의 교육과정의 경우, 4-나 단계의 어림하기 단원에서 올림과 버림을 알아보는 활동을 포함하고 있으며 교과서에서 제시된 관련 문제는 다음과 같다.

진호네 학교의 4학년 학생은 287명이다. 강당에 4학년 학생이 모두 앉을 수 있도록 10 명씩 앉을 수 있는 긴 의자를 놓기로 하였다. 4학년 학생을 모두 몇 명이라고 생각하고 의자를 놓아야 하는가?(80쪽)

<분수 나눗셈 문장제>

■ $\frac{3}{5}$을 $\frac{1}{5}$로 나누는 문장제를 만들고 분수 나눗셈을 처음 학습한 아동의 입장에서 그 풀이 과정을 서술하기

분수 나누기 분수의 문장제 서술이 적절한 상황을 제시하고 적절한 풀이 과정을 서술할 때 정답으로 처리하였다. 문장제 서술은 상황으로 제시되어야 하는데 분수 나누기 분수에 관한 상황제시가 적절하지 못한 경우 오답으로 처리하였다.

<자연수 ÷ 분수>

■ 민수는 35컵의 밀가루를 갖고 있다. 과자를 만들려고 보니 한 컵의 $\frac{3}{8}$으로 한판의 과자(한판에서 만들어지는 과자의 양은 같다고 본다)를 만들 수 있다고 한다. 민수가 갖고 있는 밀가루로 가능한 한 많은 과자를 만든다면 몇 판의 과자를 만들고 밀가루는 얼마나 남을까?

이 문제는 분수를 포함하는 나눗셈에 대한 이해 뿐 아니라 다음 두 가지의 요소간의 관계를 알아보고자 하는 문제이다.

(a) 대분수로 표현되는 $\frac{\text{자연수}}{\text{분수}}$ 의 비(比)(35 ÷ $\frac{3}{8}$의 경우)에서 나타나는 정수(93)와 진분수($\frac{1}{3}$)에서의 진분수($\frac{1}{3}$)

(b) 분수인 제수를 갖는 나눗셈의 결과 나타나는 나머지

이 경우, 35컵의 밀가루를 $\frac{3}{8}$으로 나눌 때 93과 $\frac{1}{3}$이 나오는데 이는 93판과 $\frac{1}{3}$판의 과자를 만들 수 있음을 의미한다. 여기서 $\frac{1}{3}$판은 완전한 과자를 못 만들고 남는 밀가루로서 그 실제 밀가루의 양은 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$(과자 한판을 만드는데 필요한 밀가루의 양은 $\frac{3}{8}$이므로) 실제적으로 남는 밀가루의 양은 $\frac{1}{8}$컵이다(정답은 과자수: 93판, 남는 밀가루의 양: $\frac{1}{8}$컵 이다). 문항 응답은 과자수 및 남는 밀가루의 양, 두 가지를 모두 맞추었을 때 정답으로 처리하였다.

<나눗셈 알고리즘>

■ 715에서 12를 나누어가는 과정에서 곱하기와 빼기 과정이 어떻게 답을 찾아나가는데 사용되는지 설명하기

문항 응답자가 어떻게 곱하기와 빼기 과정이 답을 찾아나가는데 사용되는지에 관해 자연수에서 자연수를 나누는 과정에서 나눗셈 알고리즘을 이용하는 경우, 큰 수를 나눌 때에 나누기, 곱하기, 빼기, 밑에 내리기의 과정을 반복하게 되는 과정이 자세하게 설명될 때 정답으로 처리하였다.

Ⅳ. 결과 및 분석

1. 문항별 응답결과

초등예비교사들을 대상으로 나눗셈에 관한

<표 5> 각 문제별 정답자수 명수(%)

문제	정답자수
A. 자연수 나눗셈 문장제	
① $13\frac{3}{4}$	133 (74.7)
② 14	95 (53.4)
③ 13	124 (69.7)
B. 분수 나눗셈 문장제	97 (54.5)
C. 자연수 ÷ 분수	46 (25.8)
D. 나눗셈 알고리즘	74 (41.6)

그들의 수학적 지식의 이해 정도를 알아보기 위하여 나눗셈과 관련한 각 문항별 응답 결과는 다음의 <표 5>와 같이 요약된다. $\frac{3}{4}$

A. 자연수 나눗셈 문장제 평가 결과

55를 4로 나누어 답이 각각 13, 14, 13이 나올 수 있는 문장제를 만들어 보게 함으로써 나눗셈의 포함제/등분제 표현의 적절성 및 나눗셈을 통한 올림/버림의 상황 표현의 적절성을 평가하고자 하였다.

