대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.2, 167-189. June 2003

초등학교에서의 암산 지도에 관한 논의

정 영 옥*

본 연구는 최근에 초등학교 수학에서 관심의 대상이 되고 있는 암산 지도의 교수학적 배경과 여러 나라의 암산 지도 실제를 살펴봄으로써 우리 나라 초등학교 수학에서의 암산 지도에 대한 시사점을 도출하는 데 그 목적이 있다. 이러한 목적을 위하여 지난 10여 년 동안 계속 논의되어 온 수학적 소양의 의미와 이와 관련해서 더욱 중시되고 있는 암산의 의미와 중요성뿐만 아니라 미국의 EM, 영국의 NNP, 네덜란드의 TAL, 독일의 mathe 2000 프로젝트에서 제안하고 있는 내용들을 통해 암산 지도의 실제 및 학생들의 암산 전략과 암산 지도에 도움이 되는 교수학적 모델을 살펴보았다. 마지막으로 앞에서 살펴본 이론적 배경을 바탕으로 우리나라 제 7차 수학 교과서의 암산 지도 내용을 암산 전략과 교수학적 모델에 비추어 분석하고 암산 지도를 위한 시사점을 논하였다.

Ⅰ. 들어가며

지난 10여 년 동안 수학교육의 목표에 대한 변화와 더불어 이를 뒷받침하기 위한 실제적인 개선이 이루어져 왔다. 미국의 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 1989)와 이러한 규준을 성취하기 위한 그 동안의 실제적인 노력과 경험을 바탕으로 한 Principles and Standards for School Mathematics(NCTM, 2000), 1987년 발표된 영국 국가 교육과정의 수정판인 The National Curriculum (DfE, 1995)과 그 뒤를 이어 Numeracy Number Project(NNP: Stracker, 1999), 1990년에 출판된 네덜란드의 초등학교를 위한 준 교육과정에 해당되는 Proeve van een National Programma voor het Reken/Wiskundeonderwijs op de Basisschool (Treffers, 1991b)과 1993년과 1998년에 네덜란드 정부에서 발표한 초등학교 학생들의 성취 목표 및 이를 실제적인 수업개선으로 구체화하기 위한 TAL Project(van den Heuvel-Panhuizen, 2001), 1987년부터 독일의 mathe 2000 Project(Müller, Steinbring & Wittmann, 1997)를 중심으로 하는 수업 개선을 위한 노력이 대표적인 예가 될 것이다.

이러한 노력의 밑바탕이 되고 있는 생각은 수학 학습은 학생들의 경험과 능동적인 활동을 통한 이해에서 비롯된다는 것과 이를 통해 도달해야 할 수학교육의 목표는 수학적 소양 또는 수학적 힘이라는 것이다. 이러한 생각이 초등학교 수학에도 많은 영향을 주었고, 그 결과 초등학교에서 중요한 수학적 소양은 무엇인가에 대한 논의와 더불어 이를 실천하기 위한 교

* 진주교육대학교(yochong@cue.ac.kr)

육과정의 개정이나 수학 수업의 개선이 이루어져 왔다. 이 과정에서 특히 범자연수와 연산 영역에 있어서 많은 변화가 있어 왔다.

이에 대해 Verschaffel과 De Corte(1996: 104)는 "가장 현저한 변화는 표준 알고리즘[1]의 완전하고 자동화된 숙달을 덜 강조하고, 암산, 어림, 계산기, 컴퓨터 사용과 같은 다른 계산 절차에 관심이 증가하고 있다."고 말한다. 즉, 전적으로 표준 알고리즘에 의존하던 것 대신에 표준 알고리즘, 암산, 어림, 계산기나 컴퓨터와 같은 여러 가지 방법 중 수의 크기나 맥락에 따라 적절히 선택하는 것이 중요한 능력이 되었다는 것이다. 특히, 이 중에 암산(mental arithmetic)에 관련된 많은 연구들이 실행되었는데, 학생들 자신의 암산 전략을 개발하기 위해서는 어떤 교수학적 모델과 맥락을 사용할 것인가의 문제(Treffers, 1991a; Cobb, Yackel & Wood, 1992; Carpenter, 1992; Beishuizen, 1997, 1999; Sundermann und Selter, 2000)와 학생들 자신의 암산 전략과 표준 알고리즘을 어떻게 관련지을 것인가의 문제(Treffers, 1991b; Gravemeijer, 1994, 1997; Selter, 2001; Klein, 1998; Thompson, 1999; van den Heuvel-Panhuizen, 2001)가 또한 중요한 논제가 되었다.

우리 나라에서도 이러한 세계적인 동향에 맞추어 제 7차 교육과정이 개정되었고, 범자연수와 연산에 대해서는 구체물의 활용에 의한 학생들의 활동을 중시하며, 특히 암산 전략과 관련하여 '실생활에 적용하여 봅시다.' 또는 '여러 가지 방법으로 계산하여 봅시다.'라는 제목 하에 1-나 단계부터 3-가 단계에서 여러 가지 방법으로 합이나 차를 구하는 내용이 다루어지고 있다(교육 인적 자원부, 2002). 그러나 실제로 교사들이 암산과 관련된 수업에 대한 교수학적 배경을 얼마나 파악하고 있으며, 얼마나 그러한 배경에 기초하여 수업을 진행하는지에 대해서는 의문의 여지가 있다. 본 연구자는 한 초등학교의 2학년 학생들이 사용한 수학 교과서를 살펴볼 기회가 있었는데, 보통은 학생들이 교과서에 직접 문제를 풀이하는데 비해, 암산과 관련된 부분의 교과서는 아주 깨끗하였다. 그래서 몇 명의 교사들에게 이 부분을 어떻게 지도하는가에 대해 질문하였고, 그 대답은 그냥 암산하는 데 활용하도록 지도한다는 것이었다. 그런데 여기서 암산이란 아마도 '머리 속에서 하는 계산'이라는 의미로 파악되는 것 같았고, 그러다 보니 학생들의 교과서는 그냥 비어 있을 수뿐이 없는 것이 아닌가 하는 추측을 하게 되었다. 따라서 과연 수학 교과서에서 '여러 가지 방법'이라고 표현될 수 있는 암산의 의미가 무엇이며, 이러한 암산을 강조하는 배경은 무엇인지 그리고 더 나아가서 이를 지도하는 방법은 어떤 것들이 있는지에 대한 의문을 가지게 되었다. 이러한 의문점을 해결하기 위해 이미 수 십 년 동안 연구해 온 대표적인 나라로 생각할 수 있는 미국, 영국, 네덜란드, 독일에서 이루어졌던 논의와 실제들을 살펴보고, 우리나라의 암산 지도에 대한 시사점을 생각해 보고자 한다. 이를 위해 초등학교에서 필요한 수학적 소양의 의미와 이와 관련하여 중시되고 있는 암산의 교수학적 배경을 살펴보고, 미국, 영국, 네덜란드, 독일에서 제안하고 있는 암산 지도의 실제를 살펴본 후에, 학생들의 암산 전략과 교수학적 모델에 대해 논의한다. 마지막으로 우리 나라 교과서에 제시되어 있는 범자연수와 연산 영역 중 암산 전략과 교수학적 모델을 분석하고 그 시사점을 도출하고자 한다.

---

1) 표준 알고리즘은 세로로 식을 써서 자리값을 고려하지 않고 일의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자끼리 더하는 표준화된 방법을 의미한다.

II. 암산 지도의 배경

이 장에서는 초등학교에서의 수학적 소양은 무엇인지를 알아보고, 이와 더불어 중요시되는 암산의 의미와 중요성을 살펴보고자 한다.

1. 초등학교에서의 수학적 소양

수학적 소양에 대한 논의는 1990년대 이후 수학교육의 핵심 논제 중의 하나이다. NCTM (1989, 2000)에서는 수학적 소양을 기르기 위해서는 여러 가지 개념, 관계, 규칙, 절차 및 그 응용을 바탕으로 문제해결, 추론과 증명, 의사소통, 표현, 연결을 강조함으로써 수학에 대한 긍정적 태도와 수학적 자신감을 가지며 수학의 가치를 이해하도록 할 것을 강조한다.

Treffers(1991a: 338-344)는 초등학교 학생들이 수학적 소양이 부족한 상황을 비수학적 소양(Innumeracy)이라고 표현하고, 이를 '수와 수치적 자료를 알맞게 다루지 못하고, 암산과 어림을 필요로 하는 계산이나 상황과 관련된 진술을 평가하는 능력이 부족한 것(p. 334)'이라고 정의하면서 그 원인과 대안을 제시하고 있다. 비수학적 소양의 원인은 특히 저학년 100까지의 연산을 지도할 때, 표준 알고리즘을 지나치게 배타적으로 강조한 데 있다. 구조주의적 접근 방법에서는 수 모형을 먼저 제공하고, 그림으로 표현하고, 마지막으로는 심상으로 대치하는 과정을 거쳐 식으로 계산하는 방법을 지도한다. 이는 Bruner의 EIS 이론을 정확히 반영하는 것으로, 수의 여러 가지 측면 중 서수나 측정수 등을 무시하고 위치기수법만을 강조하며, 세기와 그 단축에 의한 학생들의 자연스러운 방법을 무시하고 표준 알고리즘만을 강조하며, 암산과 어림의 여지를 전혀 제공하지 못한다는 것이다. 따라서 비수학적 소양에 대처하기 위해서는 저학년에 표준 알고리즘을 도입하는 대신에 암산을 강조하고, 수의 여러 가지 측면을 중요시하며, 특히 셈수와 자연스럽게 세로 산술로 연결되는 빈 수직선 모델의 강조와 열린 맥락 문제에서 어림을 강조할 것을 권고하고 있다.

한편 초등학교에서의 수학적 소양(Numeracy)에 대한 논의는 1990년대 후반 영국에서 특히 증대되었다. Brown(1999: 8-11)에 의하면 그 이유는 그 동안 정부의 주도 하에 국가 교육과정을 제정하고 수학교육 개선을 위해 노력해 왔음에도 불구하고, 수와 연산 영역에서는 극히 저조한 성취를 보였기 때문이다. 이러한 분위기에서 Askew(1999: 93)는 초등학교에서의 수학적 소양을 '수치적 정보를 다양한 맥락에서 해석하고, 처리하고, 의사소통하고, 해석하는 능력'으로 정의하고, 이를 효율적으로 지도하기 위해서는 '학생들이 이해, 테크닉, 전략 및 응용 기능의 통합된 망에 기초한 수, 수 관계 및 수 연산에 대한 지식을 획득하고 익숙하게 하며 다양한 맥락에 응용하는 것을 학습하도록 해야 함'을 강조하고 있다. 이러한 문제들을 해결하기 위해 Straker(1999: 41)는 NNP의 일부인 수학 교수를 위한 틀에서 다음과 같이 초등학교에서의 수학적 소양에 대해 정의하였다.

