

고유치 이론을 이용한 선형 시변 시스템의 해석 및 제어기 설계 기법

Spectral Theory-Based Analysis and Control Design for Linear Time-Varying Systems

최재원, 이호철

부산대학교 기계공학부

1. 서론

대부분의 실제 시스템은 시변 특성을 지니고 있으므로 최근 경향은 시스템을 분석하거나 제어기를 설계할 때 제어 성능 향상을 위하여 시변 요소를 포함하는 쪽으로 많은 연구가 진행되고 있다. 예를 들면, 비행체의 비행제어 연구시 대상 비행체의 운동방정식은 비행 속도에 관계된 계수를 포함하고 있다. 과거에는 속도를 일정한 것으로 고려하여 선형 미분방정식의 계수를 상수로 고려하여 그 해를 구하곤 하였다. 아음속 항공기에 의해 구현되는 상대적으로 작은 가속을 가지는 비행에서 그러한 가정은 만족할 만한 결과를 얻기에 적절한 것이었지만, 현대의 초음속 항공기나 미사일 등에 의해 구현되고 있는 급격한 가속도나 속도의 증감은 기존의 선형 시불변 시스템 모델로서는 수용할 수 없는 경우가 생기게 되었다. 또한, 급격한 연료 소비는 비행체의 질량, 무게 중심, 관성 모멘트 등을 제어 동작 중에 상당한 정도로 변하게 한다. 결국 항공기 또는 미사일 등의 비행 제어시스템 설계 및 해석을 위한 최근 경향은 이러한 시변 파라미터를 고려하여 설계하는 쪽으로 많은 연구가 진행되고 있다.

한편, 선형 시불변 시스템의 경우는 해석적인 해, 안정도 판별, 주파수역 해석, 안정한 제어기 설계 기법 등을 쉽게 수행할 수 있는 고유치 이론이 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 또한 시불변 고유치 이론은 시변 시스템에 직접 적용될 수 없다는 사실도 잘 알려져 있다. 따라서 선형 시불변 시스템을 위한 고유치의 개념을 선형 시변 시스템에까지 확장해 보려는 시도가 수 년 동안 많은 연구자들에게 위하여 있어 왔다. 그 동안 몇 가지 주목할 만한 연구 성과들이 있었는데, 그 중에서 대표적인 것으로 판단되는 SD-고유치, PD-고유치 개념을 본 논문에서 도입하고 이를 이용한 선형 시변 시스템의 새로운 해석 및 제어기 설계 기법을 기술한다.

2. 선형 시변 시스템의 고유치

다음 식과 같이 주어지는 N 차 스칼라 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$\begin{aligned} y^{(N)}(t) + \alpha_N(t)y^{(N-1)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)y(t) &= 0 \\ y^{(k)}(t_0) = y_{k0}; k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1)$$

(1)로 표현되는 선형 시변 시스템은 다음과 같은 스칼라 미분 다항식 연산자(SPDO: Scalar Polynomial Differential Operator)를 이용하여 $D_n(y)=0$ 의 형태로 표현될 수 있다.

$$D_n = \delta^{(N)} + \alpha_N(t)\delta^{(N-1)} + \cdots + \alpha_2(t)\delta + \alpha_1(t) \quad (2)$$

여기서 $\delta = \frac{d}{dt}$ 는 미분 연산자이다. 선형 시변 시스템 (1)에 대한 연구는 제어, 신호처리, 동적 시스템 이론에서 매우 중요하다. 이것은 많은 동적 시스템이 (1)과 같이 선형 미분 방정식으로 모델링될 뿐만 아니라 비선형 동적 시스템도 선형화 함으로써 효과적으로 다루어질 수 있기 때문이다. 최근에 다음 (3)과 같은 SPDO의 인수 분해에 관한 플로켓(Floquet) 결과에 기반을 둔 선형 시변 시스템 (2)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론이 개발되었다.

$$D_n = (\delta - \lambda_N(t)) \cdots (\delta - \lambda_2(t))(\delta - \lambda_1(t)) \quad (3)$$

본 장에서는 선형 시변 시스템의 고유치 개념을 도입하기 위하여, 선형 시변 미분 방정식 (2)에 대한 고전적인 결과와 (2)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론에 관한 새로운 결과들을 간단히 살펴본다. (3)의 미분 인수분해 연산자에 관한 플로켓의 고전적인 결과를 이용하여 미분 대수 고유치 개념에 대한 기본 용어를 다음과 같이 요약한다[1,2].

• 정의 1.

(a) D_n 를 $\alpha_k(t)(k=1, 2, \dots, N)$ 을 가지고 있는 SPDO라 하자. 그러면 (3)의 인수분해에 의해서 주어지는 스칼라 함수 $\lambda_k(t)(k=1, 2, \dots, N)$ 를 D_n 의 SD-고유치(Serial Differential-eigenvalue)라 명명한다. 그러면 SD-스펙트럼은 $\lambda_k(t) = \frac{d}{dt} \log [v_1(t)v_2(t) \cdots v_k(t)]$ 와 같이 주어지고 (2)의 해 $y(t)$ 와의 관계는 $y(t) = v_1(t) \cdot \int v_2(t) \int \cdots \int v_k(t) d^{N-1}t$ 와 같다. 또한, $\rho_1(t) = \lambda_1(t)$,

$q_k(t) = \int_{\phi_{21}(t)}^{\phi_{32}(t)} \int_{\phi_{32}(t)}^{\phi_{k,k-1}(t)} \cdots \int_{\phi_{k,k-1}(t)}^{\phi_{k,k-1}(t)} d^{k-1}t, \phi_{ij}(t)$
 $= e^{\int(\lambda_i(t) - \lambda_j(t))dt}$ 를 D_k 의 PD-고유치(Parallel Differential-eigenvalue)라 명명한다.

