

## 2 차 시스템에 대한 이산시간 외란 관측기의 분석

### Analysis of Discrete-Time Disturbance Observer for Second-Order Systems

양 광 진, 최 영 진, 정 완 균  
(Kwangjin Yang, Youngjin Choi, and Wan Kyun Chung)

**Abstract :** The disturbance observer(DOB) has been widely used in high speed and high precision motion control applications and the characteristics of DOB have been investigated in depth. Though most of DOB's have been implemented as the discrete-time form in digital devices, we are still short of the researches on discrete-time DOB (DDOB) in spite of rich references on continuous-time DOB. In this paper, we discuss about the disturbance rejection property and measurement noise effect of discrete-time DOB. Especially, we will focus on revealing the role of sampling time in designing the discrete-time DOB and show the validity of analysis through simulations and experiments for optical disk drive systems.

**Keywords :** discrete-time disturbance observer (DDOB), disturbance rejection, measurement Noise, optical disk drive system, coprime factor uncertainty

#### I. 서론

시스템에 들어오는 외란을 제거시키기 위해 제안된 많은 제어 기법들 가운데 그림 1과 같이 제안된 외란 관측기는 정밀 제어, 로봇 제어, 시스템인자 식별 등, 거의 모든 분야에서 널리 사용되고 있다. 이와 더불어, 외란 관측기가 가지는 특성을 분석하고 성능을 향상시키려는 노력이 현재까지 다양하게 수행되고 있다[1-5]. 외란 관측기에 대한 연구는 대부분 연속시간 영역에서 이루어지고 있지만, 외란 관측기를 실제 시스템에 적용할 때에는 아날로그 형태보다는 디지털 형태로 구현하고 있다. 이는 이론 개발과 실제 적용의 문제를 따로 만드는 피리를 낳고 있다.

최근에, Digital Signal Processor(DSP)를 이용하여 디지털로 외란 관측기를 구현하여 성능을 논한 논문들이 많이 발표되고 있지만, 아직까지 이산시간 외란 관측기가 가지는 특성을 명확히 보여주지 못하고 있다[6-9], 부분적으로나마 [10]에 감도 함수의 최소화를 이용한 디지털 Q필터의 설계 방법이 제시되어 있을 뿐이다. 또한, 이제까지 외란 관측기에 대한 대부분의 연구는 정량적 기준에 의한 연구라기 보다는 다분히 정성적인 측면이 강했다. 이와는 다르게 [11][12]에서는 외란 관측기가 가지는 외란 제거 성능과 측정 잡음의 영향을 정량적으로 분석하였다. 그러나, [11][12]도 이산시간 영역이 아닌 연속시간 영역에서의 해석이므로, [11][12]에서 제시하고 있는 설계 기준들이 이산시간 영역에서 어떻게 영향을 받는지도 본 논문에서 간접적으로 살펴볼 수 있다. 또한, 연속시간 외란 관측기를 이산시간 외란 관측기로 변환할 때, 가장 중요한 요소인 샘플링 시간이 외란 제거와 측정 잡음 측면에서 어떻게 영향을 주는지를 본 논문에서 분석하고자 한다.

다음 II장은 Coprime Factor Uncertainty를 사용하여 얻는 외란 관측기를, III장은 Bilinear변환을 이용하여 얻어지는 이산시간 외란 관측기의 외란 제거 성능을, IV장은 이산시간 외

란 관측기의 측정 잡음 영향을 분석한다. 또한 V장과 VI장에서는 모의 실험과 적용 실험을 통해서 III장과 IV장에서 제시한 이산시간 외란 관측기 설계 기준들의 타당성을 보이고자 한다.

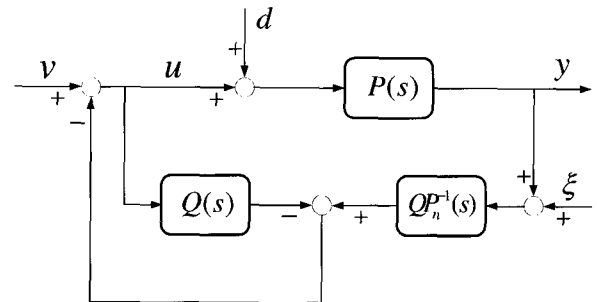


그림 1. 외란 관측기(DOB)의 구조.

Fig. 1. The structure of DOB.

#### II. 외란 관측기

대부분의 시스템은 비선형적인 요소나 파라미터 섭동 등과 같은 것에 기인하는 많은 불확실성을 내포하기 때문에 시스템을 정확히 모델링 하기는 어렵다. 이런 불확실성을 표현하는 방법에는 덧셈형, 곱셈형 등의 여러 가지 방법들이 있다. 그 중에서 모든 불확실성에 대해 적어도 안정성을 보장하며 표현할 수 있는 방법이 Coprime Factor 불확실성을 사용하는 방법이다[11-13]. 실제 플랜트(Real Plant)를 Coprime Factor 불확실성을 가지고 표현하면 실제 플랜트 P(s)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$P(s) = [M(s) - \Delta_M(s)]^{-1} [N(s) + \Delta_N(s)] \quad (1)$$

여기서  $\Delta_M(s)$ ,  $\Delta_N(s)$  은 Coprime Factor 불확실성을 표현한 것이다. 그리고 실제 플랜트 (1)이 가제어성과 가관측성을 가지고 있다고 가정한다. 또한 명목 플랜트(Nominal Plant)는 실제 플랜트에 대한 모델링(Modeling)을 통해서 얻어지며, 그것은 다음과 같이 표현된다.

논문접수 : 2002. 10. 25.,      채택확정 : 2003. 3. 3.  
양광진 : 공군사관학교 기계공학과(kjyang@afa.ac.kr)  
최영진 : 한국과학기술연구원 지능로봇연구센터(yjchoi@amadeus.kist.re.kr)  
정완균 : 포항공과대학교 기계공학과(wkchung@postech.edu)

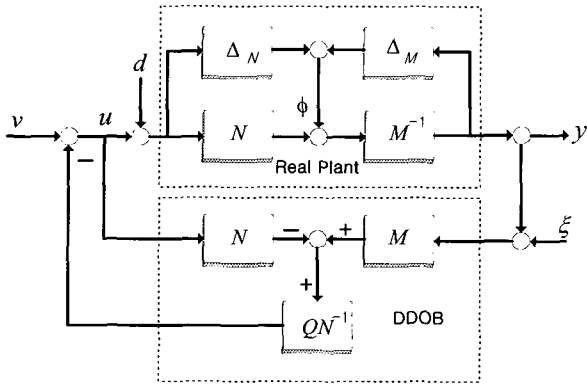


그림 2. Coprime Factor 불확실성을 이용하여 표현한 외란 관측기.

Fig. 2. The DOB expressed by coprime factor uncertainties.

$$P_n(s) = M(s)^{-1} N(s) \tag{2}$$

따라서, 그림 1과 같은 구조를 가지는 외란 관측기를 (1)의 실제 플랜트와 (2)의 명목 플랜트를 이용하여 표현하면, 그림 2와 같이 등가적으로 재구성할 수 있다.