> 초등학교에서의 수학적 소양은 수와 연산에 대해 아는 것을 의미한다. 그 이상으로, 수와 연산에 대한 이해와 기능을 적용해서 화폐와 측정과 관련된 문제들을 포함하여, 다양한 문제를 해결하려는 능력과 성향을 포함한다. 이는 또한 세기와 측정에 의해 수치적 정보를 수집하고 그래프, 도표 및 표로 나타내는 방법들에 숙달하는 것을 포함한다.

이러한 수학적 소양을 지도하기 위해서 선택한 핵심 원리 중 하나는 암산을 중시하는 것이

고, 실제로 이 프로젝트의 목표 중 하나는 학생들이 암산에 자신감을 가지고 있고 능력이 있다는 것을 확인하기 위한 것이었다(Straker, 1999: 41-44; Thompson, 1999a: 155).

지금까지 살펴본 것을 요약하면 초등학교에서의 수학적 소양은 수와 연산의 여러 가지 의미와 수 관계에 대한 이해, 기본적인 지식, 표준 알고리즘뿐만 아니라 암산 및 어림 기능 등을 바탕으로 다양한 맥락에서 적절한 방법을 선택하여 수치적 정보를 수집하고, 처리하고, 표현하는 과정을 통해 문제를 해결하고, 의사소통을 통해 더 나은 방법을 탐구하고 정당화하는 능력과 성향을 의미하는 것이라 볼 수 있을 것이다.

2. 암산의 의미와 중요성

가. 암산의 의미

암산(mental arithmetic)은 무엇을 의미하는가? 아마도 대부분의 사람들은 '머리 속에서 계산하는 것'이라고 생각할 것이다. 우리는 일상생활에서 암산을 많이 활용한다. 그렇기 때문에 그 의미를 잘 알고 있는 것처럼 보인다. 그러나 실제로 자세히 들여다보면 그 의미가 그렇게 분명한 것만은 아니다. 그렇다면 정말 암산은 무엇인가? 암산은 머리 속에서 계산하는 것인가? 아니면 연필과 종이를 사용할 수 있는가? 머리 속에서 표준 알고리즘을 사용하는 것인가? 구구단을 외우듯이 기본적인 계산들을 즉각적으로 기억해 내는 것인가?

Treffers(1991b: 45)에 의하면 암산은 '머리 속에서 하는 계산'이라기보다는 '머리를 써서 하는 계산'을 의미한다. 이는 숫자끼리 계산하는 표준 알고리즘과는 대조가 되지만, 종이와 연필을 사용하는 모든 계산을 배제하는 것은 아니다. 이러한 생각을 바탕으로 그는 암산을 '암기하고 있는 지식, 산술 법칙에 대한 통찰을 비롯하여 수의 여러 가지 측면과 그 관계에 대한 통찰이 필요한 효율적인 계산(Treffers, 1993: 95)'으로 정의하였다.

van den Heuvel- Panhuizen(2001: 122)은 네덜란드에서 수 십 년 간의 연구 끝에 내려진 암산의 개념에 대한 보다 분명한 정의를 다음과 같이 제시하고 있다.

> 기초적인 수학 기능으로서의 암산은 수의 범위나 연산의 종류에 제한되지 않는다. 우선 그것은 수와 수에 대한 정보에 쉽고 유연하게 접근하는 방식으로 다음과 같은 특징을 갖는다.
> · 한 자리 숫자로 생각하지 않고, 수의 자리값을 생각하여 계산하기.
> · 교환법칙, 분배법칙, 역 관계 등과 같은 기초적인 연산의 성질과 수 사이의 관계를 사용하여 계산하기.
> · 20까지 또는 100까지의 수 범위에서 잘 발달된 수 감각과 수에 대한 기초적인 지식을 사용하여 계산하기.
> · 가능하면 상황에 따라 중간 단계를 적절하게 기록하지만, 주로 머리 속에서 계산하기.

간단히 말하면 암산은 알고 있는 수 사이의 관계와 수의 특성 및 연산의 성질에 기초한 숙련되고 유연한 계산을 의미한다. 이렇게 볼 때 암산의 중요한 측면은 계산의 정확성뿐만 아니라 사고의 유연성이다. 저학년에서 암산을 강조함으로써 학생들이 자신이 이해할 수 있는 방법으로 정확한 계산을 할 수 있더라도 고차적 사고 전략으로서의 유연성을 기르는 것은 별도의 문제이다. 이 때 유연성(flexibility)이란 '주어진 문제와 포함된 수의 특성에 따라 가장 적절하고 효과적인 전략이나 절차를 선택하는 것(Klein, 1998: 14)'을 말한다. 이는 NCTM (2000: 152)에서 말하는 유창성과도 유사한 의미로, 유창성(fluency)이란 '계산을 위한 효율적

이고 정확한 방법들을 소유하는 것'을 말한다. 따라서 암산을 통해 강조해야 할 것은 학생들이 수와 연산의 의미 및 관계에 대한 이해를 바탕으로 상황에 적절한 전략을 유연하게 선택하여 정확한 계산을 할 수 있도록 하는 것이다.

나. 암산의 중요성

암산의 교수학적 중요성은 수학적 소양이 중요시되기 이미 오래 전부터 여러 나라에서 논의되어 왔다. 예를 들어, Radaz와 Schipper(1985: 76)에 의하면 독일은 전통적으로 산술 계산을 머리셈(Kopfrechnen), 반지필 계산 방법(halbschriftlichen Rechnen), 표준 알고리즘 세 가지로 구분하고, 표준 알고리즘을 도입하기 전에 학생들의 암산 전략인 머리셈과 반지필 계산을 중시하였으며, 특히 반 지필 계산 방법과 표현의 다양성을 강조하면서 암산에 의한 창조적이고 유연한 문제해결을 중시하였다. 한편, Thompson (1999a: 155; 1999b: 169-184)과 Brown(1999:8-14)에 의하면 영국에서는 1856년에 Bidder가 표준 알고리즘보다 암산이 수월하고 유용함을 주장한 이후로, 정신 도야 이론에 의해 강조, 1920년대의 연합 이론에 의해 약화, 1940년대는 사회적 유용성을 중시하면서 다시 강조, 1950년대 이후에 진보주의 교육이 강조되고 개별화 교육이 강화되면서 다시 약화되었는데, 1982년에 출판된 Cockcroft 보고서에서부터 또 다시 강조되었다. 또한 van den Heuvel-Panhuizen (2001: 125, 148)에 의하면 네덜란드에서는 1850년 이후로 Versluys과 같은 당시의 유명한 교과서 저자들이 암산의 중요성을 강조하고 표준 알고리즘과 대등한 위치를 부여한 이후로, 20세기 중반까지도 계속 강조되었다. 그러나 그 이후에 개별화 교육에 의해 약화되었다가, 새로운 교과서들의 출현과 통찰에 의한 암산을 위주로 하는 텔레비전의 교육 프로그램에 의해 점차적으로 관심이 높아졌다. Beishuizen과 Anghileri(1998: 520-521), Treffers와 Beishuizen (1999: 32-34) 등에 의하면 1980년대부터, 특히 1990년대 이후의 연구는 RME 연구진들에 의해 점진적 수학화의 관점에서 학생들의 암산 전략에서 표준 알고리즘으로의 연결을 위한 노력으로 계속 이어졌다.

이렇게 오래 전부터 강조되어 왔던 암산은 최근에는 앞 절에서도 살펴보았듯이 수학적 소양의 한 부분으로 강조되고 있고, 특히 표준 알고리즘에 대한 대안으로서의 암산의 중요성이 더욱 강조되고 있다. 여러 연구자들(Treffers, 1991a: 344; Sundermann & Selter, 1995; Verschaffel & De Corte, 1996: 120; Beishuizen, 1999: 159; Thompson, 1999a: 147; Thompson, 1999b: 170-175)의 의견을 종합하면 그 이유는 다음과 같다.

첫째, 표준 알고리즘은 학생들의 비형식적 방법과 직접 연결되기에는 어려운 측면들이 있다. 한편으로 학생들의 암산 전략은 왼쪽에서 오른쪽으로 진행되는 반면, 표준 알고리즘은 그 반대이다. 다른 한편으로 학생들은 자신의 암산 전략을 기록할 때 수직으로 내려쓰기보다는 수평으로 쓰는 경향이 있다. 마지막으로 실생활에서는 표준 알고리즘보다는 암산을 많이 사용한다는 것이다. 따라서 학생들에게 형식적인 수학을 부과하는 것이 아니라 학생들의 비형식적 수학에서 출발해야 한다는 최근의 경향에는 적합하지 않다.

둘째, 일단 전통적인 방법, 즉 수 모형과 같은 위치기수법 구조를 강조하는 표준 알고리즘을 배우게 되면 사람들은 의미에 기초한 계산보다는 아무런 생각 없이 알고리즘을 적용하고 특히 부진한 학생들은 오류를 범하게 된다. 또한 이렇게 한 가지 방법에 고착되면, 이후에는

사고의 유연성을 기대하기가 상당히 어려워진다.

셋째, 표준 알고리즘은 오랜 기간에 걸쳐 발달되어서 그 장점이라고 할 수 있는 축약성, 기호 조작, 일반화 가능성을 가진 효율적이고 우아한 방법이 되었다. 그러나 이러한 측면들이 학생들에게는 즉각적으로 이해하기 어렵고 오히려 사칙 연산에서 특히 뺄셈에서 나타나는 어려움의 주요 원인이 된다.

넷째, 숫자들을 따로 따로 다루는 표준 알고리즘을 조기에 도입하는 것보다는 수를 전체적으로 보는 것이 수와 수 연산에 대한 이해와 통찰을 뒷받침할 뿐만 아니라 문제해결 기능을 발달시킨다. 암산은 문제에서 다루어지는 수들에 적절한 계산 전략과 계산을 실행할 일련의 단계들을 선택할 필요성을 강조하는데, 이러한 기능은 성공적인 문제해결을 위해서도 중요하고, 이 과정에서 수와 연산에 대한 여러 가지 지식과 기능을 활용해야 하기 때문이다.