(b) $\lambda_k(t)$ 가 (3)을 만족한다면, 집합 $\Gamma_a = \{\lambda_k(t)\}_{k=1}^N$ 을 D_a 에 대한 SD-스펙트럼(SD-spectrum)이라 명명한다.

(c) $\rho_k(t)$ 가 PD-고유치이고 $y_k(t) = \exp(\int \rho_k(t) dt)$ 가 $D_a(y)=0$ 의 해라면 집합 $\Upsilon_a = \{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 D_a 에 대한 PD-스펙트럼(PD-spectrum)이라 명명한다.

(d) $A_c(t)$ 를 D_a 에 대응되는 다음과 같은 형태를 갖는 동반행렬이라 하자.

$$A_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & \cdots & -\alpha_N(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

그러면, 다음의 행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 SD-스펙트럼 표준형이라 부른다.

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$= SS[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]$$

그리고 다음과 같이 주어지는 대각행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 PD-스펙트럼 표준형이라 부른다.

$$\Upsilon(t) = \text{diag}[\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)] \quad (6)$$

(e) D_a 를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 가지고 있는 N차 SPDO라 하고, $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 는 $y(t) = \exp(\int \rho_i(t) dt)$ 인 $D_a(y)=0$ 의 해라 하자. 다음 행렬을 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이라 한다.

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & \cdots & y_N(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_N'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(N-1)}(t) & \cdots & y_N^{(N-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

그리고, $D(t)$ 는 다음의 대각행렬을 나타낸다.

$$D(t) = \text{diag}[y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)] \quad (8)$$

그리면 다음의 관계가 성립한다.

$$W(t) D^{-1}(t) = P(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t))$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ D_{\rho_1}[1] & \cdots & D_{\rho_N}[1] \\ D_{\rho_1}^2[1] & \cdots & D_{\rho_N}^2[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{\rho_1}^{N-1}[1] & \cdots & D_{\rho_N}^{N-1}[1] \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, $D_\rho = (\delta + \rho_i(t))$, $D_\rho^k = D_\rho D_\rho^{k-1}$ 이고, $W(t) = W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))$ 는 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 의 Wronskian 행렬이다. 표준 좌표변환 행렬 $P(t)$ 는 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 에 대응되는 D_a 에 대한 모드 표준 행렬(modal canonical matrix)이라고 불린다. $P(t)$ 의 열 벡터 $p_i(t)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$A_c(t)p_i(t) - \rho_i(t)p_i(t) = \dot{p}_i(t) \quad (10)$$

그리고 $Q(t) = P^{-1}(t)$ 의 행 벡터 $q_i^T(t)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$q_i^T(t) A_c(t) - \rho_i(t) q_i^T(t) = -\dot{q}_i^T(t) \quad (11)$$

따라서, $p_i(t)$ 와 $q_i^T(t)$ 를 각각 PD-고유치 $\rho_i(t)$ 에 대응되는 $A_c(t)$ 와 D_a 의 우 PD-고유벡터(right PD-eigenvector) 및 좌 PD-고유벡터(left PD-eigenvector)라고 정의한다.

• 예제 1.

다음과 같이 주어지는 시스템을 고려하자[3].

$$\ddot{y}(t) + (3 + 4t^{-1})\dot{y}(t) + (2 + 6t^{-1} + 2t^{-2})y(t) = 0$$

위 식의 해는 $y_1(t) = t^{-2}e^{-t}$, $y_2(t) = -t^{-2}e^{-2t}$ 로 주어진다. SD-고유치 및 PD-고유치를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = \rho_1(t) = -2t^{-1} - 1 \\ \lambda_2(t) &= \frac{\dot{y}_2(t)}{y_2(t)} + \frac{\dot{v}_2(t)}{v_2(t)} \\ &= \frac{(-2t^{-3} - t^{-2})e^{-t}}{t^{-2}e^{-2t}} + \frac{(-1)e^{-t}}{e^{-t}} \\ &= -2t^{-1} - 2 \end{aligned}$$

그리고,

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \lambda_1(t) = -2t^{-1} - 1 \\ \rho_2(t) &= \lambda_2(t) + \frac{\dot{q}_2(t)}{q_2(t)} = -2t^{-1} - 1 + \frac{(-1)e^{-t}}{e^{-t}} \\ &= -2t^{-1} - 2 \end{aligned}$$

위의 PD-고유치를 이용하여 우 PD-고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2t^{-1}-1 & -2t^{-1}-2 \end{bmatrix}$$

3. 선형 시변 시스템의 해석 기법

3.1. 선형 시변 상태공간 방정식 해의 모드 분해

다음과 같이 표현되는 선형 시변 상태공간 방정식을 상정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (12)$$

(12)의 해는 다음과 같이 주어진다[3].

$$\begin{aligned} x(t) &= W(t)W^{-1}(t_0)x_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^t (t)W^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) &= C(t)W(t)W^{-1}(t_0)x_0 + \\ &\quad + C(t)\int_{t_0}^t W(t)W^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $W(t)$ 는 Wronskian 행렬이다. (13)은 다음의 관계에 의해서 모드 표현으로 표현된다[4].