그림 1과 2에서  $v$  는 주 제어기에서 생성되는 제어 입력 신호이며,  $u$  는 실제 플랜트에 인가되는 입력 값이고,  $d$  는 외부 외란 입력 신호이고,  $\xi$  는 측정 잡음을 나타낸다. 그림 2에 있는  $v, d, \xi$  의 3개의 외부 입력 신호들과 불확실성에 근거한 섭동 신호  $\phi$  로부터 출력( $y$ )에 이르는 전달 함수를 구해보면 다음과 같다.

$$y = (1-Q)M^{-1}\phi + M^{-1}Nv + (1-Q)M^{-1}Nd - Q\xi \tag{3}$$

$$= (1-Q)M^{-1}\phi + P_n v + (1-Q)P_n d - Q\xi$$

사실, 외란 관측기에서 사용되고 있는  $Q$  필터는 저주파 통과 필터의 형태이기만 하면 되므로, 아주 다양한 형태의 설계가 가능하다. 우리는 문제를 단순화하기 위해서  $Q$  필터의 형태를 가장 널리 사용되는 다음과 같은 Binomial 형태로 가정한다. 그리고 이를 적용하여 해석하고자 한다.

$$Q_{mn}(s) = \frac{\sum_{i=0}^n a_{mi}(\tau s)^i}{(\tau s + 1)^m}$$

여기서  $m$  은 필터의 분모 차수를 의미하고,  $n$  은 분자 차수를 의미하며,  $\tau$  는 필터 시 상수(Filter Time Constant)를 나타낸다. 또한,  $a_{mi}$  는 Binomial 계수를 의미하는데 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$a_{mi} = \frac{m!}{(m-i)! i!}$$

고전역학의 관점에서 대부분의 기계 시스템은 2 차 시스템으로 근사화하여 표현할 수 있으므로, 명목 플랜트를 다음과 같이 가정해 보자.

$$P_n(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

여기서  $\zeta$  는 감쇠 비(Damping Ratio)를 의미하고  $\omega_n$  은 비감쇠 원 고유 진동수(Undamped Circular Natural Frequency)를 의미한다. 지금까지 외란 관측기를 설명하였으나, 우리가 실제로 외란 관측기를 적용할 때는 이산시간 영역으로 바꾸어서 사용한다. 다음 장에서는 외란 관측기를 이산시간 영역으로 이산화했을 때, 외란 관측기의 외란 제거 성능이 어떻게 영향을 받는지 살펴보고자 한다.

III. 이산시간 외란 관측기의 외란 제거 성능

(3)에서, 외란  $d$  로부터 출력  $y$  에 이르는 전달 함수를 찾아보면 다음과 같다.

$$G_{dy}(s) = [1-Q(s)]P_n(s) \tag{4}$$

여기서  $G_{dy}(s)$  는 연속시간 영역에서의 전달 함수이다. 사실, 미지의 섭동 신호  $\phi$  로부터 출력에 이르는 전달함수가 위의 전달함수 (4)에 영향을 미치지만, 참고문헌 [11]에서의 섭동 신호에 대한 강인성 해석을 근거로 섭동의 영향이 작아지도록 외란 관측기가 설계된다고 가정한다. 이제 위의 전달 함수 (4)에 대해서 이산시간 영역으로의 이산화를 수행해 보자. 이 때 현재 가장 많이 쓰이고 있는 Bilinear 변환을 이용하면, (4)는 다음과 같이 이산시간 전달 함수로 바뀌게 된다.

$$G_{dy}(z) = [1-Q(s)]P_n(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \tag{5}$$

여기서 샘플링 시간 간격  $T$  는 일반적으로 필터 시 상수보다 작게 결정되어야 한다. 다시 말해서,  $0 < T < \tau \leq 1$  라는 조건이 항상 만족되어야 한다. 연속시간 영역에서의 신호를 일정한 샘플링 시간 간격으로 샘플링하면, 연속시간 영역에서의 신호와 샘플러를 통해 이산화한 이산시간 영역에서의 신호는 잘 알려진 다음의 관계를 가진다.

$$z = e^{sT} = e^{j\omega T}$$

위의 관계를 이용하여, (5)에 있는  $z$  대신에  $e^{j\omega T}$  를 대입하면 다음과 같은 형태의 전달 함수가 얻어진다.

$$G_{dy}(z) = \left[ 1 - Q \left( \frac{2(e^{j\omega T} - 1)}{T(e^{j\omega T} + 1)} \right) \right] \cdot P_n \left( \frac{2(e^{j\omega T} - 1)}{T(e^{j\omega T} + 1)} \right) \tag{6}$$

(6)의 크기를 주파수에 따라 구하기 위해서 다음과 같은 오일러 방정식(Euler's equation)을 이용한다.

$$e^{j\omega T} = \cos[\omega T] + j \sin[\omega T] \tag{7}$$

여기서, (7)의 오일러 방정식을 (6)에 대입한 후 MATHEMATICA 라는 Symbolic Calculation Software 를 사용하여 최종적으로 외란에서 출력에 이르는 전달 함수의 크기를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\left| G_{dy}(z) \right|_{mn} = kT^2 f_{mn} \cos^2 \left[ \frac{\omega T}{2} \right] \sqrt{\frac{\left( \tau \sin \left[ \frac{\omega T}{2} \right] \right)^{2(n+1)} N_{mn}^d}{A^m B}} \tag{8}$$

표 1.  $f_{mn}$  의 값.

Table 1. The  $f_{mn}$  Values

$f_{20}$	$f_{30}$	$f_{31}$	$f_{40}$	$f_{41}$	$f_{42}$
16	$24\sqrt{2}$	$48\sqrt{2}$	64	192	256

여기서,  $|G_{dy}(z)|_{mn}$  은 분모 차수가  $m$  이고 분자 차수가  $n$  인  $Q_{mn}$  필터를 사용했을 때 얻어지는 이산시간 전달 함수의 크기를 나타내고 있으며,  $f_{mn}$  은 상수로써 그 값을 표1에 나타내었다. 예를 들어,  $f_{31}$  은  $Q_{31}$  필터를 사용했을 때 얻어지는 계수 값이다.