따라서 암산 전략과 표준 알고리즘의 차이점 때문에 둘 사이의 연결이 순조롭지 않으며, 결국은 학생들은 자신의 방법을 포기하고 주어지는 표준 알고리즘을 사용하지만 잘 이해하지 못한 상태에서 적용하다 보면 어려움에 처하게 되는 경우가 많고, 표준 알고리즘을 일찍 강조하는 것은 학생들의 이해를 바탕으로 한 수학적 소양이라는 최근의 수학교육의 경향에는 잘 맞지 않는다고 할 것이다.

지금까지 살펴본 바와 같이 암산의 중요성은 이미 학생들의 정신적 기능이나 유연한 사고를 기르는 것과 표준 알고리즘에 대한 대안으로 오래 전부터 논의되어왔고, 최근 학생들의 활동을 통한 이해를 바탕으로 수학적 소양을 중시하면서 단순히 머리 속에서가 아닌 상황에 따라 가장 적절하고 효과적인 전략을 선택하는 유연한 계산으로 그 의미의 확장과 더불어 그 중요성이 더욱 증대되고 있다.

III. 암산 지도의 실제

이 장에서는 여러 나라에서 제안하는 교육과정이나 교과서 아니면 연구자들의 문헌을 통해서 암산 지도의 실제를 살펴보고자 한다.

1. 미국의 EM

NCTM(1989, 2000)에서는 범자연수와 연산 영역과 관련하여 어림, 수 감각과 수 개념, 연산의 의미, 다양한 연산 전략과 방법을 강조하였다. 이러한 규준을 바탕으로 만들어진 수학 교과서 중 하나인 Everyday Mathematics(EM)[2] (Bell, Bell, & Flanders, 1998)를 중심으로 미국에서의 암산 지도에 대해 살펴보고자 한다.

1학년에서는 처음에 일상생활과 관련된 맥락에서 덧셈과 뺄셈을 비형식적으로 도입한 이후에 한 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 다루는데, 가로셈, 0에서 9까지의 덧·뺄셈표, 세로식의 도입과 더불어 다양한 일상 생활과 관련된 맥락에서, 예를 들면 학교 매점, 박물관 기념품점, 동물의 몸무게와 키를 소재로 하는 상황에서 덧셈과 뺄셈에 대한 다양한 암산 전략을 탐구한다.

2학년에서는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 3학년에서는 간단한 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈까지 다루면서 일상 생활과 관련된 맥락, 예를 들면 동물의 키와 몸무게, 스낵가게, 슈퍼마켓, 기온 변화 등의 맥락에서 덧셈과 뺄셈의 의미

2) Everyday Mathematics는 1983년부터 University of Chicago School Mathematics Project(UCSMP)에서 만들어진 풍부한 초등학교 수학 프로그램이다.

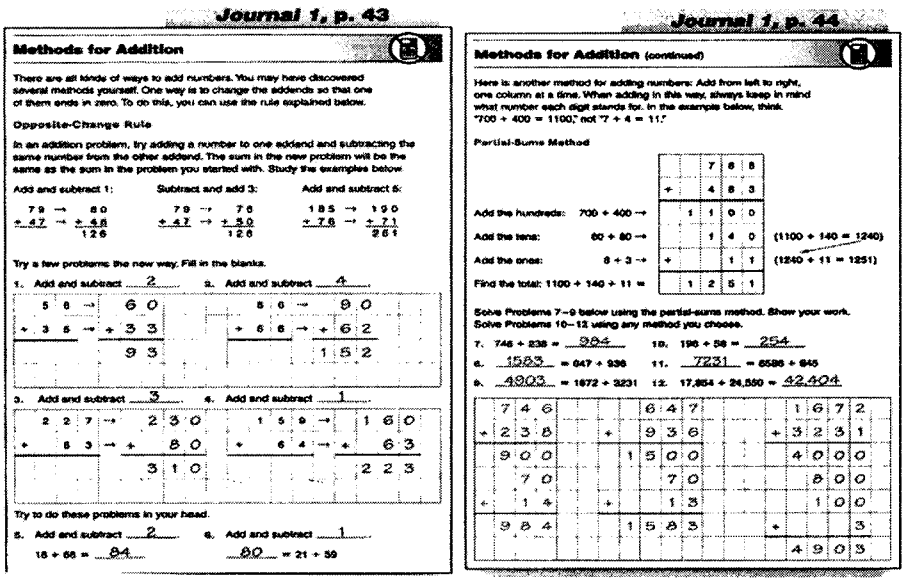


그림 Ⅲ-1. 변화 전략과 부분합 전략 (Bell, M., Bell, J. & Flanders, J., 1998d: Vol. A. 65, 66)

에 따른 이야기 문제를 만들고 학생들 스스로 이를 해결하기 위한 다양한 전략을 찾아보도록 한다.

4학년에서는 여러 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 다루면서 다양한 계산 전략 중에 몇 가지를 명시적으로 지도한다(그림 Ⅲ-1). 덧셈에서는 더하는 두 수 중 한 수는 크게 하고 다른 수는 그만큼 작게 하는 변화 전략과 왼쪽에서 오른쪽으로 자리값을 명확히 하면서 같은 열끼리 계산하여 각 열의 합을 마지막에 더하는 부분합 전략이다. 반면 뺄셈에서는 두 수를 동일하게 크게 하거나 작게 하는 변화 전략과 부분차 전략을 지도한다.

지금까지 살펴본 결과 EM에서는 1학년에서 4학년에 걸쳐 범자연수의 덧셈과 뺄셈을 지도하지만, 전통적인 표준 알고리즘이라고 할 수 있는 방법에 대해서는 구체적으로 다루고 있지 않으며, 대체적으로 기본 구구의 숙달과 일상생활 맥락에서 다양한 전략을 개발하고 암산에 활용하는 데 중점을 두고 있다고 할 수 있다. 또한 수 모형, 부절 등의 다양한 산가지, 화폐 모형, 도미노 카드, 수 삼각형, 수 타일, 화살표 기호 등 다양한 모델을 제공한다.

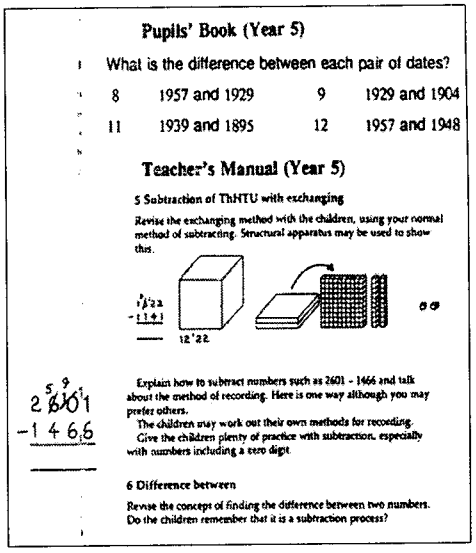
2. 영국의 NNP

영국에서 6학년까지에 해당하는 핵심 단계 1, 2에서는 범자연수와 연산 영역과 관련하여 자리값의 이해, 수 사이의 관계를 이해하고 계산 방법을 개발하기, 연산의 의미를 이해하고 적절한 계산 방법을 선택하여 수치적 문제들을 해결하기 등을 강조하며, 특히 상황에 적절한 계산 방법을 선택하고 적절할 때 도구를 사용하거나 여러 자리의 수를 포함할 때는 계산기를 사용할 것을 강조하고 있다. 또한 성취목표의 3수준과 4수준에서는 암산 전략의 개발을

강조하고 있다(DfE, 1995).

그러나 (Brown, 1999: 8-12; Thompson, 1999a: 170-171)에 의하면 영국에서는 일반적으로 암산을 주로 머리 속에서 기본 구구를 즉각적으로 기억해 내는 것으로 한정해서 생각하는 경향이 많기 때문에 학생들의 암산 전략을 개발하는 데는 별로 관심이 없었고, 주로 표준 알고리즘을 강조해 왔다. 그림 Ⅲ-2는 이를 보여주는 영국의 5학년을 위한 어떤 교과서와 교사용 지도서의 일부이다(Beishuizen & Anghileri, 1998: 532). 이 교과서에서는 표준 알고리즘을 십진 블록과 같은 모델을 이용하여 설명하도록 하고 학생들은 다른 전략들을 사용할 수도 있으나 한 가지 방법을 제시하도록 하고 있다.

Bierhoff(1996)에 의하면 영국의 교과서는 모든 계산이 심지어는 한 자리 수의 덧셈에서도 세로로 제시되거나 쓰도록 되어 있고, 예외적으로 암산을 위한 문제가 있을 뿐이지만 이러한 암산 문제조차도 학생들 자신의 방법을 숙달하도록 하기 위한 것이 아니라 그저 학생들의 방법이기 때문에 받아들여진다. 또한 교사들은 학생들에게 기본적인 산술 문제를 해결하기 위해 연결 큐브, 병 뚜껑, 모형 화폐 막대, 십진 블록과 같은 구체물을 사용하도록 권장한다. 그러나 이것이 계산 전략을 발전시키기 위한 도구라기보다는 그 자체가 하나의 방법이 되어서 그 이상으로의 발전이 어렵다. 영국에서의 암묵적인 가정은 구체물을 가지고 많은 연습을 하면 이해는 저절로 된다는 것이다. 반면 백 수열표 또는 수직선과 같은 시각적인 도구를 사용하는 연습은 거의 없고 있다 하더라도 100까지의 수를 도입한 몇 개월 후이다.


Pupils' Book (Year 5)

What is the difference between each pair of dates?

8	1957 and 1929	9	1929 and 1904
11	1939 and 1895	12	1957 and 1948

Teacher's Manual (Year 5)

5 Subtraction of ThHTU with exchanging

Revise the exchanging method with the children, using your normal method of subtracting. Structural apparatus may be used to show this.

Explain how to subtract numbers such as 2601 - 1466 and talk about the method of recording. Here is one way although you may prefer others.

The children may work out their own methods for recording.

Give the children plenty of practice with subtraction, especially with numbers including a zero digit.

6 Difference between

Revise the concepts of finding the difference between two numbers. Do the children remember that it is a subtraction process?