$$W(t)W^{-1}(t_0) = P(t)X(t,t_0)Q^T(t_0) \quad (14)$$

여기서 $P(t) = [p_1(t), \dots, p_N(t)]$, $Q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]$ 이고 $p_k(t)$ 와 $q_i(t)$ 는 각각 우 PD-고유벡터, 좌 PD-고유벡터이다. 그리고 $X(t,t_0) = \text{diag} \left[e^{\int_{t_0}^t \rho_1(\tau)d\tau}, e^{\int_{t_0}^t \rho_2(\tau)d\tau}, \dots, e^{\int_{t_0}^t \rho_N(\tau)d\tau} \right]$ 이다. 따라서 각 상태의 초기값을 0으로 두고, (13)을 모드 표현으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t P(t)X(t,\tau)Q(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m p_i(t) \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^\tau \rho_i(\tau)d\tau} q_i^T(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N c_k(t)p_i(t) \cdot \\ &\quad \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^\tau \rho_i(\tau)d\tau} q_i^T(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 N, m, l 은 각각 시스템 행렬, 입력 행렬 및 출력 행렬의 차원을 나타낸다.

3.2. 안정도 판별법

선형 시불변 시스템에서는 시스템의 모든 고유치의 실수 부가 음수이면 준 시스템은 안정하다는 사실은 잘 알려져 있고, 이 이론은 직접적으로 선형 시변 시스템에 적용하여 안정도를 판별할 수 없다는 사실 또한 잘 알려져 있다. 따라서 다음의 정리 1에서 PD-스펙트럼을 이용한 새로운 선형 시변 시스템의 안정도 판별법을 소개한다[4]. PD-스펙트럼을 이용하여 안정도 판별을 위해서는 다음 정의 2와 같은 확장-평균(EM:Extended-Mean) 개념이 필요하다.

• 정의 2.

구간 $I = [t_0, \infty]$ 상에서 $\sigma(t): I \rightarrow R$ 를 적분 가능한 함수라고 하면, 함수 $\sigma(t)$ 의 확장-평균 EM을 다음과 같이 정의한다.

$$EM(\sigma(t)) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma(t) dt \quad (16)$$

• 정리 1.

(2)와 같은 스칼라 미분 다항식 연산자가 잘 정의된 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^N$ 로 구성되고 $p_i(t)$ 와 $q_i^T(t)$ 가 각각 $\rho_i(t)$ 에 대응하는 우 및 좌 PD-고유벡터라고 하면, 다음 두 조건을 만족하는 PD-스펙트럼과 우 및 좌 PD-고유벡터로 구성된 선형 시변 시스템 $D_r \{y(t)\} = 0$ 의 해는 점근적으로 안정하다.

(i) $0 < c_i \leq \infty$ 상수가 존재하고 다음 식을 만족한다.

$$EM(Re\rho_i(t)) = -c_i < 0 \quad (17)$$

(ii) 상수 $h_i > 0$ 와 $0 < d_i < c_i$ 가 존재하고 다음 식을 만족 한다.

$$\|p_i(t)q_i(t_0)\| < h_i e^{d_i(t-t_0)} \quad (18)$$

• 예제 2.

정리 1의 확장-평균 정리를 이용하여 안정도 판별을 위해서 다음과 같은 선형 시변 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) \end{bmatrix} x(t)$$

여기서 $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\alpha_1(t) = \frac{-6 \cos t - 3 \cos^2 t + 24 + 6 \sin t}{4 + 2 \cos t}$$

$$\alpha_2(t) = \frac{39 + 16 \cos t - \cos 2t + 4 \sin t}{8 + 4 \cos t}$$

준 시스템의 상태 천이 행렬(state transition matrix)을 모드 분해하면 다음과 같다.

$$\Phi(t, 0) = P(t) X(t, 0) Q^T(0) x(0)$$

여기서 $P(t)$, $X(t, 0)$, $Q^T(0)$ 은 각각 다음과 같다.

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 + \frac{\cos t}{2} & -3 \end{bmatrix},$$

$$X(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{\int_0^t (-2 + \frac{\cos \tau}{2}) d\tau} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^t -3 d\tau} \end{bmatrix},$$

$$Q^T(0) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

준 시스템을 확장-평균 정리에 적용하면 다음과 같다.

$$\|\Phi(t, 0)\| \leq 33e^{-2t} + 4e^{-3t} \leq 132e^{-2t}$$

따라서 준 시스템은 점근적 안정함을 알 수 있다.

3.3. 가제어성 및 가관측성 판별법

선형 시불변 시스템에 대해서는 좌/우 고유벡터 및 입/출력 벡터를 이용하여 시스템의 가제어성/가관측성을 판별하는 PBH 고유벡터 판별법이 있다. 마찬가지로 선형 시변 시스템에 대해서도 PD-고유벡터를 이용하여 PBH 고유벡터 판별법 형태의 가제어성/가관측성 판별법을 다음 정리 2와 같이 유도할 수 있다.

• 정리 2.