또한, (8)에 있는 공통 인자인 A, B는 다음의 값을 가진다.

$$A = T^2(1 + \cos[\omega T]) + 4\tau^2(1 - \cos[\omega T]),$$

$$B = 16(1 - \cos[\omega T])^2 + T^4\omega_n^4(1 + \cos[\omega T])^2 + 8T^2\omega_n^2(-1 + \cos^2[\omega T] + 2\zeta^2 \sin^2[\omega T])$$

그리고, 분자 항에 있는  $N_{mn}^d$  은 다음과 같은 값을 가진다.

$$N_{20}^d = \frac{T^2(1 + \cos[\omega T]) + \tau^2(1 - \cos[\omega T])}{2},$$

$$N_{30}^d = \frac{9T^4(1 + \cos[\omega T])^2 + 16\tau^4(1 - \cos[\omega T])^2 + 12T^2\tau^2 \sin^2[\omega T]}{36},$$

$$N_{31}^d = \frac{9T^2(1 + \cos[\omega T]) + 4\tau^2(1 - \cos[\omega T])}{18},$$

$$N_{40}^d = \frac{T^6(\cos[\frac{3\omega T}{2}] + 3\cos[\frac{\omega T}{2}])^2 + 16\tau^6 \sin^2[\frac{\omega T}{2}](1 - \cos[\omega T])^2}{16} + \frac{8T^4\tau^2(\cos[\frac{3\omega T}{2}] - \cos[\frac{\omega T}{2}])(\cos[\frac{3\omega T}{2}] + 3\cos[\frac{\omega T}{2}])}{16} + \frac{36T^4\tau^2 \sin^2[\frac{\omega T}{2}](1 + \cos[\omega T])^2 + 16T^2\tau^4(\cos[\frac{3\omega T}{2}] - \cos[\frac{\omega T}{2}])^2}{16} + \frac{48T^2\tau^4 \sin^2[\frac{\omega T}{2}](-1 + \cos^2[\omega T])}{16},$$

$$N_{41}^d = \frac{9T^4(1 + \cos[\omega T])^2 + 4T^2\tau^2 \sin^2[\omega T] + 4\tau^4(1 - \cos[\omega T])^2}{36},$$

$$N_{42}^d = \frac{4T^2(1 + \cos[\omega T]) + \tau^2(1 - \cos[\omega T])}{8}$$

(8)은 매우 복잡한 형태를 가지기 때문에 이 자체로는 공학적 효용성을 가지기 어렵다. 그러나 일반적으로 대부분의 외란이 저주파 영역에 존재하므로 저주파 영역에서 살펴보고자 한다. z-Domain에서 저주파 영역은 근사적으로  $0 < \omega T \ll 1$ 를 만족하는 영역이므로, 저주파 영역에서  $\omega T$  이 작은 값이 되고, 이를 이용하여  $\cos[\omega T]$ 와  $\sin[\omega T]$ 는 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$\cos[\omega T] \approx 1, \quad \sin[\omega T] \approx \omega T$$

그리고, 위의 근사화와 저주파 영역 ( $0 < T\omega < \tau\omega \ll 1$  와  $\omega < \omega_n$  를 만족하는 영역) 이라는 조건을 가지고 A 와 B 를

다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$A \approx 2T^2, \quad B \approx 4T^4\omega_n^4$$

또한,  $N_{mn}^d$  도 위의 조건들을 이용하면, 다음과 같이 하나의 일반 식으로 정리할 수 있다.

$$N_{mn}^d \approx T^{2(m-n-1)}$$

따라서, 저주파 영역에서 (8)은 다음과 같이 근사화 된다.

$$|G_{dy}(z)|_{mn} \approx kT^2 f_{mn} \sqrt{\frac{\left(\tau \frac{\omega T}{2}\right)^{2(n+1)} T^{2(m-n-1)}}{(2T^2)^m (4T^4\omega_n^4)}} \quad (9)$$

여기서, 데시벨로 크기를 환산해보면 식 (9)는 다음과 같이 변환된다.

$$20 \log |G_{dy}(z)|_{mn} = 20 \log |k f_{mn}| + 20(n+1) \log |\tau\omega| - 20 \log \left| 2^{\frac{m}{2} + n + 2} \right| + 20 \log \left| T^2 \cdot T^{(n+1)} \cdot T^{(m-n-1)} \cdot T^{-m} \cdot T^{-2} \right| - 20 \log |\omega_n^2| = 20 \log \left| \frac{k f_{mn}}{2^{\frac{m}{2} + n + 2} \omega_n^2} \right| + 20(n+1) \log |\tau\omega| \quad (10)$$

외란 관측기를 사용했을 때 얻어지는 외란 제거의 정량적 차이는 외란 관측기를 사용하지 않았을 때의 전달 함수 크기와 서로 비교해 보면 알 수 있다. 외란 관측기를 사용하지 않았을 때, 외란 에서부터 출력에 이르는 전달 함수의 크기는 다음과 같이 구해진다.

$$|G_{dy}(z)|_{Original} = \frac{2kT^2 \cos^2 \left[ \frac{\omega T}{2} \right]}{\sqrt{B}} \quad (11)$$

저주파 영역에서 B 는  $4T^4\omega_n^4$  으로 근사화되고,  $\cos \left[ \frac{\omega T}{2} \right] \approx 1$  이기 때문에, 저주파 영역에서 (11)의 데시벨 크기는 다음과 같이 구해진다.

$$20 \log |G_{dy}(z)|_{Original} \approx 20 \log \left| \frac{k}{\omega_n^2} \right| \quad (12)$$

저주파 영역에서 외란 제거의 정량적 차이는 (10)과 (12)의 비교를 통해 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$20 \log |G_{dy}(z)|_{DOB} - 20 \log |G_{dy}(z)|_{Original} = 20 \log \left| \frac{f_{mn}}{2^{\frac{m}{2} + n + 2}} \right| + 20(n+1) \log |\tau\omega| \quad (13)$$

여기서  $0 < \tau\omega \ll 1$  을 만족하는 저주파 영역에서 식

(13)의 두 번째 항의 크기는 0 보다 작아진다. 식 (13)이 0 보다 작으면 외란 관측기에 의해서 시스템에 미치는 외란의 영향이 줄어든 것과 같기 때문에 다음의 관계를 얻을 수 있다.

(기준 1) [필터 차수와 외란 제거 성능]

Q 필터의 분자 차수가 클수록 외란 제거 성능은 향상된다. 또한, 분자 차수가 같은 경우에는 분모 차수가 작을수록 외란 제거 성능이 우수하다.

(13)을 살펴보면, 저주파 영역에서  $\tau\omega \ll 1$  이므로  $20(n+1)\log|\tau\omega|$ 은 저주파 영역에서 당연히 음의 값을 가지게 된다. 그러므로 Q필터의 분자 차수  $n$  이 크면 클수록 (13)은 더욱 작아져서, 외란 관측기의 외란 제거 성능은 좋아진다. 예를 들어, 상대 차수가 같은 경우에 대해서  $Q_{42}$ 는  $Q_{31}$ 보다,  $Q_{31}$ 은  $Q_{20}$ 보다 우수한 외란 제거 성능을 보인다. 또한, 분자 차수가 같은 경우에는  $20\log|f_{mn}/2^{(m/2+n+2)}|$ 의 크기를 고려해야 하는데  $Q_{31}$ 과  $Q_{41}$ 을 비교해 보면,  $Q_{41}$ 은 6의 값을 가지고  $Q_{31}$ 은 3의 값을 가진다는 것을 알 수 있다. 따라서 분자 차수가 같을 때는 분모 차수  $m$ 이 작은 경우에 외란 제거 성능이 더 우수하다는 것을 알 수 있다.

(기준 2) [필터 시 상수와 외란 제거 성능]

Q필터의 시 상수  $\tau$ 가 작을수록 외란 제거 성능은 향상된다.