그림 Ⅲ-2. 영국의 5학년 교과서 중의 일부

이러한 문제점을 해결하기 위해NNP[3] (Straker, 1999: 43-44)에서는 6학년까지의 프로그램의 틀을 새로 정하였는데, 핵심 원리의 하나로 암산을 중시하면서 원래의 탐구 수업을 지향하는 영국 교육에 있어서 그 원리가 수와 연산 영역에서도 충분히 실천되기를 기대하고 있다. 그러나 영국의 공식적인 입장은 초등학교에서는 표준 알고리즘을 조기에 지도하는 것을 피하는 것의 중요성을 인식하는 반면, 각 연산에 대해 적어도 한 가지의 표준 알고리즘이 지도되어야 한다는 것이다(Thompson, 1999: 182). 결국 매일 매일의 암산을 통해 암산과 표준 알고리즘의 적절한 균형을 유지하고자 하는 것이 현재까지 영국에서의 논의 결과이다.

3) NNP는 National Numeracy Project의 약자로 영국에서 1996년에서 1999년까지 초등학생들의 수학적 소양을 높이기 위한 방안을 탐색하기 위해 교육부의 제안으로 Office for Standards in Education(Ofsted), Qualifications and Curriculum Authority(QCA), Teacher Training Agency(TTA)와 Basic Skills Agency(BSA) 단체들이 참여하였던 연구이다(Straker, 1999).

3. 네덜란드의 TAL

네덜란드에서 초등학교 졸업 때까지 도달해야 할 '성취 목표' 중 범자연수와 연산 영역에 관련된 부분을 살펴보면 학생들은 '덧셈, 뺄셈, 곱셈과 나눗셈 연산을 표준 절차 또는 대안적인 절차로 수행할 수 있어야 하고, 그것들을 간단한 상황에 적용할 수 있어야 한다.'이다 (van den Heuvel-Panhuizen, 2001: 249). 이러한 내용을 구체화한 TAL 프로젝트[4]를 중심으로 네덜란드에서의 암산 지도에 대해 간략하게 살펴보고자 한다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001: 61-74).

1, 2학년에서는 20까지의 덧셈과 뺄셈을 주로 다루면서 수를 다양하게 세는 것을 비롯한 여러 가지 암산 전략을 개발하면서 100까지의 계산을 수행하는 데 필요한 기능을 개발하는 데 초점이 주어진다. 2, 3학년에서는 세기 학습을 기초로 한 수 개념의 지도가 충분히 이루어진 후에 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈이 다루어진다. 우선은 여러 가지 맥락 상황에서 비형식적으로 다루어진 후, 여러 가지 모델을 활용하여 연산을 해 가는데, 그 과정은 크게 세 가지 수준으로 나뉘어질 수 있다. 첫 번째는 세기에 의한 계산 수준으로, 48+29를 (48), 49, 50, 51, …60, …70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77 같이 일일이 세어서 계산하는 것이 특징이며, 이때 (48), 49, 50, 60, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77과 같이 단축에 의한 세기를 할 수도 있다. 두 번째는 구조화에 의한 계산 수준으로 10씩 뛰어 세기(jump-of-ten)와 가장 가까운 10의 배수에 도달한 다음 뛰어 세기(jump-via-ten)의 두 가지 연속 전략(stringing)을 중점적으로 사용하며, 이 때 빈 수직선을 모델로 사용한다(그림 Ⅲ-3).

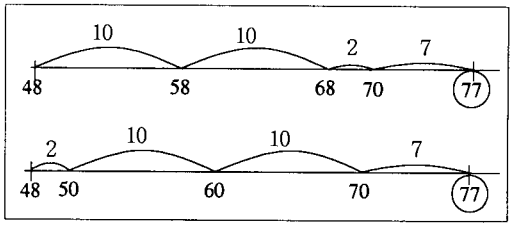


그림 Ⅲ-3. 빈 수직선 위에서 두 가지 전략을 사용한 48+29의 계산

이런 과정에서 48, 78, 77과 같이 더 단축된 구조화에 의한 계산을 할 수도 있다. 세 번째는 형식적 계산에 의한 수준으로 시각적 모델의 도움 없이 머리 속에서 계산하면서 필요한 경우에만 중간 단계를 적고 계산한다. 또한 빈 수직선 위에서 사용되었던 연속 전략 외에 분해 전략(splitting)과 변화 전략(varing)이 나타난다. 분해 전략은 앞에서 이야기한 부분합과 부분차 전략과 같은 것이고, 변화 전략은 두 번째 수준에서 사용된 전략을 포함하여 주어진 수들을 변화시켜 계산하는 전략이다(그림 Ⅲ-4).

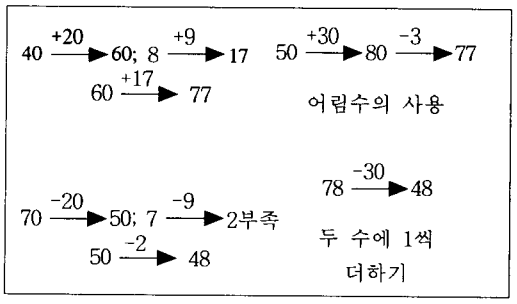


그림 Ⅲ-4. 분해 전략(왼쪽)과 변화 전략(오른쪽)에 의한 48+29와 77-29의 계산

4) TAL 프로젝트는 1997년에서 1999년까지 네덜란드의 교육문화과학부가 수업 실제에 도움을 주고자 Freudenthal 연구소, SLO, CED의 공동연구를 제안한 것으로 네덜란드어로는 Tussendoelen Annex Leerlijnen, 영어로는 Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets로 초등 수학교육의 거시적인 학습-교수 경로를 위한 안내지침이다(van den Heuvel-Panhuizen, 1999).

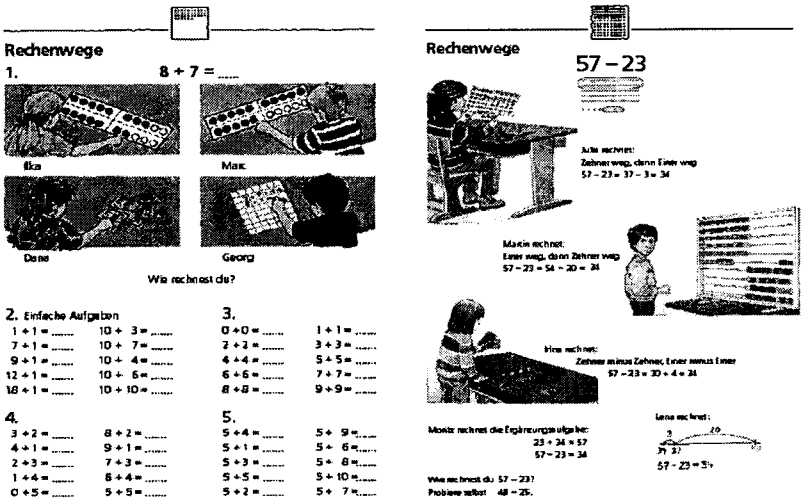


그림 Ⅲ-5. 1, 2학년에서 덧셈과 뺄셈의 암산 전략
(http://www.klett-verlag.de/grundschule/bereiche/buch/mathe/werke/mathe2000/neu/neu.htm.)

이러한 활동들이 2,3학년에서 충분히 다루어 진 후에 4학년에 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈에서 표준 알고리즘이 도입되면서 암산 전략에서, 특히 세로셈에서 표준알고리즘으로의 연결에 초점을 맞춘다. 그러나 학생들은 알고리즘을 사용하지 않고 다양한 방법으로 문제를 해결할 수 있어야 한다.

지금까지 살펴본 바와 같이 네덜란드에서는 암산 지도를 집중적으로 다루고 있다. 암산이 학생들 스스로 발명한 전략이라는 것을 고려한다면, 이를 출발점으로 하여 더 형식적인 표준 알고리즘으로 수학화하는 과정이 핵심이라고 할 수 있다. 또한 다양한 모델을 사용하는데, 앞의 두 나라들보다는 서수 개념에 기초한 구슬 줄과 빈 수직선을 많이 사용하며 그 외에도 부절을 포함한 다양한 산가지, 화폐 모형, 산술 주판, 100가지의 수 배열표 등을 사용하여 통찰에 기초한 암산 지도를 강조한다.

4. 독일의 mathe 2000

독일은 각 주마다 나름대로의 교육과정을 제시하고 있으나, 본 논문에서는 Nordrhein-Westfalen 주의 교육과정(Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 1996)과 이와 관련된 교과서 시리즈인 Das Zahlenbuch[5](Wittmann & Müller, 2001; Ernst Klett Grundschulverlag, 2001, 2003)의 내용을 통해 독일에서의 암산 지도에 대해 살펴보고자 한다.

Nordrhein-Westfalen 주의 교육과정에서는 학생들의 사전 지식과 경험을 중시하면서, 수의 여러 가지 측면을 풍부하게 다루고 광범위한 응용가능성에 특히 관심을 가져야 하며, 기초 계산을 위한 실제적인 활동, 영상적 표현과 더불

5) Das Zahlenbuch 시리즈는 Wittmann과 Müller를 중심으로 새수학을 탈피하려는 노력 중에 1985년에 개정된 Nordrhein-Westfalen주의 교육과정 개발을 계기로 1987년부터 본격화된 Mathe 2000 프로젝트의 연구진들에 의해서 만들어졌다(Müller, Steinbring & Wittmann, 1997)

어 수 배열표에서 앞으로 세고, 뒤로 세는 방법을 의식하고 연습해야 하며, 어려서부터 구두로 하는 계산과 암산을 강조하고, 3학년이 되어서야 덧셈과 뺄셈의 표준 알고리즘을 도입하도록 하고 있다(Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 1996: 23-24, 30-31).

Das Zahlenbuch에서는 1학년에 20까지의 수에 대한 다양한 암산 전략을 탐구하며, 이 과정에서 5의 중요성이 강조된다. 2학년에서는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 다루면서 자신의 암산 전략을 강조하는데, 그 예를 살펴보면 다음과 같다. 2학년의 '계산 과정'에의 쪽에서는 57-23에 대한 다양한 방법을 제시한다. 각각 100까지의 수 배열표와 100까지의 수판을 활용하여 십의 자리, 일의 자리의 수를 먼저 덜어내는 연속 전략, 분해 전략, 역 관계를 이용한 전략, 빈 수직선을 위에서의 뺄셈에 대한 연속 전략이 제공된다. 그 다음에는 '너는 어떻게 계산하니?'와 같은 질문을 통해 자신의 방법을 찾도록 하며, 마지막에는 48-25를 자신의 방법으로 계산하도록 요구한다(그림 Ⅲ-5). 이 때에 효과적인 모델로 수 배열판, 100 주판, 화폐 모형, 빈 수직선 등을 사용한다.