(12)와 같은 선형 시변 시스템이 다음의 조건을 만족하는 시스템 행렬 $A(t)$ 의 좌 PD-고유벡터 $q(t)$ 가 존재하면 시각 t_1 에서 제어 불가능하다.

$$\gamma(t_1) = q^T(t_1) B(t_1), \dot{\gamma}(t_1) = 0 \quad (19)$$

또한, 다음의 조건을 만족하는 시스템 행렬 $A(t)$ 의 우 PD-고유벡터 $p(t)$ 가 존재하면 시각 t_1 에서 관측 불가능하다.

$$\eta(t_1) = C(t_1) p(t_1) = 0, \quad \dot{\eta}(t_1) = 0 \quad (20)$$

• 예제 3.

정리 2를 이용하여 가제어성을 판별하기 위하여 다음과 같은 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 + \frac{7}{2}t - t^2 & \frac{7}{2} - 2t \\ -t - 1 & -1 \\ t^2 - 2 & -3t - 2 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

준 시스템의 좌 PD-고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$[q_1(t) \ q_2(t)]^T = \begin{bmatrix} 4 & -2t & -2 \\ -3t & +2t & 2 \end{bmatrix}$$

정리 2에 적용하면 다음과 같이 정리 2를 만족하는 t_1 이 존재하지 않으므로 준 시스템은 제어가능하다.

$$\gamma_1(t) = q_1^T(t) B(t) = 6t \\ \dot{\gamma}_1(t) = 6 \\ \gamma_2(t) = q_2^T(t) B(t) = -7t - 2 \\ \dot{\gamma}_2(t) = -7$$

3.4. 가제어성/가관측성 척도

앞절에서 기술한 가제어성/가관측성 판정법은 주어진 시스템의 가제어성/가관측성 여부를 “예/아니오”的 2진 정보 형태로만 제공하고, 그 시스템의 가제어성/가관측성 정도에 대한 척도는 제공하지 못한다. 예를 들면, 유연빔의 진동 모드(mode)를 제어하고자 할 때 그 모드의 마디(node)에 정확하게 위치한 구동기를 가지고는 그 전동 모드를 제어할 수 있지만, 그 마디에서 조금 떨어진 곳에 구동기를 설치하면 효과적으로 그 전동 모드를 제어할 수 있게 된다. 센서의 경우도 마찬가지로 이해할 수 있다. 따라서 가제어성/가관측성의 정도를 정량적으로 나타내는 척도가 필요하고, 이것은 효과적인 제어기/센서를 구성할 때나 구동기/센서의 최적 위치를 선정할 때 중요한 정보를 제공한다. 선형 시변 시스템에 대한 가제어성/가관측성 정도를 다음의 정의와 같이 제시한다(5,6). 여기에서 각 모드가 각 입력에 의한 제어 가능한 정도를 모드 가제어성(modal controllability) 이라 하고, 각 출력에서 각 모드가 관측 가능한 정도를 모드 가관측성(modal observability)이라 정의한다.

• 정의 2.

j 번째 입력에 의한 i 번째 모드의 가제어성 척도를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_{ij}(t) = \frac{\int_{t_0}^{t_1} (\cos \theta_{ij}(t)) \|b_j(t)\| dt}{t_1 - t_0} \\ = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|q_i^T(t) b_j(t)|}{\|q_i(t)\|} dt \\ (i=1, \dots, N ; j=1, \dots, m)$$

여기서 $b_j(t)$ 는 $B(t)$ 에서 j 번째 입력에 해당하는 열벡터, $q_i^T(t)$ 는 i 번째 모드 $\rho_i(t)$ 에 대응되는 좌 PD-고유벡터이다.

• 정의 3.

k 번째 출력에서 i 번째 모드의 가관측성 척도는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \nu_{ki}(t) &= \frac{\int_{t_0}^{t_1} (\cos \phi_{ki}(t)) \|c_k(t)\| dt}{t_1 - t_0} \\ &= \frac{\int_{t_0}^{t_1} (\cos \phi_{ki}(t)) \|c_k(t)\| dt}{t_1 - t_0} \quad (22) \\ &\quad (i=1, \dots, N; k=1, \dots, l) \end{aligned}$$

여기서 $c_k(t)$ 는 $C(t)$ 에서 k 번째 출력에 해당하는 행벡터, $p_i(t)$ 는 i 번째 모드 $\rho_i(t)$ 에 대응되는 우 PD-고유벡터이다.

• 예제 4.

예제 3의 선형 시변 시스템에서 출력 행렬 $C(t)$ 를 단위 행렬이라 두자. 준 시스템의 우 PD-고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$[p_1(t) \ p_2(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} - t & 2 - t \end{bmatrix}$$

정의 4를 이용하여 각 출력에서 각 모드의 가관측성 척도를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nu_{11}(t) &= \frac{\int_0^t (1/\sqrt{1+(\frac{3}{2}-t)^2}) dt}{t} \\ \nu_{12}(t) &= \frac{\int_0^t (1/\sqrt{1+(2-t)^2}) dt}{t} \\ \nu_{21}(t) &= \frac{\int_0^t (|\frac{3}{2}-t|/\sqrt{1+(\frac{3}{2}-t)^2}) dt}{t} \\ \nu_{22}(t) &= \frac{\int_0^t (|2-t|/\sqrt{1+(2-t)^2}) dt}{t} \end{aligned}$$

위에서 구한 가관측성 척도의 시간 추이를 다음 그림 1에 나타내었다. 그림 1을 살펴보면 준 시스템의 첫 번째 출력에서는 각 모드의 가관측성 척도가 감소하는 것을, 두 번째 출력에서는 각 모드의 가관측성 척도가 증가하는 것을 알 수 있다.