Q 필터의 시 상수  $\tau$ 가 작을수록 같은 주파수 ( $\omega$ )에 대해서  $20(n+1)\log|\tau\omega|$ 은 더욱 작은 값을 가지게 된다. 따라서 더 작은 Q 필터의 시 상수  $\tau$ 는 더욱 우수한 입력 외란 제거 성능을 가져온다. 또한 이 시 상수는 직접적으로 외란 제거 성능을 보이는 주파수 영역의 한계를 결정해준다. 또한, (13)에서 외란 관측기를 사용하였을 때, 얻어지는 외란 제거의 정량적 크기를 주파수에 따라서 얻을 수 있게 된다. 외란 관측기를 사용하였을 때, 얻어지는 외란 제거의 데시벨 크기는 (13)의 결과값이 되므로 시스템에 존재하는 외란에 대해서 Q 필터의 매개 변수 (분자 차수, 분모 차수, 필터 시 상수)를 결정하면 외란 관측기에 의해서 외란이 얼마만큼 크기가 줄어들 지를 각 주파수에 따라서 계산할 수도 있게 된다.

(기준 3) [샘플링 시간과 외란 제거 성능]

저주파 영역에서 샘플링 시간 T 에 따른 외란 제거 성능은 어느 정도 작은 샘플링 시간만 보장되면 외란 제거 성능에 거의 영향을 미치지 않는다.

(13)을 살펴보면 저주파 영역에서는 샘플링 시간 T 가 시스템에 거의 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있다. 즉, 어느 정도 작은 샘플링 시간만 보장되면 샘플링 시간을 더 빠르게 하더라도 외란 제거 성능은 향상되지 않고 거의 동일한 성능을 가지게 된다.

첨언 1 본 논문의 기준 1,2 와 참고문헌 [11]의 기준 3,4 를 서

로 비교해 보면 결과가 거의 유사함을 알 수 있다. 이는 저주파에 존재하는 외란은 일정한 샘플링 시간만 보장되면 샘플링 시간 간격 T 의 역할이 중요치 않게 되기 때문에 연속 시간영역과 이산시간영역에서 거의 동일한 결과를 얻게 되는 것이다.

IV. 이산시간 외란 관측기의 측정 잡음 영향

외란 관측기는 피드백을 위한 측정 장치를 가지고 있기 때문에, 측정 잡음이 고주파의 특성을 가지고 나타나게 된다. 실제로 외란 관측기 시스템에서 측정 잡음은 피드백에 의해서 제어 대상 플랜트를 통과하여 나타나는 출력 단자에 대한 영향보다 플랜트를 통과하기 전의 제어 입력신호에 보다 심각한 영향을 미치기 때문에 제어 입력에 대해서 살펴보고자 한다.

(3)으로부터 측정 잡음  $\xi$ 에서 제어 입력  $u$ 에 이르는 전달 함수를 얻어보면 다음과 같다.

$$G_{\xi u}(s) = Q(s)P_n^{-1}(s) \tag{14}$$

외란 제거 성능분석에서와 마찬가지로, 연속시간 영역에서의 전달 함수를 Bilinear 변환을 이용해서 이산화한 후, 오일러 방정식을 (14)에 대입하여 그 크기를 계산해 보면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$|G_{\xi u}(z)|_{mn} = \frac{g_{mn}}{k} \sqrt{\frac{BN_{mn}^s}{A^m}} \tag{15}$$

여기서  $g_{mn}$ 은 상수로써, 그 값은 표2에 나타내었다. 그리고,  $N_{mn}^s$ 은 다음과 같은 값을 가진다.

$$\begin{aligned} N_{20}^s &= 1, \\ N_{30}^s &= T^2 \cos^2\left[\frac{\omega T}{2}\right], \\ N_{31}^s &= \frac{T^2 \cos^2\left[\frac{\omega T}{2}\right] + 36\tau^2 \sin^2\left[\frac{\omega T}{2}\right]}{36}, \\ N_{40}^s &= T^4 \cos^4\left[\frac{\omega T}{2}\right], \\ N_{41}^s &= \frac{T^2 \cos^2\left[\frac{\omega T}{2}\right](T^2 \cos^2\left[\frac{\omega T}{2}\right] + 64\tau^2 \sin^2\left[\frac{\omega T}{2}\right])}{64}, \\ N_{42}^s &= \frac{T^4(1 + \cos[\omega T])^2 + 576\tau^4(1 - \cos[\omega T])^2 + 16T^2\tau^2 \sin^2[\omega T]}{48^2} \end{aligned}$$

(15) 또한 매우 복잡한 형태를 가지기 때문에, 이 역시 공학적인 효용성을 찾을 수가 없다. 그러나, 일반적으로 잡음은 고주파 영역에 주로 존재하기 때문에 고주파 영역에서 살펴보자. 사실, 이산시간 영역에서  $\tau\omega \gg 1$ 을 만족하는 고주파 영역이란 샘플링 시간 T 의 값의 크기에 따라서 한정된다.

표 2.  $g_{mn}$  의 값.

Table 2. The  $g_{mn}$  Values

$g_{20}$	$g_{30}$	$g_{31}$	$g_{40}$	$g_{41}$	$g_{42}$
1	$\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	2	16	48

예를 들어, 이산시간에서는 근사적으로  $\omega T \approx \pi$  가 고주파를 의미하므로, 고주파의 영역은  $\omega \approx \frac{\pi}{T}$  정도의 주파수 영역까지를 의미하게 된다. 그러므로 우리는 고주파 영역에서의  $\cos[\omega T]$ 와  $\sin[\omega T]$ 를 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\cos[\omega T] \approx -1, \quad \sin[\omega T] \approx (\pi - \omega T) \ll 1$$

그리고, 위의 고주파 영역이라는 조건들을 이용하면 A와 B는 다음의 값으로 근사화 될 수 있다.

$$A \approx 8\tau^2, \quad B \approx 64$$

여기서 B를 얻을 때,  $0 < (\pi - \omega T) \ll 1$  이므로, 거의 언제나  $64 \gg 8T^2\omega_n^2(\pi - \omega T)^2$  이 성립된다는 것을 이용하였다. 또한,  $N_{mn}^s$ 는  $\cos\left[\frac{\omega T}{2}\right] \approx \frac{1}{2}(\pi - \omega T)$  와  $\sin\left[\frac{\omega T}{2}\right] \approx 1$  를 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$N_{mn}^s \approx \tau^{2n} \left( \frac{T}{2} (\pi - \omega T) \right)^{2(m-n-2)}$$

여기서 위의 식은  $0 < (\pi - \omega T) \ll 1$  을 이용하여, 거의 언제나  $\tau^2 \gg T^2(\pi - \omega T)^2$  이 성립된다는 것을 이용하여 얻었다. 따라서, 고주파 영역에서 (15)는 다음과 같이 근사화된다.

$$\left| G_{\xi u}(z) \right|_{mn} \approx \frac{g_{mn}}{k} \sqrt{\frac{64\tau^{2n} \left( \frac{T}{2} (\pi - \omega T) \right)^{2(m-n-2)}}{(8\tau^2)^m}} \quad (16)$$

여기서 데시벨로 크기를 환산해 보면 (16)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} 20 \log \left| G_{\xi u}(z) \right|_{mn} &\approx 20 \log \left| \frac{g_{mn}}{k} \right| + 20 \log \left[ 8 \cdot 2^{-(m-n-2)} \cdot 8^{-\frac{m}{2}} \right] \\ &\quad - 20(m-n) \log \tau + 20(m-n-2) \log |T(\pi - \omega T)| \\ &= 20 \log \left| \frac{g_{mn}}{(\sqrt{2})^{(5m-2n-10)} k \tau^2} \right| \\ &\quad + 20(m-n-2) \log \left| \frac{T(\pi - \omega T)}{\tau} \right| \end{aligned} \quad (17)$$

따라서,  $0 < T < \tau \ll 1$  을 만족하는 작은 샘플링 시간 간격에 대해서 다음과 같은 기준을 얻을 수 있다.