3학년에서는 1000까지의 반지필 계산과 암산을 확고하게 한다. 이를 위해서 1학년부터 3학년까지 자신의 방법으로 유연하게 계산하는 데 초점이 맞추어짐과 동시에 덧셈 구구를 머리 속에서 빨리 할 수 있도록 많은 연습이 제시된다. 다양한 반지필 방법과 더불어 표준 알고리즘이 하나의 방법으로 소개된다.

4학년에서는 백만까지의 수와 그 이상의 수와 연산을 다룬다. 처음에는 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 다양한 방법으로 계산한다. 그 이후에는 간단한 수, 예를 들면 1000000-900000과 같은 수는 반지필 방법이나 암산으로 계산하고, 34765+12089와 같은 복잡한 수들은 표준 알고리즘으로 계산하는 연습을 한다. 그 외에 다양한 문제 상황을 통해서 이러한 것들을 적용할 수 있도록 한다(Wittmann, & Müller, 2001).

이와 같이 Das Zahlenuch에서는 전 학년에서 걸쳐 기본 구구의 숙달과 더불어 구두로, 반지필 계산을 위주로 다루면서 학생들 자신의 방법을 강조하며, 3학년 이후부터 표준 알고리즘을 도입함으로써 필요한 경우에 다양한 방법들을 선택해서 사용할 수 있도록 지도하고 있다. 이 과정에서 여러 가지 모델을 제시하고 있는데, 다양한 산가지, 수 카드, 화폐 모형, 20까지의 수판, 100까지의 수판, 1000까지의 책, 백만까지의 책, 자리값 판, 빈 수직선, 수직선, 마법의 삼각형, 기본 구구 포스터 등을 활용하고 있다.

지금까지 영국, 미국, 네덜란드, 독일의 암산 지도에 대해 간단하게 살펴본 것을 바탕으로 우리나라와 비교하여 보면, 우리나라의 경우는 표준 알고리즘이 먼저 다루어지고, 한 단원에서 1-2 차시 정도만 암산을 다룬다. 이것은 암산을 위주로 하고 3학년이나 4학년에 도입하는 독일과 네덜란드 아니면 아예 도입하지 않는 미국과는 대조적인 것이다. 또한 독일과 네덜란드는 방법은 다르지만 암산과 표준 알고리즘을 자연스럽게 연결하려는 시도를 하고 있는 반면, 우리나라의 경우는 표준 알고리즘과 그냥 병행해서 다루어진다. 영국에서도 암산을 한층 중요시하고 표준 알고리즘의 도입을 다소 늦추려고 하지만 여전히 암산과 표준 알고리즘의 균형을 맞추려는 관점을 유지하고 있다.

Ⅳ. 암산 전략과 교수학적 모델

이 장에서는 앞장에서 살펴본 내용과 여러 연구의 결과를 바탕으로 학생들이 개발해 낸 암산 전략들은 어떤 것이 있고 또한 어떤 교수학적 모델이 사용될 수 있는지에 대해 살펴보고자 한다.

1. 학생들의 암산 전략[6)]

학생들의 암산 전략에 관한 연구 중에 본고에서는 Beishuizen(1997: 131-147; 1999: 157-158), Klein(1998: 9), Fuson & Smith(1997: 177- 181), Thompson(1999a: 149-151), Selter(2001: 148-149) 등이 알아낸 전략들을 Beishuizen의 용어를 중심으로 살펴보고자 한다.

학생들은 덧셈과 뺄셈에 대해 연속 전략과 분해 전략을 주로 사용한다. 분해 전략에는 십의 자리의 수와 일의 자리의 수를 따로 분리해서 더하거나 뺀 다음 다시 결합하는 1010 전략, 십의 자리의 수와 일의 자리의 수를 분리한 다음 한 수의 십의 자리의 수에 10씩 먼저 더하고, 나중에 일의 자리의 수들을 계산해 가는 10s, 1010과 달리 받아올림이나 받아내림을 먼저 하고 계산하는 표준 알고리즘과 유사한 R1010, 머리 속에서 계산할 때 십의 자리의 수를 먼저 계산하고 일의 자리의 수를 계산하는데 그 결과가 받아올림이 있거나 받아내림이 있는 경우 원래 적어두었던 수를 지우고 새로운 수를 쓰거나 아니면 처음에 십의 자리의 수를 쓰지 않고 기억해 두었다가 마지막에 한 번에 쓰는 E1010 전략이 있다[7)].

연속 전략에는 한 수는 그 대로 두고 다른 수의 십의 자리의 수만큼 10씩 그리고 나서 나머지 일의 자리의 수를 더하거나 빼는 N10 전략, 계속 10씩 더하거나 뺀 다음 원래 더하거나 빼야 될 수와의 차이만큼 다시 빼거나 더해주는 N10C 전략, 우선 10의 배수를 먼저 만든 다음 10을 계속 더해 가는 A10 전략, 두 수를 적절히 변형하여 계산하기 쉬운 수로 바꾸어서 계산하는 C 전략 등이 있다. 이 때 C 전략의 특별한 경우로 세로식으로 계산할 때 93-27에서 93의 3에 10을 더하고 그만큼 27에도 더해서 37로 생각해서 계산하는 전략이 있다. 이는 영국에서 지도되고 있는 것이지만 학생들이 생각해 내기에는 상당히 어려운 전략이다.

한편 학생들은 73원과 29원의 차를 구하는 것과 같은 문제에서 더 다양한 전략을 생각하는데, 우선 이 문제는 73에 도달할 때까지 더하는 AOT 문제로 생각할 수도 있고, 73에서 29를 빼는 SUB 문제로도 생각할 수 있으며, 감수를 빼는 것이 아니라 피감수 73에서 감수 29에 도달할 때까지 수들을 계속 빼 나가서 그 수들을 더해서 구하는 TAT 전략이 가능하다. AOT에 대해 A10, N10, N10C, 10s, C, SUB에 대해서는 N10과 N10C, TAT에 대해서는 A10, N10, N10C 등을 생각할 수 있다. 지금까지 살펴본 내용을 예시하여 정리하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

이러한 전략 중 학생들이 많이 사용하는 전

---

6) 학생들이 발명한 계산 방법을 표현하는 용어는 전략, 절차, 발명된 알고리즘, 방법 등 다양하다. 또한 전략과 절차를 구분하여 사용하는 경우도 있다. 그러나 본 논문에서는 한 가지로 통일하여 암산 전략으로 쓰고자 한다. 또한 학생들의 전략명에 대한 구분도 Beishuizen은 연속 전략, 분해 전략, 계속 더해가기 전략, 계속 덜어내기 전략, Thompson은 분해 전략, 점프 전략, 분해-점프, 보상 전략, 동수 더하기, Fuson과 Smith는 연속 전략, 분해 전략, 및 혼합 전략, Selter는 10에 10, 단계 전략, 혼합 전략, 보조 전략, 단순화 전략, 계속 더해가기 전략 등으로 다양하지만, 본고에서는 용어를 Beishuizen을 중심으로 기술한다.

7) R1010과 E1010은 각각 regroup, erase의 첫 자를 따서 본 연구자가 명명한 것이다.

<표 Ⅳ-1> 100까지의 덧셈과 뺄셈을 위한 암산 전략

덧셈(받아올림이 있는): 45+39	뺄셈(받아내림이 있는): 65-49, 51-49
연속 전략	
N10: 45+30=5;75+5=80; 80+4=84	N10: 65-40=25; 25-5=20; 20-4=16
N10C: 45+40=85; 85-1=84	N10C: 65-50=15; 15+1=16
A10: 45+5=50; 50+34=84	A10: 65-5=60; 60-40=20; 20-4=16
C: (45-1)+(39+1)=44+40=84	A10: 49+1=50; 50+10=60; 60+5=65;'답:1+10+5=16
	∩: 51-49(49+2=51이기 때문에)
	C: (65+1)-(49+1)=66-50=16
분해 전략	
1010: 40+30=70; 5+9=14; 70+14=84	1010: 60-40=20;5-9=4(거꾸로 오류) 20+4=20; 20+5=25; 25-9=16
10s: 40+30=70; 70+5=75; 75+9=84	
R1010: 4 5 ~~4~~5 4 5 4 5 +3 9 +3 9 +3 9 +3 9 8 4 8 4 8 4 8 4	R1010: 5 5 5 0 5 ~~6~~5 ~~6~~5 ~~6~~5 6 4→5 0 1 4 6 4 -4 9 -4 9 -4 9 -2 0 - 6 -2 6 1 6 1 6 1 6 3 0 8 →3 8
E1010: 4 5 4 5 +3 9 +3 9 ~~7~~ 4 8 4 8 4 지우기 또는 십의 자리의 수를 쓰기 전에 살펴보기	E1010: 1 5 6 ~~5~~ 6 5 -4 9 -4 9 ~~2~~ 1 6 1 6 지우기 또는 십의 자리의 수를 쓰기 전에 받아내림
다음 문제에 대한 다양한 전략: 73원과 29원의 가격의 차이는?	
AD: 덧셈 AOT: (피감수가 나올 때까지) 계속 더해가기	SUB: 뺄셈 TAT: (감수에 도달할 때까지) 계속 빼나가기
AOT/A10: 29+1=30; 30+40=70; 70+3=73; 답 1+40+3=44 AOT/N10: 29+40=69; 69+4=73; 답 40+4=44 AOT/N10C: 29+50=79; 79-6=73; 답 50-6=44 AOT/10s: 20+40=60; 60+9=69; 69+4=73; 답 40+4=44 AOT/C: 29+1=30; 73+1=74; 30+40=70; 70+4=74; 답 44	SUB/N10: 73-20=53; 53-3=50; 50-6=44 SUB/10C: 73-30=43; 43+1=44 TAT/A10:73-3=70;70-40=30;30-1=29; 답3+40+1=44 TAT/N10:73-40=33;33-4=29;답40+4=44 TAT/N10C: 73-50=23; 23+6=29; 답은 50-6=44

략이 1010전략과 N10이다(Beishuizen, 1997: 133-134). 그런데 저학년부터 1010 전략을 강조하는 것은 성공적이지 못할 수도 있는데, 그 이유는 이 전략을 사용하는 학생들이 받아내림이 있는 뺄셈 문제에서 오류를 많이 일으킬 뿐만 아니라 차를 구하는 문제를 해결하는 데도 어려움이 있고, 오히려 이런 문제에 있어서는 N10 전략을 선택하는 경우가 많다. 반면 N10 전략은 약점이 적고 더 효과적인데, 한 수는 그대로 두고 10씩 세면서 십의 자리의 수들을 더하거나 뺌으로써 받아올림이나 받아내림과 같은 어려움을 피할 수 있는 순조로운 절차이고, 학생들의 다른 전략에도 더 잘 맞기 때문이다.

