韓國電磁波學會論文誌 第 14 卷 第 6 號 2003年 6月 論文 2003-14-6-06

Envelope ADI-FDTD의 수치적 특성에 관한 연구

A Study of the Numerical Characteristics of the Envelope ADI-FDTD

주세훈 · 정경영* · 김형훈** · 김형동

Saehoon Ju · Kyung-Young Jung* · Hyung-Hoon Kim** · Hyeongdong Kim

요 약

본 논문에서는 최근에 개발된 Envelope ADI-FDTD의 수치적 특성에 대하여 고찰하였다. 수치 실험을 통하여 Envelope ADI-FDTD가 시간간격에 상관없이 무조건 안정하고, 신호의 포락선을 해석함으로써 기존의 ADI-FDTD보다 더 좋은 분산특성을 얻을 수 있음을 보였다. 이러한 특성은 특별한 경우에서는 Nyquist 극한값까지 시간간격을 키울 수 있는 가능성을 제공한다. 수치결과를 통해서 Envelope ADI-FDTD가 단일주파수 또는 대역이 제한된 시스템의 해석에 있어 유용하게 사용될 수 있음을 확인하였다.

Abstract

In this paper, the numerical characteristics of the recently developed Envelope ADI-FDTD are investigated. Through numerical simulations, it is shown that the unconditional stability of the Envelope ADI-FDTD is independent of time step size and we can get better dispersion accuracy than the traditional ADI-FDTD by analyzing the envelope of the signal. This fact gives the opportunity for extending the temporal step size to the Nyquist limit in certain cases. Numerical results show that the Envelope ADI-FDTD can be used as an efficient electromagnetic analysis tool especially in the single frequency or band limited systems.

Key words : ADI Technique, Envelope FDTD, Dispersion

Ⅰ. 서 론

프로그래밍의 용이성과 다양한 전자기 매질 및 구조의 모델링이 가능한 유한차분 시간영역법(FDTD: Finite-Difference Time-Domain method)은 전자기 분야에서 활발하게 활용되고 있는 수치해석법이다[1]. FDTD의 계산에서는 시간을 진행시키는데 필요한 시간간격이 수치적 안정성(numerical stability)을 보장받기 위하여 CFL 안정조건(Courant-Friedrich-Levy stability constraint)에 의해 그 최대치가 제한된다. 공간적으로 작은 격자는 작은 시간간격을 사용하도록 만들며 수치 계산 시간의 증가를 의미하기 때문에 FDTD의 CFL 안정조건은 특별히 관심주파수의 파장에 비하여 매우 섬세한 구조를 갖는 구조체를 해석하는데 있어서 FDTD의 사용을 어렵게 만들고 있다.

최근에 FDTD의 CFL 안정조건의 제한을 극복하기 위해서 ADI 시간 진행법(Alternating Direction Implicit time-marching scheme)이 FDTD에 도입되어 시간간격의 크기와 상관없이 무조건 안정한 특성을 갖는 ADI-FDTD가 개발되었다[2],[3]. ADI-FDTD는 시간간격을 키워서 시간응답을 구하게 되어 원하는 응답까지의 반복계산 횟수를 상당히 줄일 수 있는 가능성을 가지고 있다. 하지만, ADI-FDTD

한양대학교 전자전기공학부(Computational Electromagnetics Laboratory, Department of Electrical and Computer Engineering, Hanyang University)

*팬택&큐리텔 연구개발실(Research and Development Laboratory, Pantech & Curitel Inc)

**광주여자대학교 컴퓨터공학과(Department of Computer Science, Kwangju Women's University)

· 논 문 번 호 : 20030109-006

· 수정완료일자 : 2003년 4월 14일

는 수치 분산 특성(numerical dispersion)이 시간간격을 키울수록 급격하게 나빠져 해석오차(numerical error)가 매우 커지므로 공간의 계산격자(computational grid)가 관심주파수의 파장에 비하여 매우 적은 경우에만 기존의 FDTD에 비하여 그 적용효과를 얻을 수 있다. 즉, ADI-FDTD에서는 시간간격의 크기가 CFL 안정조건의 제한을 받지는 않지만, 단일 주파수 해석이나 대역제한 시스템을 해석하는 경우에도 Nyquist 극한값까지 마음대로 키울 수가 없다. 이것은 ADI-FDTD의 시간간격이 안정성과는 상관이 없으나 여전히 해석의 정확도에 의해 제한을 받고 있기 때문이다. 이러한 ADI-FDTD의 계산 정확도를 향상시키기 위하여 H. Rao가 Envelope ADI-FDTD의 기본 수식을 구하고 광학구조를 해석하여 기존의 ADI-FDTD에 비하여 효과적임을 보였다[4].