(기준 4) [필터 차수와 측정 잡음]

Q필터의 상대 차수(m-n)가 클수록 측정 잡음에 대한 성능은 향상된다. 또한, 상대 차수가 같은 경우에는 분모 차수가 작을 때 측정 잡음에 대한 성능은 향상된다.

기본적인 조건  $0 < T < \tau \ll 1$  와 고주파 영역이라는 조건  $0 < (\pi - \omega T) \ll 1$  은 (17)에서  $\frac{T(\pi - \omega T)}{\tau} \ll 1$  이므로,

$20(m-n-2) \log \left| \frac{T(\pi - \omega T)}{\tau} \right|$ 의 값은 음의 값을 가지게 되고 상대 차수가 커지면 더욱 감소하게 된다. 따라서, 상대 차수가 증가할수록 측정 잡음에 대한 성능이 향상되는 것이다.

또한, 같은 상대 차수의 경우에는  $20 \log \left| \frac{g_{mn}}{(\sqrt{2})^{(5m-2n-10)} k \tau^2} \right|$ 을

고려해야 하는데 분모 차수가 클수록 이 값이 커지므로 성능이 저하된다. 예를 들어, 상대차수가 3인  $Q_{30}$ 은 상대 차수가 2인  $Q_{20}$ 보다 측정 잡음에 대해 보다 나은 성능을 보이고 상대 차수가 같은 경우에  $Q_{20}$ 은  $Q_{31}$ 보다,  $Q_{31}$ 은  $Q_{42}$ 보다 측정 잡음에 대해서 나은 성능을 보인다.

(기준 5) [필터 시 상수와 측정 잡음]

Q필터의 필터 시 상수  $\tau$ 가 작을수록 측정 잡음에 대해서 나쁜 영향을 미친다.

(17)에서 같은 상대 차수에 대해서  $\tau$  값이 작을수록  $20(m-n-2) \log \left| \frac{T(\pi - \omega T)}{\tau} \right|$ 의 값이 커지기 때문에 결국 필터 시 상수가 작을수록 측정 잡음은 더욱 증폭되게 된다.

(기준 6) [샘플링 시간과 측정 잡음]

샘플링 시간 간격 T가 클수록 (샘플링 속도가 느릴수록) 측정 잡음에 대해서 나쁜 영향을 미친다.

(17)에서 샘플링 간격이 커짐에 따라 T의 값이 커지게 되고, 따라서 같은 상대 차수에 대해서  $20(m-n-2) \log \left| \frac{T(\pi - \omega T)}{\tau} \right|$ 은 그 크기가 더욱 커지게 된다. 결국, 샘플링 시간 간격이 커짐에 따라 측정 잡음은 더욱 증폭되게 된다.

**첨언 2** 본 논문의 기준 4,5와 참고문헌 [11]의 기준5,6을 서로 비교해 보면 측정 잡음에 대한 Q필터의 차수와 시 상수의 영향은 동일한 경향을 보인다. 그러나 고주파에 존재하는 측정 잡음은 샘플링 시간 간격 T와 연관되기 때문에 이산시간 외란 관측기에서는 샘플링 시간에 따른 성능차이가 발생하게 된다.

**첨언 3** 기준 2와 5를 비교해 보면 서로 상충된 결과를 가진다는 것을 알 수 있다. 만약, 잡음이 적은 시스템이라면 시 상수를 작게 하면 성능향상을 기대할 수 있지만 측정 잡음이 심한 시스템일 경우 시 상수를 너무 작게 하면 오히려 성능이 악화되므로 시스템의 특성에 따라 적절한 시 상수 값을 결정해야 한다.

V. 수치 예제

위에서 제시한 기준들의 타당성을 검증하기 위해서, [11]에서 사용된 삼성 12배속 DVD 트랙 추종 구동 시스템을 대상으로 수치 예제를 보이고자 한다. 이 시스템의 명목 모델은

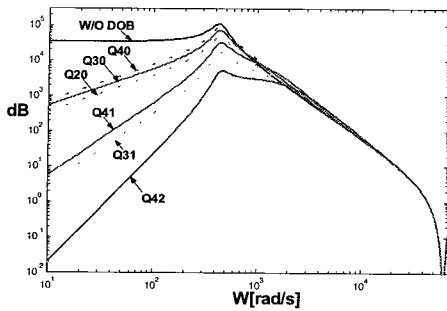


그림 3. Q-필터 차수에 따른 외란 제거 성능.  
Fig. 3. Disturbance rejection performance according to orders of Q-filter.

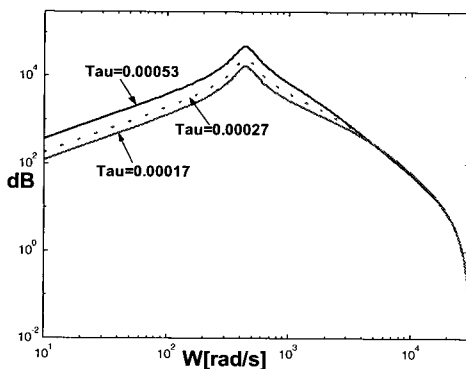


그림 4. Q-필터 시 상수에 따른 외란 제거 성능.  
Fig. 4. Disturbance rejection performance according to time constants of Q-filter.

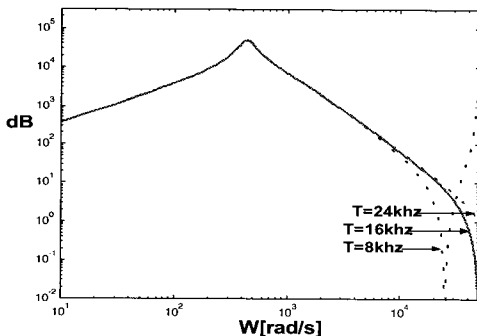


그림 5. 샘플링 속도에 따른 외란 제거 성능.  
Fig. 5. Disturbance rejection performance according to sampling times of Q-filter.

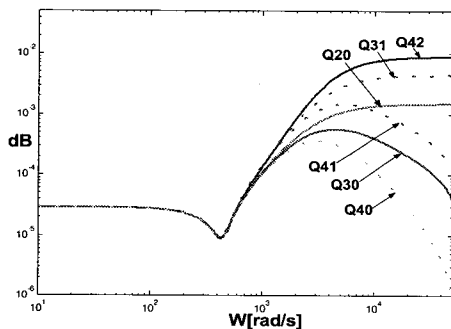


그림 6. Q-필터 차수에 따른 측정 잡음 영향.  
Fig. 6. Sensor noise effect according to orders of Q-filter.