① $13\frac{3}{4}$의 경우 나눗셈의 문장제 표현에서 포함제보다는 등분제로 표현되는 경우가 보다 적절하게 평가되었으며 연구 대상 총 178명 중 133명이 정확하게 표현함으로써 정답률은 74.7%를 나타내고 있다. 이 정답률은 ①, ②, ③의 세 응답 결과 가장 높은 응답률을 나타내었다. 응답자의 대부분이 다음과 같이 55라는 양을 4등분하는 등분제의 상황을 나타내었다.

정답의 예: 철수는 55cm 길이의 줄을 4등분하려고 한다. 줄 한 개의 길이는 얼마일까?

② 14의 경우, 총 응답자 중 95명이 55를 4로 나누어 답이 14가 나오는 문제를 적절하게 제시함으로써 정답률은 53.4%를 나타내었다. 이 결과는 ①, ②, ③의 세 경우의 정답률 중 가장 낮은 수치를 나타나고 있다. 이 결과는 Simon(1993)의 연구에서 미국 초등예비교사들이 ①, ②, ③ 중 가장 낮은 비율, 36%를 나타낸 결과를 볼 때, 우리나라 초등예비교사들도 나눗셈(등분제), 올림, 버림의 경우 올림의 상황을 가장 어려워하는 것으로 나타냈다. 본 연구에서 나타난 대표적인 정답의 예시는 다음과 같으며 그 내용으로는 55명의 인원이 4명씩 의자에 앉거나 버스를 타는 상황과 협동학습을 위한 조 편성 상황이 대부분이었다.

정답의 예(1):
55명의 학생이 있다 .이때 한 개의 의자에 4명씩 앉을 수 있다면 이 학생들을 모두 앉히려면 적어도 몇 개의 의자가 필요한가?

정답의 예(2):
유경이네 반 학생은 모두 55명이다. 이 학생들은 한 모둠에 4명씩 나누려고 한다. 모두 몇 모둠이 되겠는가?

③ 13의 경우, 정답률은 69.7%이었으며 문장제의 대부분의 예는 55개의 물건을 4개씩 포장 판매하여 판매할 수 있는 총 포장 개수를 구하는 다음과 같은 문제 상황이었다.

정답의 예:
55개의 사탕이 있다. 이 사탕은 한 봉지에 4개씩 넣어 판매를 한다고 한다. 이때 판매할 수 있는 것은 모두 몇 봉지인가?

55 나누기 4의 경우, 55 나누기 4에 관한 나누기(A-①, 답이 $13\frac{3}{4}$)가 나눗셈에 대한 직접적인 이해로 보여지므로 A-②와 A-③과 같은 올림과 버림의 문제 상황을 만드는 적절한 문제를 만드는데 어려움을 나타낸 응답자에 대하

여 나눗셈 개념에 관한 이해도가 낮다고 간주하기는 어려울 것이다. 이는 응답자가 나눗셈과 관련한 문제(올림과 버림 등)에 대한 응답자의 이해에 관한 보충적인 자료로 활용될 수 있을 것이다.

B. 분수 나눗셈 문장제 평가 결과

$\frac{3}{5}$을 $\frac{1}{5}$로 나누는 문장제 문제를 만들고 분수 나눗셈의 그 풀이 과정을 서술하는 문항으로서 정답률 54.5%를 나타냄으로써 응답자의 절반 정도가 분수 나눗셈에 대한 절차적 지식과 개념적 지식 간 적절하게 관련짓고 있음을 알 수 있다. 이 문항의 정답의 예는 다음과 같다.

정답의 예(1):
$\frac{3}{5}$m의 리본이 있다. 이 리본을 한 사람 당 $\frac{1}{5}$씩 사용한다고 한다면 몇 사람이 이 리본을 사용할 수 있는가?

