

## 고주파수 PWM제어를 이용한 ABS의 맥동 저감에 관한 연구

이용주\*, 김병우<sup>+</sup>, 박 호<sup>++</sup>

(논문접수일 2002. 11. 8, 심사완료일 2003. 4. 23)

### A Study on Falling Pressure Surge of ABS Using High Frequency PWM Control

Yong-Joo Lee\*, Byeong-Woo Kim<sup>+</sup>, Ho Park<sup>++</sup>

#### Abstract

The solenoid valve in ABS hydraulic modulator is a two directional on-off valve and is controlled by around 100Hz high speed pulse width modulation. When the valve is switched from open state to closed state, noise and vibration due to pressure surge phenomena in the hydraulic line and wheel cylinder are made. In this study, we identify pressure surge phenomenon in the braking process of a ABS, and investigate the way to reduce the phenomenon. For the purpose of theoretical analysis on the pressure surge in the closed state hydraulic line, characteristic curve method based on wave equation was utilized. To reduce the surge, high frequency control of 20KHz was attempted. The result showed that the surge pressure of 50% was reduced compared to one observed in the low frequency control. Duty variation of high frequency can control current of solenoid valve and prevent sudden change of displacement.

**Key Words :** ABS(미끄럼방지제동장치), Wheel Cylinder(휠실린더), Modulator(모듈레이터) PWM(펄스폭변조), Solenoid Valve(솔레노이드 밸브), Duty Ratio(듀티 비율), Surge Pressure(서지압력)

### 1. 서론

현재, 국내에 보급되어 있는 ABS 장치의 PWM신호의 기본 주파수는 100Hz 내외를 채택하고 있다. 이 주파수는 밸브 가동자가 닫힘에서 열림 열림에서 닫힘으로 변위가

정확하게 발생되는 시점을 기준으로 하고 있다. 이러한 PWM 제어를 실시하면 휠실린더에서 큰 맥동이 발생하게 된다. 이 발생된 맥동은 제동 거리 연장은 물론이고 제동 소음을 유발하여 ABS 제동 장치의 성능 향상에 걸림돌로 작용할 수 있다. 이 같은 맥동 문제 해결을 위하여, 국내외

\* 주저자, 두원공과대학 자동차과 (yjlee@doowon.ac.kr)  
주소: 456-718 경기도 안성시 죽산면 장원리 678  
+ 자동차부품연구원 전장개발부  
++ 천안공업대학 자동차과

에서 각종 연구를 수행하였다<sup>(1)</sup>. 국내의 경우, ABS 유압 제어에서 발생하는 맥동을 근본적으로 저감시킬 수 있는 연구보다는 발생 맥동을 기본으로 하여 유압 제어 모드를 최적화시킬 수 있는 연구에 주력하였다<sup>(2)</sup>. 따라서, 상기 문제점들을 해결하기 위해서는 슬레노이드 밸브 자체의 동특성 해석은 물론이고 작용 유압 및 밸브 구성 요소가 ABS 유압 장치에 미치는 영향을 정량적으로 평가하여야 할 것이다. 또한, ABS 유압 모듈레이터 등의 하드웨어 성능 향상과 함께 발생 맥동을 근본적으로 저감시킬 수 있는 PWM 제어 기술을 통하여 기존 ABS 장치에서 문제시되고 있는 제동 거리와 소음 문제를 해결하여야 할 것이다<sup>(3~5)</sup>.

따라서, 본 연구에서는 휠실린더에서 발생하는 맥동 현상을 근본적으로 저감시키기 위한 방법으로 고주파수 PWM 신호를 슬레노이드 밸브에 인가시켜서 제어한 결과 맥동 감소 효과를 얻을 수 있었으며 이러한 현상을 실험과 시뮬레이션을 통해 분석하였다.

## 2. ABS 맥동 해석

### 2.1 맥동 현상 모델

ABS 유압 장치에서 발생하는 맥동 현상 해석을 위하여 유압 관로 상의 과도적인 압력과 유량에 대한 해석이 가능한 특성곡선법<sup>(6)</sup>을 적용하였다. 유압 관로의 과도적인 유동 해석을 위하여 운동방정식과 연속방정식을 이용하였으며 이 때 적용한 가정은 다음과 같다.