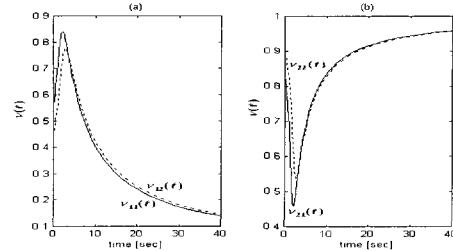


그림 1. 모드 가관측성 척도의 시간 추이

4. 선형 시변 시스템의 제어기 설계 기법

4.1. 고유치 지정 기법

고유치 지정 기법은 안정화 제어기 설계, 최적화 문제 등에 적용되므로 제어기 설계 문제에서는 대단히 중요한 역할을 한다. 본 절에서는 선형 시불변 시스템의 고유치 지정 방법 중 하나인 Ackermann 공식을 선형 시변 시스템의 경우에도 적용 가능한 일반화된 형태의 Ackermann형 공식에 대하여 기술한다.

먼저 Ackermann 형 공식을 사용하기 위해서는 (2)의 시변 미분 방정식 계수 $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^V$ 와 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^V$ 와의 관계가 필요한데 이것은 다음의 보조정리 1에 나타나 있고, 요구되는 PD-고유치들을 가지는 페루프 시스템의 미분 방정식 계수 결정에 사용된다.

• 보조정리 1.

선형 시변 시스템이 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^V$ 으로 구성된다면, 선형 시변 미분 방정식의 계수 $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^V$ 는 다음 공식에 의해서 구할 수 있다.

$$\alpha_i(t) = \frac{\tilde{p}_{i,N+1}}{\det P(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t))} \quad (23)$$

여기서 $P(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t))$ 는 (9)에서 정의된 모드 표준 행렬이고, $\tilde{p}_{i,N+1}(t)$ 는 다음 (24)에서 정의되는 행렬 $P_{N+1}(t)$ 에서 $p_{i,N+1}(t)$ 의 여인자(cofactor)를 나타낸다.

$$\begin{aligned} P_{N+1}(t) &= [\ p_{ij}(t)] \\ &= \begin{bmatrix} & P_{\backslash i}(t) & \frac{1}{D_{\rho_i}\{1\}} \\ D_{\rho_1}\{1\} & \cdots & D_{\rho_{N-1}}\{1\} & D_{\rho_N}\{1\} \end{bmatrix} \quad (24) \end{aligned}$$

단일 입출력 선형 시변 시스템의 고유치 지정을 위한 Ackermann형 공식을 기술하기 위해 먼저 다음 식과 같은 단일 입출력 선형 시스템을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) \quad (25)$$

여기서 $x(t) \in R^{N \times 1}$, $u(t)$ 는 각각 상태 벡터와 스칼라 입력이고, 준 시스템은 제어 가능하여 상태 되먹임에 의해 안정화시킬 수 있다고 하자. 그러면 선형 시변 시스템의 PD-고유치 임의로 지정할 수 있는 다음의 알고리즘을 구성할 수 있다[7,8].

• 알고리즘

- 단계 1 : 다음과 같은 가제어성 행렬을 구성한다.

$$C(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \cdots \xi_N(t)]$$

여기서 $\xi_{i+1}(t) = A(t)\xi_i(t) - \frac{d}{dt}\xi_i(t)$, $\xi_1(t) = b(t)$ 이다. 준 시스템이 제어 가능하다면 다음 식과 같은 가제어성 행렬의 역행렬 $C^{-1}(t)$ 가 존재한다.

$$C^{-1}(t)C(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N-1}(t) \\ \tilde{C}_{N-2}(t) \\ \vdots \\ \tilde{C}_0(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi_1(t) & \xi_2(t) & \cdots & \xi_N(t) \end{bmatrix} = I$$

여기서 $\tilde{C}_i(t)$ 는 $C^{-1}(t)$ 의 행 벡터이다.

- 단계 2 : $\hat{C}_0(t) = \tilde{C}_0(t)$ 라 두고, 각 $p=1, \dots, N$ 에 대하여 $\hat{C}_p(t)$ 를 다음 식에 의해서 구한다.

$$\hat{C}_p(t) = \frac{d}{dt}\hat{C}_{p-1}(t) + \hat{C}_{p-1}A(t)$$

- 단계 3 : $\hat{C}_N(t)$ 를 나머지 행 벡터 $\hat{C}_0(t), \hat{C}_1(t), \dots, \hat{C}_{N-1}(t)$ 들의 선형 조합으로 나타낼 수 있는 선형 조합 계수 $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^N$ 를 구한다.

- 단계 4 : 보조정리 1을 이용하여 요구되는 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^N$ 으로 구성되는 선형 시변 방정식 계수 $\{d_i(t)\}_{i=1}^N$ 를 구한다.

- 단계 5 : 다음 식과 같은 Ackermann형 공식을 이용하여 제어 이득을 구한다.

$$u(t) = k(t)x(t) \\ = - \begin{pmatrix} [\alpha_1(t) \ \cdots \ \alpha_N(t)] \\ [d_1(t) \ \cdots \ d_N(t)] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_0(t) \\ \hat{C}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{N-1}(t) \end{bmatrix} x(t)$$

• 예제 5.