정답의 예(2):
$\frac{3}{5}$kg의 설탕을 $\frac{1}{5}$kg을 담을 수 있는 컵에 나누어 담는다면 모두 몇 개의 컵에 담을 수 있을까?

C. 자연수 ÷ 분수 평가 결과

한 컵의 $\frac{3}{8}$으로 한판의 과자(한판에서 만들어지는 과자의 양은 같다고 본다)를 만들 수 있는 경우, 35컵의 밀가루로 가능한 한 많은 과자를 만들 때 만들 수 있는 총 과자의 판 수 만들고 남은 밀가루의 양을 구하는 문제이다. 문항의 정답률은 25.8%를 나타냈으며, 응답 결과 대부분의 경우 35를 $\frac{3}{8}$으로 나눔으로써 93과 $\frac{1}{3}$을 구하면서 총 과자판 수: 93(판)까지는 구하지만 남은 $\frac{1}{3}$의 의미를 제대로 이해하지 못하여 남는 밀가루의 양인 $\frac{1}{8}$컵을 구하지 못하는 것을 나타났다. 응답 결과 나타난 정답의 예시는 다음과 같다.

정답의 예:
35 ÷ $\frac{3}{8}$ 을 하면 93(판)과 $\frac{1}{3}$이 남는다. 이 경우 $\frac{1}{3}$은 처음 35에서 나눈 $\frac{3}{8}$의 $\frac{1}{3}$($\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$)이므로 실제적으로 남은 밀가루의 양은 $\frac{1}{8}$컵이다.

D. 나눗셈 알고리즘

715를 12로 나누는 과정을 설명하는 이 문항은 응답자가 어떻게 나눗셈 알고리즘 과정에서 반복하여 나타나는 나누기, 곱하기, 빼기, 밑에 내리기의 과정에서 곱하기와 빼기 과정이 답을 찾아나가는데 사용되는지 설명하는지 알아봄으로써 나눗셈 과정에서 나타나는 절차적 지식과 개념적 지식간의 관련성을 보고자 하였다. 또한 풀이과정에서 곱하기, 빼기, 밑에 내리기 과정에서 12라는 단위에 대한 이해를 올바로 하는지에 관하여도 알아보고자 하였다. 이 문항의 응답 결과, 41.6%의 정답률을 나타내었다.

정답의 예:
715를 12로 나눌 때 먼저 12와 곱해서 715 근처의 수이면서 715보다 작은 수를 찾아볼 수 있다. 그 수는 12 곱하기 5(0)로서 600이 나온다. 만약 12 곱하기 6(0)은 720 이므로 이 경우는 적절하지 않다. 그래서 12 곱하기 5(0)인 600을 715에서 뺀다. 그러면 115가 나오는데, 이 수는 12보다 크기에 나눌 수가 있다. 이때,

12와 9를 곱하면 108이 나오는데 이 108은 115와 가장 가까운 수가 된다. 만약 12에 10을 곱하면 120이 나오므로 120은 115보다 큰 수이기 때문에 뺄 수가 없다(즉 나눌 수가 없다) 따라서 115에서 108을 빼야 하는데 이때 남은 숫자는 7이다. 7은 12보다 작은 수이므로 12로 7을 나눌 수가 없으므로 계산은 여기서 끝나게 된다.

2. 문항별 조사결과 분석

A. 자연수 나눗셈 문장제 평가 결과

55 나누기 4와 같은 자연수 나눗셈 문장제를 만들어 보게 함으로써 나눗셈의 포함제/등분제 표현의 적절성 및 나눗셈을 통한 올림/버림의 상황 표현의 적절성을 평가한 결과, 답이 각각 $13\frac{3}{4}$, 14, 13이 나올 수 있는 자연수 나눗셈 문장제의 경우 정답률은 각각 74.7%, 53.4%, 69.7%를 나타냈다. 이는 자연수 나눗셈에 있어서의 절차적 지식과 개념적 지식간의 관련 정도가 각 문항별로 53.4%에서부터 74.7%를 나타냄으로써 보통보다 약간 높은 정도를 나타내었으며 올림의 상황을 나타내는 문장제의 경우를 가장 어려워하는 것으로 볼 수 있다. 이는 초등예비교사가 자연수 나눗셈에 대한 연산을 할 수 있으면서 나눗셈과 관련한 올림, 버림 등과 같은 개념을 적절히 관련시키지 못하고 있음을 나타낸다고 하겠다. 이러한 결과를 볼 때, 올림이나 버림이 어떠한 상황에서 필요한지에 관해 교사는 다양하고 적절한 예를 제시하며 학생은 관련된 상황을 만들 수 있고 이를 수학적으로 표현할 수 있는 지도방법을 고려해야 하겠다.