- 1) 배관 내부의 유동은 비정상 층류 유동
  - 2) 유체 온도를 비롯한 물성치는 일정
- Navier-Stokes 운동방정식과 연속방정식은 식 (1) (2)와 같다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} + E_{01} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (2)$$

운동방정식 (1)에  $\nu$ 를 도입하고 식 (2)에 조합시키면 식 (3)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} + \left( V + \frac{\lambda}{\rho} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \left( V + \frac{E_{01}}{\lambda} \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] \\ & - \lambda \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

완전 미분방정식 식 (4)을 식 (3)에 대입하면

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (4)$$

식 (5)을 얻을 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{\lambda}{\rho} = V + \frac{E_{01}}{\lambda}, \quad \lambda_{1/2} = \pm \sqrt{E_{01}\rho} \quad (5)$$

또한, (3)식은 아래와 같이 변환할 수 있다.

$$\frac{dP}{dt} + \sqrt{E_{01}\rho} \frac{dV}{dt} \frac{A}{A} - \nu \sqrt{E_{01}\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (6)$$

(6)식은 다음식 (7), (8)과 같은 방정식으로 나타낼 수 있다.

$\lambda = +\sqrt{E_{01}\rho}$ 인 경우(  $C^+$  곡선)

$$\frac{dP}{dt} + Z_{10} \frac{dQ}{dt} + \nu \sqrt{E_{01}\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{E_{01}}{\lambda} = V + \sqrt{\frac{E_{01}}{\rho}} = V + C \quad (7)$$

$\lambda_{1/2} = -\sqrt{E_{01}\rho}$ 인 경우(  $C^-$  곡선)

$$\frac{dP}{dt} - Z_{10} \frac{dQ}{dt} - \nu \sqrt{E_{01}\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = V - \frac{E_{01}}{\lambda} = V - \sqrt{\frac{E_{01}}{\rho}} = V - C \quad (8)$$

여기서  $C = \sqrt{\frac{E_{01}}{\rho}}$ 는 유체의 속도이고,  $Z_{10} = \sqrt{E_{01}\rho}/A$ 는 파이프의 저항이다. 식 (7)은 정 방향으로 진행되는 파동의 시간, 위치의 관계를 나타낸 것이고 식 (8)은 역 방향으로 진행되는 파동의 시간, 위치와의 관계를 나타낸다.

식 (7), (8)의 방정식을  $C^+$ ,  $C^-$ 로 구분하여 Fig. 1과 같이 x-t 평면에 나타낼 수 있다. 특성곡선에서 변수들의 변화는 A점에서 P점으로  $C^+$ , B점에서 P점으로  $C^-$ 에 대한

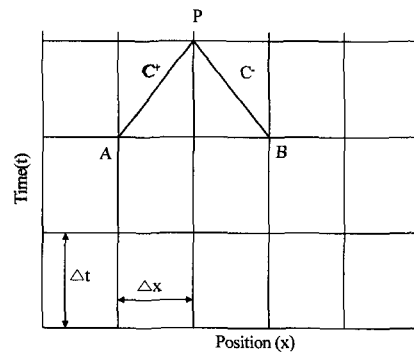


Fig. 1 Characteristic lines in the x-t plane

적분을 실시하여 구한다. 이를 위하여 양변에 dt를 곱하고 미분항을 차분화시키면 식 (9), (10)와 같이 된다.

$$C^+: P_P = P_A - Z_b(Q_P - Q_A) - F_A = P_A - Z_b Q_P + Z_b Q_A - F_A = C_P - Z_b Q_P \quad (9)$$

$$C^-: P_P = P_B + Z_b Q_P - Z_b Q_B + F_B = C_M + Z_b Q_P \quad (10)$$

그리고  $C_P$ ,  $C_M$ 은 이미 알고 있는 A점과 B점의 물성치로써 구할 수 있다.