다음과 같이 주어지는 단일 입출력 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

준 시스템의 제어 목적은 준 시스템을 안정화시키고, 폐루프 시스템의 PD-스펙트럼이 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^3 = \{-5 - e^{-t}, 6 - e^{-t}, -7 - e^{-t}\}$ 가 되도록 하는 것으로 가정한다. 먼저 준 시스템이 제어 가능하므로 다음과 같이 가제어성 행렬을 구성할 수 있다.

$$C(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \xi_3(t)] \\ = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & -\sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) & \cos(t) - \sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

또한 위 가제어성 행렬의 역행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2(t) \\ \tilde{C}_1(t) \\ \tilde{C}_0(t) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) & \cos(t) + \sin(t) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 1 \end{bmatrix}$$

그리면 단계 2에서 $\{\hat{C}_i(t)\}_{i=0}^3$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{C}_0(t) &= \tilde{C}_0(t) = [-\sin(t) \ \cos(t) \ 1], \\ \hat{C}_1(t) &= \frac{d}{dt}\hat{C}_0(t) + \hat{C}_0(t)A(t) \\ &= [0 \ 0 \ 1], \\ \hat{C}_2(t) &= \frac{d}{dt}\hat{C}_1(t) + \hat{C}_1(t)A(t) \\ &= [\cos(t) \ \sin(t) \ 0], \\ \hat{C}_3(t) &= \frac{d}{dt}\hat{C}_2(t) + \hat{C}_2(t)A(t) \\ &= [-\sin(t) \ \cos(t) \ 0] \end{aligned}$$

여기서 $\hat{C}_3(t)$ 는 $\{\hat{C}_i(t)\}_{i=0}^2$ 의 선형 조합으로 나타낼 수 있으므로 다음과 같이 선형 조합 계수를 구할 수 있다.

$$\hat{C}_3(t) = [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} \hat{C}_0(t) \\ \hat{C}_1(t) \\ \hat{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

한편, 보조정리 1을 이용하여 요구되는 PD-스펙트럼으로 구성된 계수 $\{d_i(t)\}_{i=1}^3$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d_1(t) = 210 + e^{-3t} + 15e^{-2t} + 90e^{-t},$$

$$d_2(t) = 107 + 3e^{-2t} + 33e^{-t},$$

$$d_3(t) = 18 + 3e^{-t}$$

그러면 단계 5의 Ackermann형 공식에 적용하여 준 시스템의 제어 목적을 만족하는 되먹임 이득을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{pmatrix} [\alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t)] \\ [d_1(t) & d_2(t) & d_3(t)] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} x(t) \\ &= -[k_1(t) \quad k_2(t) \quad k_3(t)] x(t) \end{aligned}$$

여기서, $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} k_1(t) &= (18 + 3e^{-t}) \cos(t) - \\ &\quad (211 + e^{-3t} + 15e^{-2t} + 90e^{-t}) \sin(t), \\ k_2(t) &= (211 + e^{-3t} + 15e^{-2t} + 90e^{-t}) \cos(t) + \\ &\quad (18 + 3e^{-t}) \sin(t), \\ k_3(t) &= 317 + e^{-3t} + 18e^{-2t} + 123e^{-t} \end{aligned}$$

다음의 그림 2, 그림 3에는 초기 조건 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 3$ 에 의한 개루프 및 폐루프 시스템의 영-입력 응답(zero-input response)이 각각 나타나 있다. 그림 2는 준 시스템의 개루프 응답이 불안정함을 보여주고, 그림 3은 본 논문에서 제안한 Ackermann형 공식을 이용하여 PD-고유치를 적절히 지정함으로써 준 시스템을 안정화시킬 수 있음을 보여준다.