B. 분수 나눗셈 문장제 평가 결과

분수 나눗셈 문장제의 경우 나타난 결과는 Simon(1993)의 연구에서 나타낸 30% 보다는 비교적 높은 정답률 54.5%를 나타내고 있다. 하지만 본 연구 대상인 우리나라 초등예비교사의 절반 정도 밖에 분수 나누기 분수 나눗셈에 대한 적절한 상황을 만들어내지 못한다는 결과는 우리나라 초등예비교사에게 필요한 수학적 지식이 충분히 함양되어 있는가하는 의구심을 제기하지 않을 수 없다. 이는 앞의 자연수 나눗셈 문장제의 경우와 마찬가지로 많은 수의 초등예비교사가 나눗셈이라는 절차적 지식이 개념적 지식과 적절하게 관련하지 못하고 있음을 나타낸다. 이는 나눗셈이라는 연산을 문제 상황 속에서 이해할 수 있어야 하며 이와 관련한 개념들의 이해도 확보되어야 함을 의미한다. 또한 나눗셈을 등분제로만 이해하고 있는 경우 분수의 나눗셈을 포함제 상황으로 이해하지 못하고 있음을 나타낸다고 볼 수 있다. Graeber, Tirosh & Glover(1989)와 Simon(1993)의 연구에서 지적하듯이 초등예비교사들이 나눗셈을 대부분이 등분제로 이해하기 때문에 포함제의 상황을 잘 연결시키지 못한다고 볼 수 있다. 이는 분수의 나눗셈 지도에 있어서 교사는 기계적 연산에 치중하기보다는 학습자들이 분수의 나눗셈이 어떠한 상황에서 일어나며 어떠한 과정으로 풀어나가는지에 관한 이해가 가능하도록 분수막대나 분수타일, 패턴블록과 같은 구체물을 사용하는 방법을 고려해야 하겠다.

C. 자연수 ÷ 분수 평가 결과

자연수 ÷ 분수 평가 결과, 문항의 정답률은 25.8%를 나타내고 있으며 이는 Simon(1993)에서 나타난 정답률 15%보다는 높게 나타났다. 하지만 연구 대상의 4분의 3 정도의 초등예비교사가 나눗셈의 과정 및 결과에서 나타나는 $\frac{3}{8}$과 $\frac{1}{3}$의 의미를 정확히 이해하지 못하고 두 분수간의 의미를 제대로 연계하지 못함으로써 절차적 지식과 개념적 지식간 관련성을 제대로 나타내지 못하며, 분수로 나누는 연산을

한다고는 하지만 나누는 수(단위)에 대한 이해가 충분하지 않음을 나타낸다. 이 결과를 볼 때, 교사는 자연수 나누기 분수의 상황에서 그 결과가 대분수로 표현되는 $\frac{자연수}{분수}$ 의 비에 관한 이해뿐 아니라 나눗셈의 결과 나타나는 나머지의 의미에 관한 이해를 할 수 있도록 지도하여야겠다.

D. 나눗셈 알고리즘

41.6%의 정답률을 나타낸 나눗셈 알고리즘의 경우는 Simon(1993)의 선행연구에서 미국의 초등예비교사의 단 한 명도 올바르게 서술하지 못한 결과에 비교하면 본 연구에서 우리나라 초등예비교사는 비교적 매우 높은 정답률을 나타냈다고 보여 진다. 그렇지만 절반 이상의 초등예비교사가 나눗셈 알고리즘 과정을 올바르게 표현하지 못하고 있다는 점은 초등예비교사 교육 프로그램에 시사하는 바가 크다고 할 수 있다. 이는 나눗셈의 연산 과정에서 피제수와 제수가 연산 중에 서로에게 어떠한 영향을 주고 있는지에 대한 충분한 이해가 있은 후에 그 과정에 대한 알고리즘에 대한 이해가 요구되는데 이러한 점이 교사 교육 프로그램에서 고려되어야 하겠다.