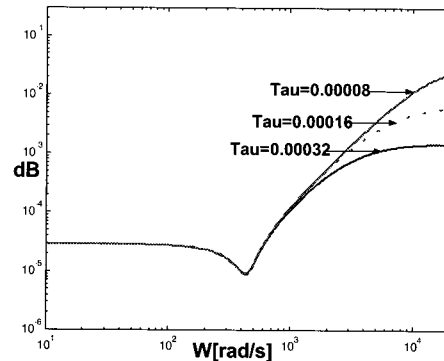


그림 7. Q-필터 시 상수에 따른 측정 잡음 영향.  
Fig. 7. Sensor noise effect according to time constants of Q-filter.

다음과 같다.

$$P_n(s) = \frac{5 \times 6880 \times 193600}{s^2 + 2(0.158)(440)s + (440)^2} [\text{volt / volt}]$$

여기서 5는 구동 드라이버 DC-이득이고, 6880은 RF의 DC-이득이고, 193600은 Voice Coil Motor(VCM)의 DC-이득을 나타낸다. 또한, 0.158은 감쇠 비( $\zeta$ )이고, 440은 비감쇠 원 고유진동수( $\omega_n$ )를 나타낸다.

1. 외란 제거 효과

그림 3은 이산시간 외란 관측기의 외란에서 출력에 이르는 전달 함수인 (8)을 나타낸 그림이다. 그림 3에서 가능한 작은 크기를 갖는 것이 좋은 외란 제거 성능을 보인다고 할 수 있다. 앞에서 제시한 기준 1과 동일하게 Q-필터의 분자 차수가 클수록 외란 제거 성능이 우수하고, 분자 차수가 같은 경우에는 분모 차수가 작을수록 외란 제거 성능이 우수함을 알 수 있다.

그림 4는 필터 시 상수에 따른 외란 제거 성능을 나타낸 것이다. 기준 2에서 제시된 바와 같이 시 상수가 작을수록 외란 제거 성능이 향상됨을 알 수 있다.

그림 5는 샘플링의 속도에 따른 외란 제거 성능을 나타낸 그림이다. 그림 5에서 T=8khz라는 것은 샘플링 속도가 8khz라는 것으로 실제 샘플링 시간 간격 T=0.000125[sec]라는 것을 의미한다. 샘플링 시간 T에 따른 외란 제거 특성은 기준 3에서 제시한 것처럼 외란들이 주로 존재하는 저주파 영역에서 거의 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있다.

2. 측정 잡음 영향

그림 6은 이산시간 외란 관측기의 센서에서 제어입력에 이르는 전달 함수의 크기를 나타낸 그림이다. 기준4에서 제시된 바와 같이 Q-필터의 상대 차수가 작을수록 측정 잡음의 증폭량이 커져서 시스템에 좋지 않은 영향을 준다는 것을 알 수 있다. 그리고 상대 차수가 같은 조건에서는 분모 차수가 작을수록 측정 잡음의 증폭량이 작아진다는 것을 또한 알 수 있다.

그림 7은 Q-필터 시 상수에 따른 측정 잡음의 영향을 나타낸 것이다. 기준 5에서 제시한 바와 같이 시 상수가 작을

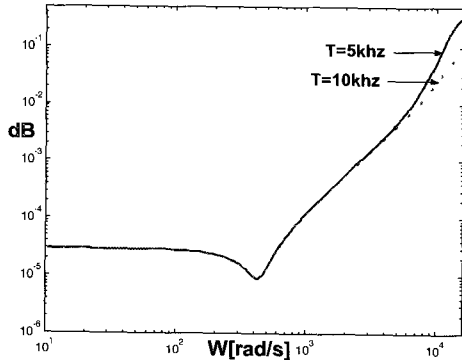


그림 8. 샘플링 속도에 따른 측정 잡음 영향.  
Fig. 8. Sensor noise effect according to sampling times of Q-filter.

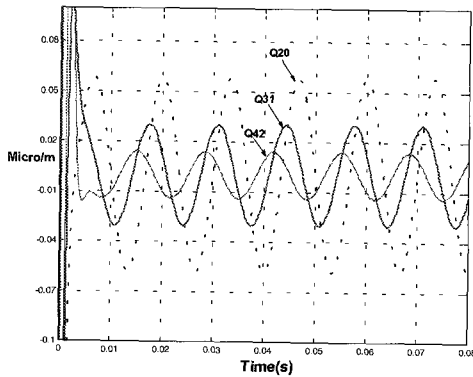


그림 9. Q-필터 차수에 따른 외란 제거 성능 모의 실험.  
Fig. 9. Simulation results according to orders of Q-filter.

수축 잡음의 증폭량이 커짐을 알 수 있다.

그림 8은 샘플링 속도에 따른 측정 잡음의 영향을 나타낸 그림이다. 그림 8에서 T=5kHz라는 것은 샘플링 속도가 5kHz라는 것으로 샘플링 시간 간격 T=0.0002 sec라는 것을 나타낸다. 기준 6에서 제시한 것처럼 샘플링 속도가 느릴수록 고주파에서 잡음이 더 크게 증폭된다는 것을 알 수 있다.

3. 모의 실험

외란 관측기의 성능을 알아보기 위해서 MATLAB을 이용하여 컴퓨터 모의실험을 수행하였다. Q 필터는 성능분석에서 처럼 Binomial 필터를 사용하였으며 Bilinear 변환을 이용하여 이산화하였다.

그림 9는 Q 필터 차수에 따른 외란 제거 성능에 대한 모의실험 결과이다. 모의실험 속에서는 모두 같은 주파수, 같은 크기의 정현파 형태의 외란을 강제로 인가하여서 본 논문에서 제시된 설계 기준의 타당성을 검증하고자 하였다. 기준 1에서 제시한 것처럼 분자차수가 증가할수록 외란 제거 성능이 우수함을 알 수 있다.

그림 10은 Q 필터 시 상수에 따른 외란 제거 성능에 대한 모의실험 결과이다. 역시 기준 2에서 제시한 것처럼 시 상수 값이 작아질수록 외란 제거 성능이 우수함을 알 수 있다. 사실, 위의 모의실험에서 외란 제거 성능에 관한 기준2의 타당성을 보이기 위해서 측정 잡음은 포함되지 않았다. 만약에 측

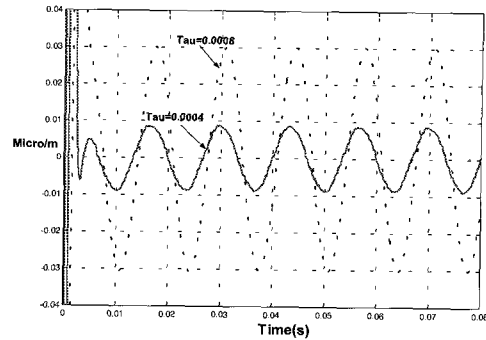


그림 10. Q필터 시 상수에 따른 외란 제거 성능 모의 실험.  
Fig. 10. Simulation results according to time constants of Q-filter.