2. 암산 지도를 위한 교수학적 모델

이 절에서는 학생들의 덧셈과 뺄셈을 지도하기 위한 교수학적 모델의 유형과 특징, 제한점 및 암산 전략과의 관련성에 대해 알아보고자 한다.[8)]

가. 묶음 모델

묶음 모델은 부절, 다양한 산가지를 이용한 10개씩의 묶음 아니면 그림, 화폐모형, 수 모형, 유니픽스 큐브, 자리값 판 등으로 다양하다. 이는 양에 바탕을 둔 기수 개념을 표현하는 것인데 10으로 묶는 활동을 강조하여 십진 기수법의 개념을 지도하고 표준 알고리즘을 지도하기 위한 것이다.

그러나 이러한 수 모형에 대한 제한점으로 지적되는 것들도 많다. Beishuizen(1999: 157)에 의하면 이는 1960년대와 1970년대에 딘즈의 산술 블록을 사용하는 데서 비롯되었는데, 교사들은 학생들이 이 모델에 너무나 오래 동안 매달려 있을 뿐만 아니라 계산할 때 수 모형들을 보고 수동적으로 답을 읽어 내는 것을 관찰하였다. 또한 이러한 수 모형들은 추상적인 수의 구조, 즉 위치기수법을 표현하는 데는 도움이 되지만, 수가 복잡해지면 학생들의 암산 전략을 나타내는 데는 어려운 점이 많다. 예를 들면, 56-28을 풀이하는데, 십 모형 5개에서 3개를 덜어내고(50-30), 낱개 모형 2개를 더하고(+2), 남은 수 모형들을 다 세어 2+20+6으로 구할 수 있다. Thompson(1999b: 174)은 수 모형이 자리값에 기초한 표준 알고리즘을 지도하는 데 효과적일 것이라고 생각하고 이를 수업에 활용하지만, 실제로 표준 알고리즘을 배운 사람들은 학생이나 성인이나 할 것 없이 의미에 기초한 연산이 아니라 맹목적으로 표준 알고리즘을 사용하면서 오류를 범하기도 하며, 이미 표준 알고리즘을 자신 있게 사용하고 관련된 연산의 의미를 어느 정도 이해하는 사람들에게는 우수한 모델이지만 수 모형 활동으로 표준 알고리즘을 스스로 발명한 예는 거의 없으며, 일단 표준 알고리즘이 도입되면 수 모형 활동을 연관지어서 생각하는 학생들은 거의 없다고 말한다. 따라서 수 모형은 학생들을 단지 수동적이고 낮은 수준의 활동에 머물게 하기 쉽고, 원래의 의도에 맞게 표준 알고리즘을 이해하거나 발명하는 데 도움이 되지 않으며, 학생들의 암산 전략을 나타내거나 촉진하는 데도 제한점이 많다는 것이다. 그럼에도 불구하고, 수 모형은 여러 나라에서 수 개념과 연산을 지도하기 위한 모델로 많이 사용되고 있으며, 앞에서 살펴본 나라 중에는 미국이나 영국에서 많이 사용된다. 그 결과 실제로 학생들이 많이 사용하는 전략은 앞에서도 살펴본 바와 같이 분해 전략 중 1010 전략을 선호하지만, 그 결과는 그다지 성공적이지 못하다는 것은 이미 앞에서 언급한 바이다.

나. 복합 모델

복합 모델은 20 주판, 100 주판, 수 배열표, 격자 배열 등으로 기수적 측면과 서수적 측면을 동시에 가지고 있는 모델이다[9)].

Beishuizen(1999: 159)과 Klein(1998: 10)에 의

---

8) 연산을 위한 모델은 다양하지만 이를 묶음 모델(group model), 직선 모델(line model), 복합 모델(combination model), 연산 모델(operator model)로 분류할 수 있다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001: 62-64; Radatz & Schipper, 1983: 69). 본고에서는 연산 모델은 직선 모델로도 나타낼 수 있기 때문에, 세 가지 묶음 모델, 직선 모델, 복합 모델로 구분하기로 한다.

9) 이 모델들은 묶음 모델로 분류되는 경우도 있다. 그러나 사용하는 방법에 따라서 직선 모델의 특성을 가질 수 있기 때문에 복합 모델로 구분되었다.

하면 100까지의 수 배열표나 격자 배열은 수 관계와 연산을 모두 시각화하는 더 풍부한 모델로 도입되고, 100 주판은 수의 십진법 구조를 더 잘 보여줄 뿐만 아니라 이에 대응되는 세로 알고리즘을 예시하기 위해 도입되었다. 격자 배열을 사용하는 방법은 일반적으로 양에 기초한 묶음 모델로서 사용될 수 있지만, 정사각형까지의 모든 정사각형들에 색을 칠하는 것이 아니라 한 수를 나타내는 마지막 위치의 한 정사각형에만 색을 칠해서 나타냄으로써 세기 모델로 사용할 수 있다. 그러나 격자 배열의 경우는 학생들이 판 위에서 점프를 할 때 혼동을 일으키게 되고, 수모형보다는 N10의 전략을 사용하도록 유도하지만 부진한 학생들에게는 복잡하게 여겨지며, 10개씩 미리 구조화된 특성 때문에 학생들의 비형식적이고 유연한 암산 전략을 유도하는 데는 제한적이다.

한편 Fuson(1999)은 100까지의 수 배열표를 사용하는 방법은 학생들이 수 배열표를 십의 단위와 일의 단위를 세고, 더하고, 빼는 의미 있는 모델로 사용하기 힘들게 하며, 학생들이 십의 단위들을 구성할 때까지는 100까지의 수 배열표를 사용하기 어려웠다고 말한다. 즉, 많은 학생들이 수 배열표나 격자판에서 십의 단위들을 인식할 수 없고, 특별히 38과 같이 십의 단위로 끝나지 않는 수들의 경우 그런데, 수 배열표의 경우 정사각형이 10개씩 모여서 된 줄이 3개와 낱개의 정사각형이 8개 모여서 된 것이라는 생각을 하기 어렵다는 것이다. 따라서 학생들은 수 배열표에서 수평으로 한 칸씩 세는 것에서 수직으로 한 칸씩 내려가는 것이 10개씩 세기 위한 지름길로 파악하는 데 상당한 시간이 걸리거나 아니면 그러한 이해 없이 수 배열표 위를 점프할 뿐이다.

따라서 오히려 이러한 모델은 세심한 지도가 이루어지지 않는다면 오히려 곱셈이나 나눗셈에 적절하고 덧셈과 뺄셈에는 다소 제한적이며, 학생들의 암산 전략을 드러내기가 어렵다.

다. 직선 모델

직선 모델은 전통적으로 사용해 온 수직선, 막대 모양으로 된 수직선, 구슬 줄, 빈 수직선, 화살표 모델 등이 있다. 이는 수의 여러 가지 측면 중 서수 개념과 연산자 개념을 동시에 갖는 것으로 세기를 기초로 하여 연산으로 연결할 수 있다.

전통적으로 사용되어 온 수직선은 오랜 기간 동안 서수에 기초한 연산 모델로서 사용되어 왔다. 그러나 상당히 형식적이고 구조화된 특성 때문에 학생들이 사용하기에 어렵다는 것은 잘 알려진 사실이다. Hötker와 Selter(2000: 123-124)는 특히 저학년의 경우 수직선의 단점에 대해 다음과 같이 주장한다. 첫째, 수직선은 양과 관련된 상황에서 사용된다면 학생들에게 상당히 어려움이 많은데, 학생들의 일상적인 맥락이 추상적인 표현을 통해서 시각화되기 어렵기 때문이다. 예를 들면, '구슬 5개와 구슬 3개를 합하면 몇 개인가?'와 같은 문제에서 수직선 모델을 사용한다면, 학생들은 구슬이 양이라는 것에서 벗어날 수 없기 때문에, 직선 형태로 표시된 추상적인 직선 위에 표시된 눈금에 대응시켜서 생각하기가 쉽지 않다는 것이다. 둘째, 수직선은 행동적인 경험과 연결하기가 어렵다. 즉, 덧셈을 하거나 뺄셈을 할 때 대상들을 보태거나 덜어내는 데 이러한 행동과 수직선은 연결시키기가 쉽지 않다. 셋째, 수직선은 눈금 위에 수를 표시하게 되는데, 예를 들어 5는 6번째 줄로 표시되는데, 눈금이 중요한지 아니면 눈금 사이의 공간이 중요한지 학생들은 즉각적으로 이해하기가 어렵다. 넷째, 수직선은 하나씩 일일이 세는 계산으로 연결되는 경우가 많다. 일일이 눈금이 표시된 것 때

문에 학생들은 눈금을 하나씩 세면서 계산하게 되는 경우가 있다.