본 논문에서는 수치해석을 통하여 Envelope ADI-FDTD의 수치적 특성을 설명하기 위하여 시뮬레이션을 통해 수치적 안정성과 수치분산에 관해 논의하였다. 이차원 TM에 대한 Envelope ADI-FDTD의 결과를 구하고 기존의 FDTD와 ADI-FDTD의 결과와 비교하였다. 본 논문의 목적은 Envelope ADI-FDTD의 계산과정을 소개하고 그 안정성과 수치분산특성을 논의하는데 있다.

Ⅱ. Envelope ADI-FDTD의 계산식과 수치적 특성

먼저 어떤 주파수를 중심으로 대역폭을 갖는 포락선(envelope) 신호에 대한 맥스웰 방정식(Maxwell's equation)을 살펴보도록 하자. 선형(linear), 등방(isotropic), 무손실(lossless), 비분산(nondispersive) 매질에서 중심주파수가 ω_0이고 전계와 자계의 포락선 진폭을 갖는 맥스웰 방정식은 다음의 식 (1)과 같은 미분형태로 표현된다.

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+j\omega_0\vec{E}\right)=\nabla\times\vec{H} \tag{1.a}$$

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}+j\omega_0\vec{H}\right)=\nabla\times\vec{E} \tag{1.b}$$

ε과 μ는 각각 유전율(permittivity)과 투자율(permeability)을 나타내며, ω_0는 중심주파수(carrier frequency) 이고, $\vec{E}$와 $\vec{H}$는 전계와 자계의 포락선 신호이다. 기존의 ADI-FDTD[2],[3]에서와 같이 Envelope ADI-FDTD[4]에서도 시간간격에 상관없는 수치 안정성이 보장된 알고리즘의 시간반복계산을 위해서 FDTD의 leap-frog 알고리즘이 아닌 ADI 알고리즘을 사용한다. ADI 시간반복계산에서는 모든 방향의 필드성분에 대하여 그 포락선 신호를 한번의 시간간격을 진행시키는데 두 번의 계산과정을 거치게 된다. 그 과정은 다음의 식 (2)와 (3)에 나타내었다.

· 첫번째 반복식 (1st iteration):

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}+j\omega_0E_x\right)^{n+1/4}=\left.\frac{\partial H_z}{\partial y}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|^{n} \tag{2.a}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}+j\omega_0E_y\right)^{n+1/4}=\left.\frac{\partial H_x}{\partial z}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|^{n} \tag{2.b}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}+j\omega_0E_z\right)^{n+1/4}=\left.\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial H_x}{\partial y}\right|^{n} \tag{2.c}$$

$$\mu\left(\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial t}+j\omega_0\tilde{H}_x\right)^{n+1/4}=\left.\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y}\right|^{n} \tag{2.d}$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}+j\omega_0H_y\right)^{n+1/4}=\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|^{n} \tag{2.e}$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}+j\omega_0H_z\right)^{n+1/4}=\left.\frac{\partial E_x}{\partial y}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial E_y}{\partial x}\right|^{n} \tag{2.f}$$

· 두번째 반복식 (2nd iteration):

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}+j\omega_0E_x\right)^{n+3/4}=\left.\frac{\partial H_z}{\partial y}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|^{n+1} \tag{3.a}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}+j\omega_0E_y\right)^{n+3/4}=\left.\frac{\partial H_x}{\partial z}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|^{n+1} \tag{3.b}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}+j\omega_0E_z\right)^{n+3/4}=\left.\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial H_x}{\partial y}\right|^{n+1} \tag{3.c}$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_x}{\partial t}+j\omega_0H_x\right)^{n+3/4}=\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial E_z}{\partial y}\right|^{n+1} \tag{3.d}$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}+j\omega_0H_y\right)^{n+3/4}=\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|^{n+1} \tag{3.e}$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}+j\omega_0H_z\right)^{n+3/4}=\left.\frac{\partial E_x}{\partial y}\right|^{n+1/2}-\left.\frac{\partial E_y}{\partial x}\right|^{n+1} \tag{3.f}$$

식 (2)와 (3)의 위첨자는 이산 시간 영역에서의 근사위치를 나타낸다. 즉 위첨자 n은 $t=n\Delta t$ 의 시간위치를 나타낸다. 식 (2)와 (3)에 중앙차분근사