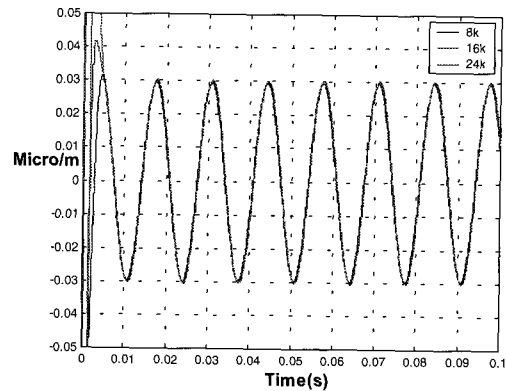


그림 11. 샘플링 속도에 따른 외란 제거 성능 모의 실험.  
Fig. 11. Simulation results according to sampling times of Q-filter.

정 잡음의 영향을 넣었다면, 기준 5에 의해서 필터 시 상수의 값이 작아질수록 잡음의 영향은 커지기 때문에, 실제로 필터 시 상수를 결정할 때에는 기준 2와 기준 5를 동시에 고려하여야 한다.

그림 11은 샘플링 속도에 따른 외란 제거 성능에 대한 모의실험 결과이다. 기준 3에서 제시한 것처럼 외란 제거 성능이 샘플링 시간과 무관하게 거의 동일함을 알 수 있다.

VI. 실험 결과

실험은 모의실험과 동일한 시스템인 삼성 12배속 DVD 트랙 추종 구동 시스템을 대상으로 실시하였으며 이산시간 외란 관측기의 특성 분석을 위한 실험은 크게 3가지로 나누어 수행되었다.

첫째, Q 필터의 차수에 따른 외란 제거 성능을 살펴보기 위해 Q<sub>20</sub>, Q<sub>31</sub>, Q<sub>42</sub> 를 사용하여 각각 실험을 수행하였다. (그림12)

둘째, 샘플링 시간에 따른 외란 제거 성능을 살펴보기 위해 강제로 인가된 60Hz의 입력 외란에 대해 샘플링 속도를 8kHz, 16kHz, 24kHz로 나누어 실험을 실시하였다. (그림13)

셋째, 샘플링 시간에 따른 측정 잡음의 영향을 살펴보기 위해서 샘플링 속도를 8kHz, 16kHz, 24kHz로 나누고, 작은 값의 필터 시 상수  $\tau$ 를 적용하여 실험을 수행하였다. (그림14) 여기서, 작은 값의 필터 시 상수  $\tau$ 를 적용한다는 것은 시스

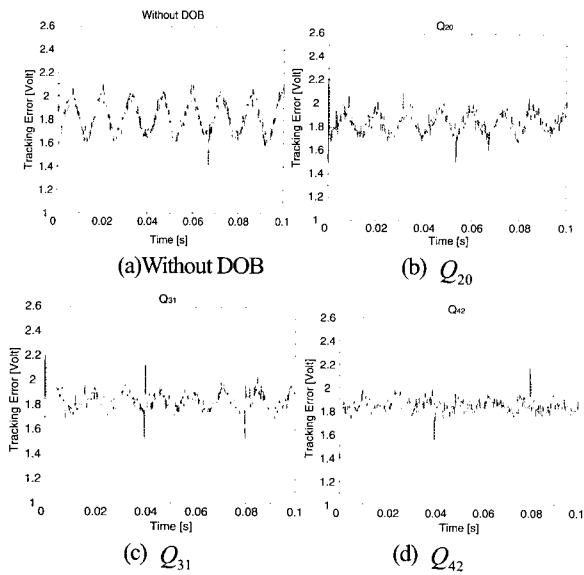


그림 12. Q-필터의 차수에 따른 외란 제거 성능 실험.

Fig. 12. Experimental results according to orders of Q-filter.

표 3. Q-필터의 차수에 따른 오차의  $L_2$ -Norm.

Table 3. The  $L_2$  norm of errors according to the filter orders

Q(s) 필터	W/O DOB	$Q_{20}$	$Q_{31}$	$Q_{42}$
$L_2$ Norm	0.06656	0.05192	0.03826	0.03111

템에 동일한 측정 잡음이 더욱 크게 증폭된다는 것을 의미한다. (기준 5에서 보면  $\tau$  값이 작을수록 측정 잡음의 증폭량이 커지기 때문이다.)

그림 12는 Q 필터의 차수를 달리해서 실험을 했을 때의 실험 결과이다. 기준 1에서 제시한 것처럼 필터의 분자 차수가 증가할수록 외란 제거 성능이 향상됨을 알 수 있다. 실험 대상으로 삼은 삼성 DVD는 오차에 상응하는 값이 1.81volt를 기준으로 하여 표시된다.

다시 말해서 그림 12에서 황축은 오차를 Voltage로 표현하고 있는데 1.81volt를 기준으로 하여 벗어나는 부분이 오차에 해당된다. 표 3은 Q 필터의 차수에 따른 실험 결과들의 평균 값을 보기 위해 오차의  $L_2$ -Norm을 정리한 것이다. 이것 또한 역시 기준 1을 따르고 있음을 알 수 있다.

그림 13은 샘플링 속도를 8kHz, 16kHz, 24kHz로 나누고, Q 필터의 시 상수  $\tau = 0.00053$  으로 설정하여 실험을 수행했을 때의 결과이다. 기준 3에서 제시한 것처럼 저주파 외란 (60Hz)에 대해서 샘플링 속도가 8kHz, 16kHz, 24kHz와 같이 빨라지더라도 외란 제거 성능은 거의 동일함을 알 수 있다.

표 4에는 샘플링 속도에 따른 두 번째 실험 결과들  $L_2$ -Norm의 크기를 정리한 것이다. 역시 기준 3에서 제시한 것처럼 외란 제거 성능이 거의 동일함을 알 수 있다.

그림 14는 샘플링 속도를 8kHz, 16kHz, 24kHz로 나누고, 필터 시 상수  $\tau = 0.00013$  으로 작게 설정하여 실험을 수행했을

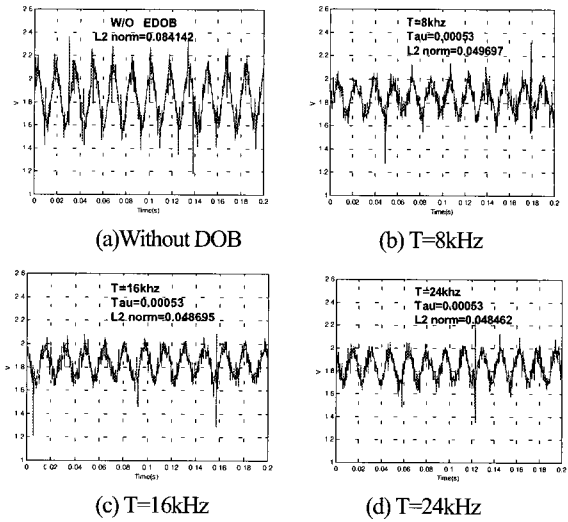


그림 13. 샘플링 속도에 따른 외란 제거 성능 실험.

(외란: 60Hz,  $\tau = 0.00053$ )

Fig. 13. Experimental results according to sampling times of Q-filter.