$$C_P = P_A + Z_b Q_A - F_A \quad (11)$$

$$C_M = P_B - Z_b Q_B + F_B \quad (12)$$

(11), (12)식에서 미지수  $P_P$ ,  $Q_P$ 는 다음과 같이 된다.

$$P_P = \frac{1}{2}(C_P + C_M) \quad (13)$$

$$Q_P = \frac{1}{2Z_b L_o}(C_P - C_M) \quad (14)$$

마찰을 가진 파이프의 유체 유동의 계산은 작은 스텝 (small step)의 미분방정식의 해를 사용한다. 이 계산 과정은 A점과 B점의 값들로부터 P점의 값들이 결정된다. 이러한 방법으로  $t + \Delta t$ 에서의 값이 시간 t에서의 값에 기초해서 단계적으로 계산될 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = \pm C_0 = \pm const \quad (15)$$

격자의 간격은 다음과 같이 된다.

$$\Delta x = C_0 \Delta t \quad (16)$$

파이프의 전체 길이  $\ell$ 는 요소들로 다음과 같이 분할된다.

$$n_{\Delta x} = \frac{\ell}{C_0 \Delta t} \quad (17)$$

이같이 하면  $\Delta t = 2 \times 10^{-5} [\text{sec}]$ 이고,  $C_0 = 800 [\text{m/s}]$ 라 하면  $\Delta x = 16 [\text{mm}]$ 가 되고 파이프 전체길이 2m는 약 125개의 요소들로 분할된다.

계산에서 일정한 파이프의 유체 저항은 다음과 같이 가정된다.

$$Z_b = \frac{\sqrt{E_{01} \rho}}{A} = const \quad (18)$$

(9), (10), (11), (12)식에서 A, B점에서의 마찰저항과 원

주 방향 변위에 따른 압력 손실,  $F_A, F_B$ 는 다음과 같은 값을 갖는다.

$$F(x, t) = \frac{P}{x} \Delta x \quad (19)$$

$\frac{\partial P}{\partial x}$ 의 미분은 식 (20)과 같으며

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, t) = \frac{8\nu_0}{\pi r^4} Q(x, t) + \frac{4\nu_0}{\pi r^4} [I_1(x, t) + I_2(x, t) + I_3(x, t)] \quad (20)$$

여기에서  $I_i(x, t)$ 는 식 (21)과 같다.

$$I_i(x, t) = m_i [Q(x, t) - Q(x, t - \Delta t)] + N_i \cdot I_i(x, t - \Delta t) \quad (21)$$

파라미터  $m_i, N_i$ 는 배관의 형상에 의해서 정해지는 상수들이다.

## 2.2 고주파 PWM 제어

일반적으로 차량용 ABS 장치는 100Hz 내외의 PWM 제어를 실시한다. 밸브 가동자가 열림에서 닫힘, 닫힘에서 열림으로 변환되면, 밸브 가동자 변위가 급변하여 솔레노이드 부에서 급격한 전류 변화를 발생시키게 된다.

유압 모듈레이터의 솔레노이드를 자화시키는 기전력,  $E_m$ 은 식 (22)과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_m = R_m i + L_m \frac{di}{dt} \quad (22)$$

PWM 제어를 이용하여 특정 전압을 솔레노이드 부에 인가하게 되면 인덕턴스 변화에 의한 전류에 비례한 기전력이 발생된다. 이 기전력에 의하여 가동자가 동작하는데 가동자가 고정자에 충돌하는 순간에 전류 상승 속도가 급변하는 역기전력이 발생한다. 이러한 전류 변곡점을 통해 밸브의 동적 응답 특성을 결정할 수 있다.

일반적인 저주파수의 PWM 제어를 실시하면 급격한 가동자 변위에 의하여 모듈레이터에서 휠실린더로 공급되는 유량이 급격하게 변화된다. 따라서 ABS 유압 장치와 같이 폐쇄 계로 구성된 휠실린더 내부에는 큰 맥동 압력이 발생하게 된다. 이 같은 맥동 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 기존의 저주파수 PWM 제어를 탈피하여 급격한 전류 변곡점을 갖지 않고 선형적인 전류 변화가 가능한 방법을 모색하였다.