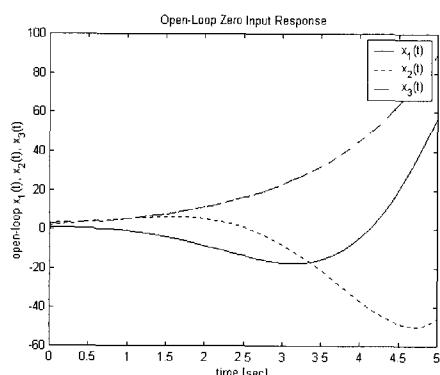


그림 2. 개루프 시스템의 영-입력 응답

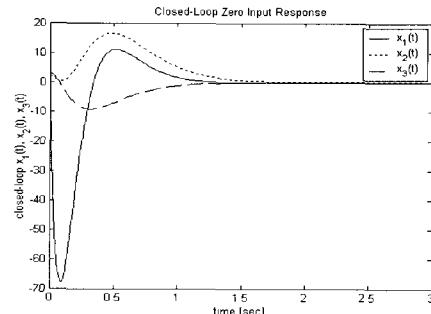


그림 3. 폐루프 시스템의 영-입력 응답

4.2. 고유구조 지정 기법

고유구조(고유치/고유벡터) 지정 문제는 제어 가능한 시스템의 고유치와 고유벡터를 동시에 요구하는 값 및 방향을 갖도록 제어기를 설계하는 문제로서, 고전적인 제어문제에서 다루어 왔던 감쇠, 정착시간 및 모드 또는 외란 분리 특성을 현대 다변수 제어 구조에 반영시킬 수 있는 효과적인 방법으로 알려져 있다. 일반적으로 시스템의 반응 속도는 시스템의 고유치에 의하여 결정되는 반면, 고유벡터는 시스템의 반응 형태(mode shape)를 결정한다. 고유구조 지정을 위한 제어기의 역할은 부과된 사양을 만족하도록 개루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 폐루프 시스템에서 적절한 값 및 방향을 갖도록 지정하는 것이다. 이러한 고유구조 지정 기법은 비행체의 모드 분리 등을 위한 비행제어시스템의 구성이나 유연구조물의 진동 억제 제어문제 등에 광범위하게 사용되어 왔다. 이와 같은 고유구조는 시스템의 내부에서의 역할에 따라 좌 고유구조(고유치/좌 고유벡터)와 우 고유구조(고유치/우 고유벡터)로 대별할 수 있다. 즉, 모드 또는 외란의 분리성은 시스템의 우 고유구조에 의하여 지배를 받는 반면, 제어효율성과 외란억제성은 주로 좌 고유구조에 의존한다. 본 절에서는 선형 시불변 시스템에 대하여 Sylvester 방정식을 이용한 고유구조 지정 기법을 선형 시변 시스템으로 확장한 기법을 기술한다.

선형 시변 시스템에 대한 고유구조 지정 기법을 위하여 다음의 선형 시변 상태 공간 방정식을 상정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ &= A(t)x(t) + \sum_{k=1}^m b_k(t)u_k(t) \end{aligned} \quad (26)$$

$$u(t) = K(t)x(t) \quad (27)$$

여기서, (i) $x \in R^N$, $u \in R^m$ 는 각각 시스템의 상태 변수와 제어 입력을 나타내며; (ii) $A(t)$, $B(t)$ 는 모든 요소가 연속이고 시간에 대하여 $(N-1)$ 번 미분 가능한 함수이며; (iii) $\{A(t), B(t)\}$ 는 제어가능하고; 마지막으로 (iv) $\text{rank } B(t) = m \neq 0$ 이고 $m \leq N$. 그러면 선형 시변 시스템의 우 PD-고유

구조를 임의로 지정할 수 있는 다음의 알고리즘을 구성할 수 있다[9,10].

• 알고리즘

- 단계 1 : 주어진 시스템을 Lyapunov 변환을 통하여 시스템 행렬 $A(t)$ 가 동반행렬 $A_c(t)$ 의 형태로 되도록 변환한다.
- 단계 2 : 변환된 시스템에 대하여 요구하는 폐루프 시스템의 PD-고유치들로 구성된 $X(t)$ 와 요구하는 우 PD-모드행렬 $P_d(t)$ 을 설정한다.
- 단계 3: 선정된 $X(t)$ 와 $P_d(t)$ 를 미분 Sylvester 방정식에 대입하여 매개행렬 $H(t)$ 는 다음의 식을 이용하여 계산한다.

$$H(t) = -\bar{B}^*(t)(A_c(t)P_d(t) - P_d(t)X(t) - P_d(t))$$

여기서, $\bar{B}^*(t)$ 는 행렬 $\bar{B}(t)$ 의 의사 역행렬(pseudo-inverse)을 의미한다.

- 단계 4 : 획득 가능한 우 PD-고유벡터 $P_a(t)$ 를 구하기 위하여 단계 3에서 구한 $H(t)$ 를 사용하여 다음과 같이 주어지는 미분 Sylvester 방정식을 푼다. ($H(t) = \bar{H}(t)$)

$$A_c(t)P_a(t) - V_a(t)X(t) + \bar{B}(t)\bar{H}(t) = \dot{P}_a(t)$$

- 단계 5 : 단계 4에서 구한 $P_a(t)$ 를 사용하여 다음의 이득 행렬 $\bar{K}(t)$ 를 계산한다.

$$\bar{K}(t) = \bar{H}(t)P_a^{-1}(t)$$

- 단계 6: $\bar{K}(t)$ 는 Lyapunov 변환을 통하여 변환된 시스템에 대한 이득 행렬이므로 다시 Lyapunov 변환을 하여 원 시스템에 대한 이득 행렬 $K(t)$ 를 구한다.

• 예제 6.

다음과 같은 두 개의 독립된 제어 입력을 가지는 제어 가능한 2차 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-t^2 & 2t \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u(t)$$

준 시스템은 시스템 행렬 $A(t)$ 가 동반 행렬 형태이므로 단계 1을 생략할 수 있다. 폐루프 시스템의 요구되는 PD-고유치와 우 PD-고유벡터를 다음과 같이 선정한다.

$$X(t) = \text{diag}[-t-1, -t-2]$$

$$P_d(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

그리면, 본 논문의 알고리즘에 따라 매개 행렬 $\bar{H}(t)$ 와 이득 행렬 $K(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{H}(t) = \begin{bmatrix} t+1 & 2 \\ 2-t^2 & 6t+4 \end{bmatrix}$$

$$K(t) = \begin{bmatrix} -t-1 & -1 \\ t^2-2 & -3t-2 \end{bmatrix}$$

본 예제의 경우에 제어 입력 행렬의 차수가 시스템 행렬의 차수와 같으므로 요구되는 폐루프 시스템의 PD-고유치들뿐만 아니라 우 PD-고유벡터들까지 정확히 요구되는 값 및 방향을 갖도록 지정이 된다.

다음의 그림 4, 그림 5에서는 초기조건 $x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$ 에 의해 개루프 및 폐루프 시스템의 영-입력 응답이 각각 나타나 있다. 그림 4에서 준 시스템이 불안정하다는 것을 보여주고, 그림 5를 살펴보면 본 논문에서 제안한 알고리즘으로 PD-고유치를 요구되는 값으로 지정함으로써 시스템을 안정화시킬 수 있고, 또한 우 PD-고유벡터들을 요구되는 방향으로 지정함으로써 각 상태들이 불연성화시킬 수 있음을 알 수 있다.