서수 개념에 기초하면서도 전통적인 수직선의 이러한 단점을 보완하기 위해 사용된 모델이 빈 수직선(Empty Number Line)과 구슬 줄이다. 20까지의 구슬 줄과 100까지의 구슬 줄은 두 가지의 색으로 구성되어 있는데, 10개를 단위로 색이 교대된다. 이런 형태로 색이 구성된 것은 10을 준거점으로 활용할 수 있도록 한 것이다. 이는 빈 수직선 도구와 더불어 수개념뿐만 아니라 연산을 위한 효과적인 도구로 사용되며, 나중에는 추상화되어 빈 수직선으로 자연스럽게 연결된다. 빈 수직선이란 전통적인 수직선과는 달리 눈금이 제시되지 않고, 학생들이 필요한 위치에 스스로 수를 적도록 하는 것을 의미한다. 이러한 빈 수직선의 장점에 대해서 Treffers(1991b: 137), Gravemeijer(1994: 120-127) Klein(1998: 8), Beishuizen(1999: 160-161), Sundermann과 Selter(2000: 122-125) 등은 다음과 같이 말한다. 첫째, 수의 여러 가지 측면 중 서수는 묶음 모델과는 잘 맞지 않는다. 실제로 여행 거리와 같은 상황에는 묶음 모델이 적합하지 않고, 이는 직선 모델이 더 적합한데 빈 수직선은 이러한 기능을 충분히 갖추고 있다. 둘째, 학생들이 자신의 비형식적 암산 전략을 잘 표현하고 의사소통하는 시각적인 도움을 줄 뿐 아니라 유연한 암산 전략과 정신적 활동을 촉진하는 효과적인 도구이다. 실제로 1010 전략과 같은 것은 묶음 모델과 잘 들어맞지만, N10, A10, AOT 및 이에 대한 변종들은 빈 수직선 모델과 더 잘 어울린다. 또한 빈 수직선을 사용할 때 학생들은 점프들을 나타내기 전에 정신적으로 그 상황을 상상해야 하기 때문에 학생들의 정신적 활동을 자극한다. 셋째, 학생들의 비형식적 전략에서 출발하여 수준 상승을 가능하게 한다. 학생들의 세기 전략을 이용하여 2씩, 5씩, 10씩 단축하여 셈으로써 N10 전략으로의 점진적인 전이가 가능하다는 것이다. 그러나 빈 수직선에 익숙해지는 데는 약간의 시간이 걸린다는 단점이 있다.

지금까지 학생들의 암산 전략과 이를 위한 교수학적 모델을 살펴보았다. 묶음 모델과 직선 모델은 기초가 되는 수 개념이 다를 뿐만 아니라 연산에서의 서로의 역할에도 차이가 있다. 초등학교에서 암산을 중시하는 이유가 한편으로는 정확성도 포함되겠지만 더 중요한 것은 학생들의 사고의 유연성이라 할 것이다. 따라서 유연성을 조금이라도 더 신장시키기 위해서는 다양한 모델을 사용하여 학생들의 사고를 개발하는 것이 필요하며, 이러한 모델에 고착시키는 것이 아니라 이를 기반으로 수준 상승을 할 수 있도록 더 많은 자극을 제공하여야 할 것이다.

Ⅴ. 우리나라의 암산 지도 분석

이 장에서는 우리나라의 범자연수와 연산 영역에서 암산지도는 어떻게 이루어지는지 암산 전략과 교수학적 모델을 중심으로 분석하고자 한다.

1. 교과서의 암산 전략과 교수학적 모델 분석

제 7차 교육과정에서 다루어지는 범자연수와 연산 영역 중 암산 전략 및 교수학적 모델을 분석한 결과는 <표 Ⅴ-1>과 같다.

<표 V-1> 제 7차 수학교과서의 범자연수 연산 영역

단계	단원	내용 (교수학적 모델)	암산 전략(과정)
1-가	5. 더하기와 빼기	가로셈(산가지: 바둑돌 등):세기	세기
1-나	4. 10이 되는 더하기와 빼기	가로셈(산가지, 수 모형, 수직선):세기	세기
	6. 더하기와 빼기(1)	세 수의 계산(수직선), 받아올림과 받아내림이 없는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈: 가로셈, 표준(수 모형)	24+35: N10/1010 85-23: N10/uN10(심화)
	7. 더하기와 빼기(2)	받아올림이 있는 한 자리 수의 덧셈과 받아내림이 있는 두 자리 수한 자리 수: 가로셈, 표준(곶감 모형, 수 모형)	6+7: 5 기준, 7+9: N10C, 15-9: N10C(심화)
2-가	2. 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈(1)	받아올림(내림)이 있는 두 자리 수±한 자리 수: 표준(수 모형), 세 수의 계산	48+9: N10C, 53-8: N10C(심화)
	4. 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈(2)	받아올림(내림)이 있는 두 자리 수± 두 자리 수: 표준(수 모형), 세 수의 계산	47+24: N10/1010, 54-36: N10, uN10(기본)
2-나	2. 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈(1)	받아올림(내림)이 없는 세 자리 수 ±세 자리 수: 표준(수 모형, 화폐 모형)	310+270: 100100/N100, 570-340: N100(기본)
	4. 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈(2)	받아올림(내림)이 있는 세 자리 수 ±세 자리 수: 표준(수 모형), 세 수의 계산	340+270:N100/100100, 340-190: N100C/N100(심화)
3-가	2. 덧셈과 뺄셈	받아올림(내림)이 있는 세 자리 수 ±세 자리 수: 표준(수 모형)	415+298:N100C/1010, 396+107:N100/C 625-399: N100C/C, 702-195: C(심화)
3-나	1. 덧셈과 뺄셈	표준(수 모형)	

교수학적 모델과 관련해서 보면 우리나라의 경우는 전체적으로 묶음 모델이 지배적이다. 그러나 전체적인 균형으로 생각한다면, 서수를 기초로 하는 교수학적 모델들이 더 도입되어야 한다. 반면 암산 전략과 관련해서 우리나라 교과서에서 여러 가지 방법으로 제시하고 있는 전략들은 N10, 1010, N10C, C 전략 등이다. 이는 사고의 유연성을 생각한다면 더 다양한 전략들이 다루어지고, 연습되어서 평소에도 이러한 전략들이 자유 자재로 사용될 수 있어야 한다.

2. 학생들의 암산 전략 분석

학생들이 암산 전략을 배우는 이유 중 하나는 맥락이나 문제에 적절하게 전략을 선택해서 계산하는 능력일 것이다. 우리나라와 같은 경우에 이러한 능력은 사실상 계속해서 강조되지 않는다면 발휘되기 어려운데, 그 이유는 Selter (2001: 156-158), Treffers(1991a: 334)가 이야기한 것처럼 일단 표준 알고리즘에 숙달되면, 학생들은 그것을 맹목적으로 쓰는 경향이 있기 때문이다. 따라서 학생들이 이러한 암산 전략을 얼마나 사용하는지 알아보기 위해, 2학년 1학급을 대상으로 2-가 단계의 '4. 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈'을 배우고 난 후에, '나의 방법은?[10]'이라는 제목으로 학생들에게 두 자리 수의 덧셈 문제를 만들고 두 가지 방법으로 풀어보도록 하였는데, 간단한 분석 결과는 <표 V-2>와 같다.

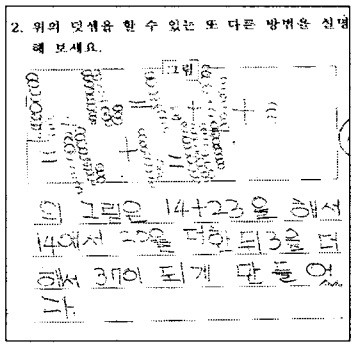
10) 이 문제는 2000년 5월 26일 진주시에 소재하는 B초등학교 2학년 1학급을 대상으로 실시되었다.

<표 V-2> 초등학교 2학년 학생들의 암산 전략 사용 정도에 대한 분석

첫 번째 방법	표준	표준	1010	1010	표준	1010	표준	합계
두 번째 방법	표준	1010	표준	1010	N10	N10	·	
학 생 수	11	8	3	6	1	1	2	32

<표 V-2>에서 보는 바와 같이 많은 학생들이 처음에는 표준 알고리즘을 사용하여 문제를 해결하며, 표준 알고리즘 외에는 다른 방법을 생각하지 못하는 학생들이 13명이고, 여러 가지 전략 중 1010 전략을 사용하는 학생들은 17명으로 가장 많았다. N10을 사용한 학생은 2명뿐이었는데(그림 V-1), 학생 1은 14+23을 수 모형 그림으로 그 과정을 상세하게 나타낸 뒤에 '위 그림은 14+23을 해서 14에서 20을 더한 뒤 3을 더해서 37이 되게 만들었다.'와 같이 설명하였다. 반면 학생 2는 26+19를 수 모형 그림을 그린 후에 '1자리수와 10자리수랑 나눠 더해서 그숫자와 합쳐 45가 나왔습니다.'라고 설명하였다. 이 학생의 경우는 사실상 설명한 글만으로는 이해하기 어렵지만 그림을 보면 그 과정이 상세하게 나타나 있는데, 처음 그림은 두 수를 각각 수 모형으로 나타내고, 그 다음은 수 26에 해당하는 수 모형은 그대로 두고, 19에 해당하는 수 모형은 십 모형과 낱개 모형을 분리해서 그린 다음에, 26에 10을 더한 36을 수 모형으로 나타내고 다시 9를 더해서 45를 나타내는 수 모형을 그림으로 나타내었다.

한 학급을 대상으로 분석한 것이기 때문에 일반화는 어렵지만, 앞에서 언급한 대로 수 모형을 사용하는 학생들이 1010전략을 선호한다는 것을 지금의 분석 결과가 그대로 확인해 준다. 2학년 2단원과 4단원에서 나오는 전략들 중에 N10이 많이 제시되는 것에 비해 이 결과는 학생들이 그만큼 다양한 전략을 사용하는데 어려움이 있음을 보여준다.



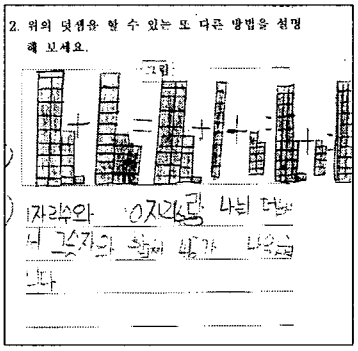


그림 V- 1. 학생 1, 2의 전략 예

Ⅵ. 나오며

지금까지 초등학교에서 중요시되어야 할 수학적 소양은 무엇이며, 그 중에 최근 많은 관심의 대상이 되고 있는 암산에 대해서 여러 나라의 연구를 바탕으로 그 의미와 중요성, 교수·학습의 실제, 암산 전략과 그 뒷받침이 되는 교수학적 모델을 살펴보았다. 이러한 배경을 기초로 우리나라 제 7차 교육과정을 중심으

로 수학교과서의 흐름과 내용에서 다루어지고 있는 암산 전략 및 교수학적 모델을 분석하고, 학생들이 주로 사용하는 전략에 대해 살펴보았다.