전체 제어 신호 주기는 일반 상용 ABS 장치에서 적용되

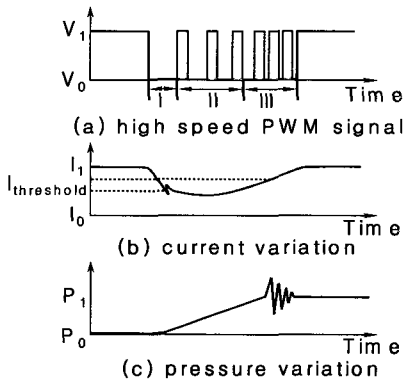


Fig. 2 Principle of high frequency PWM control

고 있는 90msec를 적용하였으며 전용 PIC 제어기를 이용하여 임의의 듀티 비율 변경이 가능하도록 고주파수 PWM 제어를 실시하였다. 이러한 PWM 제어 조건과 전류 변화의 상관관계는 Fig. 2와 같이 3 단계로 구분하여 실시하였다.

제 1단계는 Fig. 2의 (a)에서 I로 표시한 구간으로서 솔레노이드에 공급하는 신호를 인가전압,  $V_1$ 에서 기저전압,  $V_0$ 으로 바꾸어 일정 시간동안 공급하는 것이다. 이를 위해서 20kHz의 고주파수 PWM 신호의 듀티 비율을 0%로 유지한다. 이렇게 하면 휠실린더에 유량을 공급해주는 밸브는 밸브는 닫히게 되고 휠실린더의 압력은 Fig. 2의 (c)와 같이 그대로 유지하게 된다. 제 2 단계는 Fig. 2의 (a)에서 II로 표시한 구간으로서 솔레노이드 밸브가 작동할 때 발생하는 전류변곡점부근에서 전류를 유지하도록 하여(Fig. 2의 (b)) 밸브를 서서히 열리도록 작동하는 것이다. 이를 위해서 고주파수의 듀티를 비교적 낮게 하여 공급하게 된다. 이렇게 되면 휠실린더의 유량이 공급하게 되어 Fig. 2의 (c)에서와 같이 휠실린더의 압력이 서서히 증가하게 된다. 제 3단계는 Fig. 2의 (a)에서 III으로 표시한 구간으로서 고주파수 PWM 듀티 비율을 II 단계에 비하여 상대적으로 높게 하여 공급하는 단계이다. 이렇게 하면 Fig. 2의 (b)와 같이 솔레노이드 밸브의 전류가 공급하는 고주파수의 듀티에 따라서 완만하게 증가하게 되고 밸브는 서서히 닫혀져서 휠실린더의 압력은 Fig. 2의 (c)와 같이 더 이상 증가하지 않게 되는 것이다.

이렇게 제어하면 솔레노이드 밸브의 전류를 완만하게 변화시킬 수 있으므로 저주파수 PWM 제어에서 나타나는 밸브 가동자의 급격한 변동으로 인한 과도한 압력의 상승을 막을 수 있게 된다.