V. 마치는 글

우리나라 초등예비교사들이 나눗셈에 대한 그들의 수학적 지식의 이해 정도를 살펴본 결과 대부분의 초등예비교사들이 나눗셈에 있어 개념간의 관련성과 단위에 대한 이해가 충분하지 않은 것으로 나타났다. 이는 Ball(1990)과 Simon(1993)의 선행연구에서 미국의 초등예비교사들의 상황적 모델로서 나눗셈에 대한 이해가 매우 심각하게 나타났으며 나눗셈에 대한 기호와 기계적인 연산에는 익숙하여 있지만 개념적 지식과 절차적 지식간의 관련에 있어서는 낮은 이해도를 나타낸 결과와 같이 우리나라의 초등예비교사들도 유사한 결과를 나타냈다고 보여 진다.

본 연구와 관련하여 초등예비교사에게 의미있고 실제적인 교육 프로그램 운영 및 초등교육의 활성화를 위하여 다음과 제언하고자 한다.

우선, 초등예비교사들의 수학적 지식들의 대부분은 그들의 학생 시절 학습경험에서부터 나온다고 해도 과언이 아닐 것이다. 이러한 경험을 갖고 온 예비교사들이 그들의 수학적 지식과 교수방법적 지식이 의미있게 연계되어 있지 않다면 학생 시절의 학습 경험을 바탕으로 한 교사의 교수 경험이 교실현장에서 다시 반복되는 악순환은 계속될 것이다. 이러한 현상이 다시 반복되지 않게 하기 위하여 초등예비교사 양성 프로그램에서 그들의 사전 수학적 지식을 올바르게 파악하고 그들에게 적절한 내용 지식 함양 및 관련 교수 방법을 제공하여야 할 것이다.

다음으로 초등예비교사들의 나눗셈에 대한 이해를 돕기 위하여, 포함제와 등분제를 포함하는 나눗셈의 개념에 대한 다양한 모델을 제시하며 각각의 적절한 상황을 스스로 제시할 수 있도록 그 이해의 폭을 넓혀야 하겠다. 또한 연산 중에서도 학생들이 가장 어려워하는 연산인 나눗셈의 이해를 위하여 뺄셈과 더불어 곱셈과 연계되어져야하며 나눗셈과 관련한 많은 관련 영역들(예를 들면 비와 비례, 확률과 통계 등)과도 연계되어야 하겠다. 더욱이 초등예비교사들이 나눗셈 지도에 있어서 다양한 교수전략(Fosnot & Dolk, 2001)을 현장에서 나타낼 수 있도록 이론과 실제의 유연한 연계가 필

요하다고 하겠다.

마지막으로 초등예비교사들이 분수를 어떻게 나누는지는 알아도 그 과정을 설명하지 못하였던 Tirosh(2000)의 연구 및 본 연구 결과를 볼 때, 분수 나눗셈에 대한 이해를 돕기 위해 패턴블록과 같은 구체적 조작물의 활용(구미종, 2002)도 나눗셈에 대한 이해증진에 긍정적인 영향을 가져올 것으로 기대된다. 또한 개인이 아닌 동료자와의 협력학습을 통하여 나눗셈에 관한 지식이 다양한 교수-학습 상황에서 구성되어지고 평가되어야 할 것이다.

참고문헌

강완 · 백석윤(1998). **초등수학교육론**. 서울: 동명사.

교육부(1997). **제7차 수학과 교육과정.**

교육인적자원부(2001). **수학 3-가 교과서.**

교육인적자원부(2001). **수학 3-나 교과서.**

교육인적자원부(2001). **수학 4-나 교과서.**

구미종(2001). **패턴 블록을 활용한 분수학습에서 초등학교 4학년 아동의 학업 성취도 및 태도에 관한 연구**. 이화여자대학교 미간행 교육대학원 석사학위논문.

김재복 · 이경환 · 허경철(1999). **초등학교 교육과정 해설**. 서울: 교육과학사.