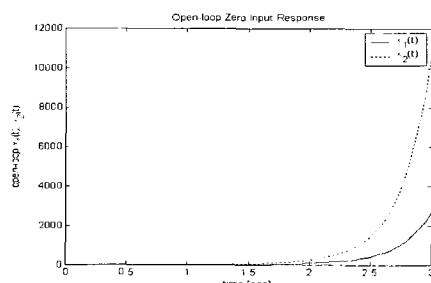


그림 4. 개루프 시스템의 영-입력 응답

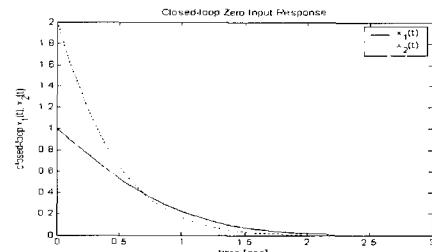


그림 5. 폐루프 시스템의 영-입력 응답

5. 결론

본 논문에서는 먼저 선형 시변 시스템의 새로운 고유치 개념인 SD-고유치와 PD-고유치 개념을 소개하였다. 그리고 이를 이용한 선형 시변 시스템의 해석 방법으로 안정도 판별법, 모드 분해, 가지어성/가관측성 판별법, 가지어성/가관측성 척도 등을 기술하였다. 또한 선형 시변 시스템에 대한 고유치 및 고유구조 지정 기법을 설명하였다. 본 논문에서 기술한 개념들은 선형 시불변 시스템을 포함하는 개념이고, 선형 시변 시스템의 조직적인 해석 및 제어기 설계 방법의 하나로 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

1. J. J. Zhu, 이호철, 최재원, "선형 시변 시스템에 대한 잘 정의된 직렬 및 병렬 D-스펙트럼," 제어·자동화·시스템 공학 논문지, 제5권, 제5호, pp. 521-528, 1999.
2. J. J. Zhu, and C. D. Johnson, "Unified canonical forms for matrices over a differential ring," *Linear Algebra and Its Application*, vol. 147, pp. 201-248, 1991.
3. H. D'angelo, *Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, 1970.
4. J. J. Zhu, "A necessary and sufficient stability criterion for linear time-varying systems," *Proceedings of the 26th IEEE Southeastern Symposium on System Theory*, pp. 115-119, 1996.
5. 최재원, 이호철, 이달호, "선형 시변 시스템에 대한 모드 및 총 가지어성/가관측성 척도," 제어·자동화·시스템 공학 논문지, 제5권, 제6호, pp. 647-655, 1999.
6. J. W. Choi, H. C. Lee, and J. J. Zhu, "Measures of

- modal and gross controllability/observability for linear time-varying systems," *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, pp. 1774-775, 1999.
7. 이호철, 최재원, "선형 시변 시스템의 고유치 지정을 위한 Ackermann형 공식," 제어·자동화·시스템 공학 논문지, 제9권, 제3호, pp. 186-194, 2003.
 8. H. C. Lee, J. W. Choi, and J. J. Zhu, "Ackermann-like formula for linear time-varying systems," *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4292-4297, 2001.
 9. 최재원, 이호철, "미분 Sylvester 방정식을 이용한 선형 시변 시스템의 고유구조지정기법," 제어·자동화·시스템 공학 논문지, 제5권, 제7호, pp. 777-786, 1999.
 10. J. W. Choi, H. C. Lee, and J. J. Zhu, "Decoupling and tracking control using eigenstructure assignment for linear time-varying systems," *International Journal of Control*, vol. 74, no. 5, pp. 453-464, 2001.

저자소개



《최재원》

- 1987년 서울대학교 제어계측공학 졸업.
- 1989년 서울대학교 대학원 제어계측 공학 석사.
- 1995년 서울대학교 대학원 제어계측 공학 박사.
- 1996년~현재 부산대학교 기계공학부 전임강사, 조교수, 부교수.
- 1995년 1월~2월 일본 NASDA / TKSC 방문 연구원.
- 1995년 9월~1996년 2월 미국 USC Post Doc.
- 1998년 1월~2월, 1999년 12월~2000년 1월 미국 LSU 방문 교수.
- 2002년 12월~2003년 1월 영국 The Queen's Univ. of Belfast, Honorary Senior Research Fellow.
- 1999년 8월~현재 IFAC Technical Committee on Aerospace 및 Technical Committee on Linear Systems 위원.
- 2000년 1월~현재 IEEE Control Systems Society Conference Editorial Board, Associate Editor.
- 2000년 1월~2003년 2월 제어·자동화·시스템공학 논문지 제어응용분야 담당편집위원.
- 2000년 11월~현재 KSME Int'l Journal, Associate Editor.



《이호철》

- 1998년 부산대 제어기계공학과 졸업.
 - 2000년 부산대 지능기계공학과 석사.
 - 2000년~현재 동대학원 박사과정. 제5회 삼성 휴먼테크논문대상 은상수상(1999). 서암학술장학재단 장학생선발(2000).
- The 4th Asian Control Conference Best Poster Paper Award 수상(2002).
- 관심분야 : 선형 시변 시스템 이론, 이득계획기법, 항법 및 유도제어 시스템.