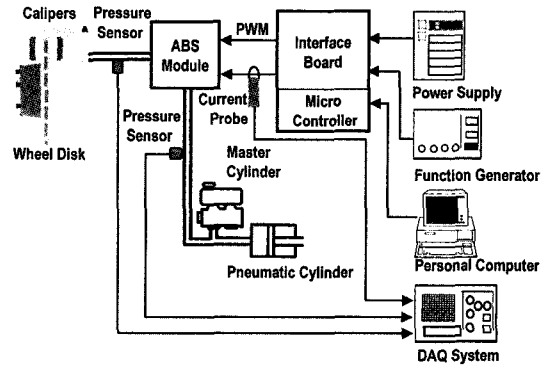


Fig. 3 Schematic diagram of experimental apparatus

### 3. 실험

#### 3.1 맥동실험장치

ABS 유압 장치에서 발생하는 맥동현상을 해석하기 위하여 Fig. 3과 같이 1,800CC 승용차에 적용되는 ABS 시스템의 유압 배관을 이용하여 테스트 벤치(test bench)를 제작하였다. ABS 전용 테스트 벤치는 마스터 실린더에서 최대 압력 200bar가 발생되도록 600kgf 작용력의 공압 실린더, 두 개의 피스톤을 갖는 텐덤형 마스터 실린더, 입구 및 출구 밸브를 포함한 유압 모듈레이터(bosch 5.3), 실제적으로 차륜 제동력을 발생시키는 휠실린더, 및 X형 유압 배관으로 구성하였다. 계측 시스템으로는 솔레노이드 밸브에서 발생하는 전류 변화를 계측하는 최대 전류 50mA의 전류계와 고속의 맥동 변화를 검지하기 위한 반도체 압력 센서(Texas Instruments 3CP17-1)를 ABS 유압 모듈레이터를 기점으로 400mm 전후에 설치하였다. 또한 유압 모듈레이터의 솔레노이드 밸브들과 순환펌프의 제어를 위하여 PIC 16C64A-04/P를 이용한 전용 제어기를 제작하였으며 PWM 신호, 전류계, 및 압력 센서에서 발생하는 신호의 저장에 위하여 전용 기록장치를 이용하여 실험하였다. 실험에서 사용한 유압 작동유는 Table 1과 같은 성질의 DOT 3에 준하는 ABS 전용 작동유를 사용하였다.

#### 3.2 실험 방법

솔레노이드 밸브의 동특성은 PWM 주파수와 듀티 비율에 따라서 가변되게 되므로 본 실험에서는 기본 주파수를 20kHz로 일정하게 하고 각 제어 모드에 적합한 듀티 비율

을 변화시켰다. 밸브 가동자가 열렸다가 닫히는 순간에 선형적인 전류 기울기를 갖도록 수치 해석에서 규명한 듀티 비율을 근간으로 하여 맥동 저감이 가능한 고속 PWM 제어 조건을 결정하고 이를 토대로 솔레노이드 밸브와 펌프를 제어하였다. 이 때 발생하는 전류의 변화와 맥동을 계측하여 저장하였으며 매우 짧은 시간에 급변하는 맥동 특성을 고려하여 매 실험 조건마다 5회 실시하여 평균값을 취하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 PWM 파형변화에 의한 영향

PWM 제어 신호를 저주파수와 고주파수로 가변할 때 솔레노이드 밸브에서 발생하는 전류 변화와 밸브 가동자의 변위 변화를 Fig. 4에 나타내었다. 저주파수의 경우는 100Hz, 50%의 듀티 신호로서 약4.5msec, 약 600~700mA 부근에서 전류 변곡점이 발생하며(Current (low)) 이 때에 밸브 가동자도 동작하고 있음을 알 수 있다(Disp.(low)).

반면에 20kHz, 듀티 가변의 고주파수 PWM 제어에서는 저주파수의 경우와 같은 급격한 전류 변곡점이 발생하지 않

는 것을 알 수 있었다.(Current (high)) 이 같은 현상은 밸브 가동자가 움직이는데 필요한 최소 전류 대역의 전류를 비례제어 밸브처럼 완만하게 변화시키기 때문에 발생하는 현상이다.

Fig. 5는 20kHz 고주파수 제어에서 듀티를 기준 주파수에 대해서 5%, 10%, 15%, -5%로 변화시킬 때 발생하는 전류의 상승기울기의 변화를 나타낸 것이다. 듀티의 증가에 비례하여 전류의 상승기울기가 증가하는 것을 알 수 있다. 가동자 열림 시간을 만족시키는 발생 전류 기울기의 범위가 대략적으로 34°~43° 정도가 필요하였으며 이를 통하여, 고주파수 PWM 제어 신호의 듀티 변화 범위를 확인할 수 있었다.