표 4. 샘플링 속도에 따른 오차의  $L_2$ -Norm.

Table 4. The  $L_2$  norm of errors according to the sampling times

샘플링 속도	8kHz	16kHz	24kHz
$L_2$ Norm	0.049697	0.048695	0.048462

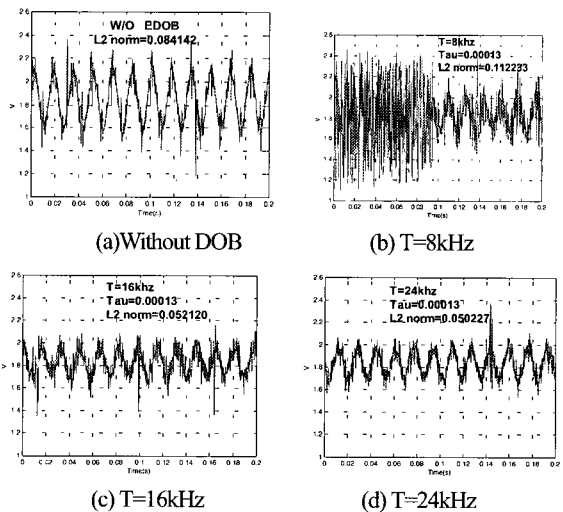


그림 14. 샘플링 속도에 따른 측정 잡음 성능 실험.

(외란: 60Hz,  $\tau = 0.00013$ )

Fig. 14. Experimental results according to sampling times of Q-filter.

때의 결과이다. 필터 시 상수 값을 위의 두 번째 실험 ( $\tau = 0.00053$ )보다 1/4로 줄여서 실험을 수행하였을 경우, 시스템에서 측정되는 잡음은 더욱 증폭되게 되는데, 샘플링 속도가 8kHz인 경우에 시스템이 발산하지만 샘플링 시간 간격을 줄이면(속도를 높이면: 16kHz, 24kHz) 측정 잡음의 증폭량이 상대적으로 작아지기 때문에 시스템은 발산하지 않음



표 5. 샘플링 속도에 따른 측정 잡음 영향.

Table 5. The measurement noise effect according to the sampling times

샘플링 속도	8kHz	16kHz	24kHz
$L_2$ Norm	0.112233	0.052120	0.050227

을 알 수 있다. 즉, 기준6에서 제시한 것처럼 측정 잡음은 샘플링 속도가 느릴수록 시스템에 좋지 않은 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

표 5는 세 번째 실험 결과를  $L_2$ -Norm으로 정리한 것이다. 역시 기준 6에서 제시한 것처럼 샘플링 속도가 느릴수록 시스템에 좋지 않은 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

**VII. 결론**

본 논문에서는 연속시간 외란 관측기를 Bilinear 변환을 통해 이산화한 후 이산시간 외란 관측기가 가지는 특성을 저주파 통과 필터인 Q 필터의 특성에 따라 알아보았다. 특히 샘플링 시간 간격 T가 외란 제거 성능과 측정 잡음에 미치는 영향을 정량적으로 분석하여 이산시간 외란 관측기의 설계 기준 6개를 제시하였다. 그리고 이 기준들의 타당성을 삼성 12배속DVD의 트랙 추종 제어에 대한 모의 실험과 실제 적용 실험으로 확인하였다.

**참고문헌**

[1] K. Yang, Y. Choi, W. K. Chung, I. H. Suh and S. R. Oh, "Robust tracking control of optical disk drive systems using error-based disturbance observer and its performance measure", *Proc. Of the American Control Conference*, pp. 1395-1400, 2002.

[2] T. Umeno and Y. Hori, "Robust speed control of DC servomotors using modern two degrees-of-Freedom controller design", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 8, no. 5, pp. 363-368, 1991.

[3] S. Komada, N. Machii and T. Hori, "Control of redundant manipulators considering order of disturbance observer", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 47, pp. 413-420, 2000.

[4] K. Yamada S. Komada, M. Ishida and T. Hori, "Characteristics of servo system using high order disturbance observer", *IEEE Int. Conf. of Decision and Control*, pp. 3252-3257, 1996.

[5] T. Umeno, T. Kaneko and Y. Hori, "Robust servosystem design with two degrees of freedom and its application to novel motion control of robust manipulators", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 5, pp. 473-485, 1993.

[6] M. T. White, M. Tomizuka and C. Smith, "Improved track following in magnetic disk drives using a disturbance observer", *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 5, no. 1, pp. 3-11, 2000.

[7] C. J. Kempf and S. Kobayashi, "Disturbance observer and feedforward design for a high-speed direct positioning table", *IEEE Trans. on Control System Technology*, vol. 7, no. 5, pp. 513-526, 1999.

[8] K. Fujiyama, M. Tomizuka and R. Katayama, "Digital tracking controller design for CD player using disturbance observer", *Proc. Int. Workshop on Advanced Motion Control*, pp. 598-603, 1998.

[9] K. Fujiyama, R. Katayama, T. Hamaguchi and K. Kawakami, "Digital controller design for recordable optical disk player using disturbance observer", *Proc. Int. Workshop on Advanced Motion Control*, pp. 141-146, 2000.

[10] A. Tesfaye, H. S. Lee and M. Tomizuka, "A sensitivity optimization approach to design of a disturbance observer in digital motion control systems", *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 5, no. 1, pp. 32-38, 2000.

[11] 최영진, 양광진, 정완균, 김홍록, 서일홍, "강인성과 제어 성능을 고려한 외란 관측기의 설계 (1) : 2차 시스템에 대한 이론적 해석", *제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지*, vol. 8, no.8, pp. 655-664, 2002.

[12] Y. Choi, K. Yang, W. K. Chung, H. R. Kim and I. H. Suh, "On the robustness and performance of disturbance observer for second-order systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, no. 2, Feb., pp. 315-320, 2003.

[13] M. Green and D. J. N. Limebeer, *Linear Robust Control* Prentice Hall, 1995.



**양 광 진**

1973년 9월 9일생. 1996년 공군사관학교 기계공학과 졸업(학사). 2002년 포항공과대학교 대학원 기계공학과 졸업(석사). 현재 공군사관학교 기계공학과 교관 재직중. 관심분야는 강인제어, 외란 관측기, 이산 제어.



**최 영 진**

1970년 5월 12일생. 1994년 한양대학교 정밀기계공학과 졸업(학사). 1996년 포항공과대학교 대학원 기계공학과 졸업(석사). 2002년 동 대학원 기계공학과 졸업(박사). 현재 한국과학기술연구원(KIST) 지능로봇연구센터 박사 후

연구원. 관심분야는 Humanoid Robot Walking, 선형/비선형 강인 제어, 자동조정 PID제어, 디스크 구동 시스템의 제어.

**정 완 균**

1959년 2월 24일생. 1981년 서울대학교 기계설계학과 졸업(학사). 1983년 한국과학기술원 기계공학과 졸업(석사). 1987년 동 대학원 생산공학과 졸업(박사). 현재 포항공과대학교 기계공학과 교수. 관심분야는 여유자유도 로봇의 제어와 로봇의 힘 제어 및 원격 제어.