남승인(2000). 초등학교 수학 학습지도와 관련된 교사의 지식에 관한 고찰. **수학교육논문집, 10**, 43-58.

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 132-144.

Boero, P. (1989). Division Problems: Meanings and Procedures in the Transition to a Written Algorithm. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 17-25.

Brophy, J. E. (1991). Conclusion to advances in research on teaching, Vol. 2: Teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. In J. E. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction* (Vol. 2, pp. 347-362). Greenwich, CT: JAI Press.

Brown, S. I., Cooney, T. J., & Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 639-656). New York: Macmillan.

Burton, G. (1992). Young Children's Choices of Manipulatives and Strategies for Solving Whole Number Division Problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 14*(2), 2-17.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(5), 385-401.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. New York: Nichols.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.147-164). New York: Macmillan Publishing Co.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division. (ED458116).

Graeber, A. O., & Baker, K. M. (1991). Curriculum Materials and Misconceptions Concerning Multiplication and Division. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(3), 25-38.

Graeber, A. O., & Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Perspective elementary teachers' perfomance and beliefs. *Journal of Mathematical Behavior, 7,* 263-280.

Graeber, A., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 95-102.

Greer, B. (1992) Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (pp.276-295). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Grouws, D. A., & Good, T. L. (1976). Factors Associated with Third- and Fourth- Grade Children's Performance in Solving Multiplication and Division Sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(3), 155-171.

Harel, G., & Behr, M. (1991). Ed's Strategy for Solving Division Problems. *Arithmetic Teacher, 39*(3), 38-40.

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1989). Fischbein's theory: A further consideration. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Psychology of Mathematics Edcaution Conference* (vol. 2, pp. 52-59). Paris, France.

Hatfield, M. M., Edwards, N. T., & Bitter, G. G., & Morrow, J. (2000). *Mathematics Methods for Elementary and Middle School Teachers* (4th ed). New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Huinker, D. M. (1989). Multiplication and Division Word Problems: Improving Students' Understanding. *Arithmetic Teacher, 37*(2), 8-12.

Kamii, C., & Warrington, M. A. (1995). Division with Fractions: A Piagetian, Constructivist Approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 3,* 53-62.

Lappan, G., & Theule-Lubienski, S. (1992). Training teachers or educating professsionals? What are the issues, and how are they being resolved? In D. Robitaille, D. Wheeler, & C. Kieran (Eds.), *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education, Quebec,* (pp. 249-261), Quebec City, Quebec: Les Presses de l' Universite Laval.

Lehrer, R., & Franke, M. L. (1992). Applying personal construct psychology to the study of teachers' knowledge of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 223-241.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-30.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Neuman, D. (1999). Early Learning and Awareness of Division: A Phenomenographic Approach. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 101-28.

Peterson, P. L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational Researcher, 17*(5), 5-14.

Schmidt, S., & Weiser, W. (1995). Semantic structures of One-step word problems involving multiplication or division. *Educational Studies in Mathematics, 28*(1), 55-72.

Shulman, L. S. (1985). On teaching problem solving and solving the problems of teaching. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.439-450). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Silver, E. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: *The case of mathematics* (pp. 181-198). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silver, E. A., & Burkett, M. L. (1994). The Posing of Division Problems by Preservice Elementary School Teachers: Conceptual Knowledge and Contextual Connections. (ED381348)

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 233-254.

Stefanich, G. P., & Rokusek, T. (1992). An Analysis of Computational Errors in the Use of Division Algorithms by Fourth-Grade Students. *School Science and Mathematics, 92*(4), 201-05.

Tirosh, D. (2000). Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Weilan, L. (1985). Matching Instruction to Children's Thinking about Division. *Arithmetic Teacher, 33*(4), 34-35.

Knowledge of Preservice Elementary Teachers with Respect to Division

Kim, Min Kyeong (Ewha Womans University)

The purpose of this study was to investigate the preservice elementary teachers' knowledge of division through open-ended problems focused on the following perspectives in understanding division : connectedness between procedural and conceptual knowledge as well as the knowledge of units. Results indicates that the preservice elementary teachers showed low level of understanding of division such as the making word problem including division of fractions and the identification of the units in division operation.

* **key words: 초등예비교사, 나눗셈, 개념 이해**