##### 4.2 주파수 변화에 의한 맥동 저감

Fig. 6과 Fig. 7은 고주파수 PWM 제어를 적용했을 때

Table 1 Specification of hydraulic oil

Parameter	value
Bulk modulus(K)	1,650MPa
Dynamic viscosity( $\nu$ )	0.185cm <sup>2</sup> /sec
Density( $\rho$ )	1.04×10 <sup>-3</sup> kg/cm <sup>3</sup>
Velocity of sound(C)	800m/sec

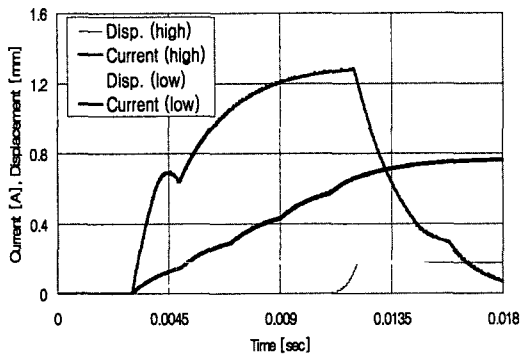


Fig. 4 Current and stroke characteristics vs. PWM control mode

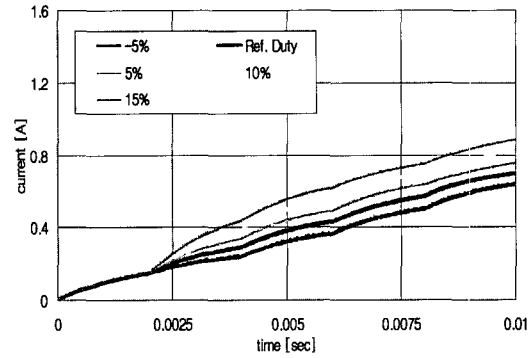


Fig. 5 Current variation with various duty cycles at 20kHz

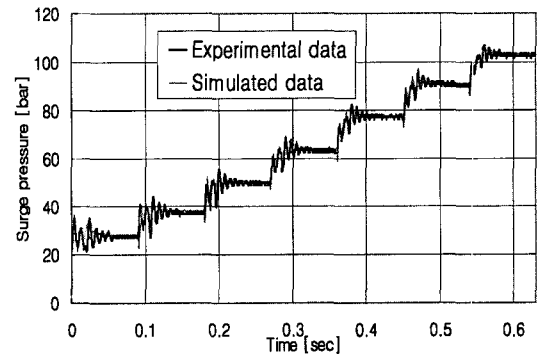


Fig. 6 Simulation results compared to experimental results of response of surge in wheel cylinder (continuous pulse)

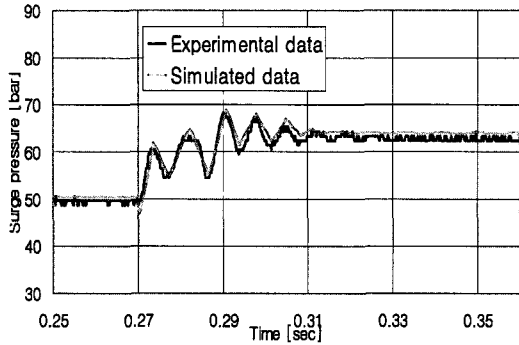


Fig. 7 Simulation results compared to experimental results of response of surge in wheel cylinder (single pulse)

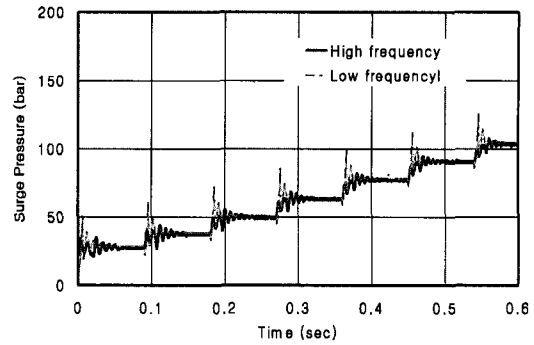


Fig. 8 Surge pressure vs. low and high frequency PWM control

나타난 실험 결과와 시뮬레이션 결과를 연속된 주기와 한 주기로 나누어서 비교한 것이다. 대체적으로 시뮬레이션의 결과가 실험 결과와 유사하게 나타남으로 시뮬레이션의 타당성을 검증할 수가 있었으며 따라서 본 논문의 유압 맥동 현상 모델이 실제 모델을 잘 반영하고 있음을 알 수 있었다.