이러한 논의를 바탕으로 앞으로의 범자연수와 연산 영역에서 암산 지도를 위한 시사점을 생각해 보고자 한다.

첫째, 현 체제의 암산 전략과 표준 알고리즘의 관계에 대한 좀더 적극적인 해석이 필요하다. 전술한 바와 같이 암산과 표준 알고리즘의 균형을 중요시하면서 초등학교에서 표준 알고리즘을 의무화하는 나라가 있는가 하면, 아예 암산을 위주로 진행하면서 쉽게 접근할 수 있는 표준 알고리즘이 아닌 한 두 가지의 방법을 소개하는 나라도 있고, 처음에는 암산 위주로 진행하다가 3학년이나 4학년에 가서 학생들의 방법과 표준 알고리즘을 자연스럽게 연결하기 위해 노력하는 나라들도 있다. 그러나 어떤 경우이든 우리는 왜 암산을 중요시하는가에 대해 더 많은 생각을 할 필요가 있다. 처음부터 표준 알고리즘을 학생들에게 부과하는 것은 수학을 시작하는 학생들에게 처음부터 자신들의 능력을 발휘할 기회를 많이 제한하는 것이다. 많은 연구자들이 이야기하듯이 자신의 방법을 생각해 낸 학생들은 서로의 의견을 교환하고 토론하는 중에 수학을 즐기게 된다. 그리고 앞으로 배울 수학에 대해서도 유연하게 대처할 자세를 기르게 되는 것이다. 그러나 반대로 처음부터 무엇인가를 계속 받아본 학생들은 스스로 무엇인가를 생각해 내는 데 어려움을 겪는다. 우리나라 학생들의 문제는 수학 문제는 방법을 배워서 잘 해결하는 데 비해 스스로 생각하기를 싫어하는 것이라는 생각이 든다. 그러나 우리나라의 정서에 비추어 볼 때, 표준 알고리즘을 지도하지 않는다는 것은 어려운 문제이다. 이러한 판단은 현장에 기초한 더 확실한 증거가 필요하다고 생각한다. 암산을 강조하는 나라들은 이렇게 배운 학생들은 표준 알고리즘을 배우는 데 오히려 시간이 훨씬 더 적게 든다는 것을 보이고, 실제로 학생들의 능력이 어떤지에 대해 많은 증거들을 확보하려고 노력하며, 유연성과 정확성이라는 두 마리의 토끼를 모두 잡기 위해 노력하고 있다. 우리는 어린 시기부터 형식적인 표준 알고리즘에 완벽하게 숙달하도록 하는 것과 통찰력 있고 유연한 사고를 중시하는 것 사이에서 좀더 신중한 판단을 해야 할 것이고, 이를 뒷받침하기 위한 충분한 증거를 바탕으로 교육과정의 개선이 이루어져야 한다고 생각한다.

둘째, 암산 교수·학습의 효율성을 높이는 문제이다. 첫째 문제는 사실상 많은 논의와 장기적인 비전을 가지고 해결해야 할 문제이다. 그러나 둘째 문제는 지금 현재의 체제를 크게 벗어나지 않는 범위에서 암산 전략의 지도를 강화하는 것이다. 앞에서 학생들이 실제로 사용하는 암산 전략은 상당히 제한적이라는 것을 살펴보았다. 표준 알고리즘을 배우고 단지 여러 가지 방법으로 해 보는 정도로의 학습으로는 크게 기대할 바가 없을 것이다. 영국에서 연구자들이 하는 이야기는 매일 학생들에게 암산을 하도록 하자는 것이었다. 그러나 이렇게는 하지 않더라도 교사들은 수업 중간 중간에 여러 가지 방법을 생각해 보도록 유도할 수 있을 것이다. 그리고 이러한 생각을 유도하는 데 단순히 식을 써서 접근하는 방법보다는 적절한 교수학적 모델을 많이 활용하는 것이 도움이 될 것이다. 묶음 모델만으로 아니면 직선 모델만으로 학생들의 암산 전략을 이끌어 내는 데는 한계가 있다. 그 모델들이 관련된 어떤 맥락이나 수학적 기초가 다르기 때문이다. 따라서 저학년일수록 묶음 모델과 직선 모델을 폭넓게 사용하면서, 학생들이 다양한 전략을 이

끌어 내도록 도움을 주며, 교사는 학생들의 전략을 다른 학생들이 볼 수 있도록 칠판에 적고, 서로의 의견을 교환할 수 있도록 격려해야 하며, 이러한 과정을 거쳐 모델의 도움이 없이도 사고할 수 있도록 함으로써 학생들의 수학적 발달을 촉진해야 한다.

참고문헌

교육인적자원부(2002). **수학 1-나, 2-가, 2-나, 3-가.** 서울: 대한 교과서 주식 회사.

Askew, M. (1999). It ain't(just) what you do: effective teachers of numeracy. In I. Thompson (ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools*(pp. 91-102). Bucking-ham: University Press.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*(pp. 127-162). Utrecht: Freudenthal Institute.

_____ (1999). The empty number line as a new model. In I. Thompson (ed.). *Issues in teaching numeracy in primary schools*(pp. 157-168). Buckingham: University Press.

Beishuizen, M, & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of Britisch ideas and Dutch views. *Britisch Educational Research Journal, 24*, 519-38.

Bell, M., Bell, J., & Flanders, J. (1998). First, second, third, fourth grade everyday mathematics teacher's manual & lesson guide. Chicago: Everyday Learning Corporation.

Bierhoff, H. (1996). Laying the foundations of numeracy: A comparison of primary school textbooks in Britain, Germany and Switzerland. *Teaching Mathematics and Its Application, 15*(4), 141-160.

Brown, M. (1999). The National Numeracy Project: 1996-99. In I. Thompson (ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools*(pp. 3-16). Buckingham: University Press.

Carpenter, P. C. (1997). Models for Reform of Mathematics Teaching. In M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*(pp. 35-54). Utrecht: Freudenthal Institute.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T.(1992). A Constructivist alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2-33.

DfE(Department for Education) (1995). *Mathematics in the National Curriculum.* London: HMSO.

Ernst Klett Grundschulverlag(2001). Zahlenbuch-die Neubearbeitung: Was ist neu bzw. verstärktworden?.http://www.klett-verlag.de/grundschule/bereiche/buch/mathe/werke/mathe2000/neu/neu.htm.

Ernst Klett Grundschulverlag(2003). http://www.klett-verlag.de.

Fuson, K.C., & Smith, S.T. (1997). Supporting multiple 2-digit conceptual structures and calculation methods in the classroom: issues of conceptual supports, instructional design, and language. In M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*(pp. 163-198). Utrecht: Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. P. E.(1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD β Press.

_____(1999). Instructional Design for Reform in Mathematics Education. In M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp.13-34) . Utrecht: Freudenthal Institute.

Höhtker, B., & Selter, Ch. (2000). Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl -Orientierungsübungen im Hunderterraum. In Müller, G. H. & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen*(pp. 122-137). Frankfurt am Main: Arbeits Grundschule-Der Grundschulverband-e.V.

Klein, T. (1998). *Flexibilization of Mental Arithmetic strategies on a different knowledge base: The empty line in a realistic versus gradual program design.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen(1996). *Richtlinien und Lehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* . Frechen: Verlagsgesellschaft Ritterbach mbH.

Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. Ch.(1997). *10 Jahre "mathe 2000" Blianze und Perspektiven.* Leipzig: Ernest Klett Grundschulverlag.

NCTM(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Radatz, H., & Schipper, S.(1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht and Grundschule.* Hannover: Schroedel Schumlbuchverlag.

Selter, C. (2001). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German Elementary Children's Success, Methods and Strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 145-173.

Sundermann, B., und Selter, Ch. (2000). Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen. In G.H. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen*(pp. 165-178). Frankfurt am Main: Arbeiskreis Grundschule-Der Grundschulverband-e.V.

Straker, A. (1999). The National Numeracy Project: 1996-99. In I. Thompson (ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools*(pp. 39-48). Buckingham: University Press.

Thompson, I. (1999a). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (ed.), *Issues in teaching numeracy in*

primary schools(pp. 145-156). Buckingham: University Press.

_____(1999b). Written methods of calculation. In I. Thompson (ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schols*(pp. 169-184). Buckingham: University Press.

Treffers, A. (1991a). Meeting Innumeracy at Primary School. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 333-352.

_____(1991b). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 21-57). Utrecht: CD β Press.

_____(1993). Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education. *Educaional Studies in Mathematics, 25,* 89-108.

Treffers, A. & Beishuizen, M.(1999). Realistic Mathematics Education in the Netherlands. In I. Thompson (ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools*(pp. 27-38). Buckingham: University Press.

Van den Heuvel - Panhuizen(1999). Mathematics Education in the Netherlands. Research Conference on 'Teaching Arithmetic in england and the Netherlands'. http://www.fi.run.nl/en/publications.html.

_____(2001). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Verschaffel, L., & De Corte, E.(1996). Number and Arithmetic. In A. J. Bishop (eds.), *International handbook of mathematics education*(pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. C,. & Müller, G. N. (2001). Das *Zahlenbuch. Mathematik im 4. Schuljahr.* Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

On the Teaching of Mental Arithmetic in Primary Mathematics

Chong, Yeong-Ok (Chinju National University of Education)

Mental arithmetic has recently gained a higher profile in primary school mathematics. The study aims to reflect didactical background of mental arithmetic in number and operations curriculum for primary school mathematics.

In order to attain these purposes, the present paper describes the meaning of mathematical literacy and didactical background of mental arithmetic on which have been laid emphasis in relation to mathematical literacy in many countries. Also it shows current suggestions for mental arithmetic instruction in Everyday Mathematics Project in USA, Numeracy Number Project in Great Britain, TAL project based on Realistic Mathematics Education in the Netherlands, and mathe 2000 project in German in order to gain practical ideas for teaching mental arithmetic. Furthermore, it discusses mental strategies of students and didactical models for improving mental arithmetic instruction based on the results of many researches.

Under these theoretical foundations, it is analyzed how mental arithmetic is developed in our number and operations curriculum, focused on mental strategies and didactical models. Finally, implications for improving our mental arithmetic instruction are discussed.

* **key words: 암산, 암산 전략, 수학적 소양, 교수학적 모델**