저주파수 와 고주파수 PWM 제어를 적용했을 때 발생하는 맥동 현상을 Fig. 8에 비교하였다. 100Hz로 대표되는 저주파수 PWM 제어를 실시할 경우에는 초기 맥동 크기가 20bar 내외로 발생되었으나, 20kHz로 제어한 고주파수 PWM 제어에서는 맥동 압력이 10bar 내외로서 발생하여서 주파수의 변화가 휠실린더에서 발생하는 맥동 압력 저감에 큰 영향을 끼치는 것을 알 수 있다. 이것은 밸브 가동자 변화 속도를 제어할 수 있기 때문에 밸브 가동자가 열림에서 닫힘으로 변환될 때 발생하는 유압 맥동을 저감시킬 수 있기 때문인 것으로 사료된다.

## 5. 결론

약 100Hz로 제어하는 ABS용 on, off 솔레노이드 밸브에 고주파수 PWM 제어를 적용시킨 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 20kHz의 고주파수 PWM 제어의 방법이 유압 맥동을 현저하게 줄어들게 하였다.
- (2) 고주파수 듀티 변화로 전류의 상승 기울기를 제어하여 밸브의 급격한 변위의 변동을 예방할 수 있었다.
- (3) 유압 관로의 맥동 현상을 수학적으로 모델링하여 해석하였으며 실험을 통해 검증하였다.

## 기호 설명

- P = average pressure (bar)
- V = average volume (m<sup>3</sup>)
- t = time (sec)
- E<sub>01</sub> = compressibility
- ρ = density of fluid (kg/m<sup>3</sup>)
- ν = dynamic viscosity (m<sup>2</sup>/sec)
- r = radial distance from pipe center (m)
- λ = unknown multiplier
- A = cross section area of pipe (m<sup>2</sup>)
- Z<sub>10</sub> = characteristic power impedance
- C, C<sub>0</sub> = pressure expansion speed(m/sec)
- P<sub>P</sub>, P<sub>A</sub>, P<sub>B</sub> = pressure at point P, A, B (bar)
- Q<sub>P</sub>, Q<sub>A</sub>, Q<sub>B</sub> = flow rate at point P, A, B (l/min)
- F<sub>A</sub>, F<sub>B</sub> = total head (P/ρg)
- V = flow velocity (m/sec)
- I<sub>i</sub> = variable at point i
- R<sub>m</sub> = resistance (Ω)
- L<sub>m</sub> = inductance (H)
- I = current (A)

## 참고 문헌

- (1) M. Sugai, H. Yamaguchi, and M. Miyashita, 1998, "New Control for Maximizing Braking Force on

- Antilock Braking System”, SAE 9837418, pp. 649 ~ 654.
- (2) C. S. Hahn, H. Park, and M. H. Rhee, 2002, “Development of Fuzzy Controller for Electric Power Steering Considering Steering Feel”, Transaction of the Korean Society of Machine Tool Engineers, Vol. 11, No. 2, pp. 50 ~ 58.
- (3) H. L. Song, H. S. Kim, 1995, “Bondgraph Modeling 3-way PWM High Speed Solenoid Valve and Performance Analysis”, Spring Conference of the Korean Society of Precision Engineering 1995, pp. 286 ~ 288.
- (4) T. Naito, H. Takeuchi, Hiromu, and Kuromitsu, 1996, “Development of Four Solenoid ABS”, SAE 960958, pp. 198 ~ 199.
- (5) B. W. Kim, C. S. Song, 2001, “A Study on the Pressure Surge of ABS Hydraulic System”, Journal of the Korean Society of Automotive Engineers, Vol. 9, No. 5, pp. 140 ~ 147.
- (6) T. Kagawa, and A. Kitragawa, 1983, “High Speed and Accurate Computing Method of Frequency-Dependent Friction in Laminar Pipe Flow for Characteristics Method”, Trans. JSME, Ser. B, Vol. 49, No. 447, pp. 2638 ~ 2644.