(central difference approximation)를 통하여 미분을 근사하면 Envelope ADI-FDTD 차분방정식을 구하게 된다. 이렇게 구해진 차분방정식은 미지수가 양변에 놓이게 되어 음해법으로(implicit manner) 풀어야 하며, 미지수항을 정리하여 얻는 최종 계산식은 삼대각행렬(tri-diagonal matrix) 형태를 갖게 되어 각 방향으로 인접한 3개의 필드 성분을 동시에 풀게 된다. 최종 차분방정식을 다음의 식 (4)와 (5)에 나타내었으며, 최종식은 참고문헌 [3]에서와 같이 (2.a), (2.b), (2.c), (3.a), (3.b), (3.c)의 우변에 나타나는 미지의 자계 성분을 (2.d), (2.e), (2.f), (3.d), (3.e), (3.f)를 이용하여 대입하여 얻은 것이다.

· 첫번째 반복식 (1st iteration):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C_bD_b}{(\Delta y)^2}E_x\Big|_{i+1/2,j-1,k}^{n+1/2}+\left[1+\frac{2C_bD_b}{(\Delta y)^2}\right]E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}-\frac{C_bD_b}{(\Delta y)^2}E_x\Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2}\\
&=C_aE_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n}+\frac{C_bD_a}{\Delta y}H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n}-\frac{C_bD_a}{\Delta y}H_z\Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n}\\
&\quad-\frac{C_b}{\Delta z}\left(H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n}-H_y\Big|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n}\right)-\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta y}\left(E_y\Big|_{i+1,j+1/2,k}^{n}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n}\right)\\
&\quad+\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta y}\left(E_y\Big|_{i+1,j-1/2,k}^{n}-E_y\Big|_{i,j-1/2,k}^{n}\right)
\end{aligned}
\tag{4.a}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2C_bD_b}{(\Delta z)^2}E_y\Big|_{i,j+1/2,k-1}^{n+1/2}+\left[1+\frac{2C_bD_b}{(\Delta z)^2}\right]E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}-\frac{C_bD_b}{(\Delta z)^2}E_y\Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2}\\
&=C_aE_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n}+\frac{C_bD_a}{\Delta z}H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n}-\frac{C_bD_a}{\Delta z}H_x\Big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n}\\
&\quad-\frac{C_b}{\Delta x}\left(H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n}-H_z\Big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n}\right)-\frac{C_bD_b}{\Delta y\Delta z}\left(E_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n}-E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n}\right)\\
&\quad+\frac{C_bD_b}{\Delta y\Delta z}\left(E_z\Big|_{i,j+1,k-1/2}^{n}-E_z\Big|_{i,j,k-1/2}^{n}\right)
\end{aligned}
\tag{4.b}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C_bD_b}{(\Delta x)^2}E_z\Big|_{i-1,j,k+1/2}^{n+1/2}+\left[1+\frac{2C_bD_b}{(\Delta x)^2}\right]E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}-\frac{C_bD_b}{(\Delta x)^2}E_z\Big|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2}\\
&=C_aE_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n}+\frac{C_bD_a}{\Delta x}H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n}-\frac{C_bD_a}{\Delta x}H_y\Big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n}\\
&\quad-\frac{C_b}{\Delta y}\left(H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n}-H_x\Big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n}\right)-\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta z}\left(E_x\Big|_{i+1/2,j,k+1}^{n}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n}\right)\\
&\quad+\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta z}\left(E_x\Big|_{i-1/2,j,k+1}^{n}-E_x\Big|_{i-1/2,j,k}^{n}\right)
\end{aligned}
\tag{4.c}
$$

$$
\begin{aligned}
H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}&=D_aH_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n}+\frac{D_b}{\Delta z}\left(E_y\Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}\right)\\
&\quad-\frac{D_b}{\Delta y}\left(E_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n}-E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n}\right)
\end{aligned}
\tag{4.d}
$$

$$
\begin{aligned}
H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}&=D_aH_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n}+\frac{D_b}{\Delta x}\left(E_z\Big|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2}-E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}\right)\\
&\quad-\frac{D_b}{\Delta z}\left(E_x\Big|_{i+1/2,j,k+1}^{n}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n}\right)
\end{aligned}
\tag{4.e}
$$

$$
\begin{aligned}
H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}&=D_aH_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n}+\frac{D_b}{\Delta y}\left(E_x\Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}\right)\\
&\quad-\frac{D_b}{\Delta x}\left(E_y\Big|_{i+1,j+1/2,k}^{n}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n}\right)
\end{aligned}
\tag{4.f}
$$

· 두번째 반복식 (2nd iteration):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C_bD_b}{(\Delta z)^2}E_x\Big|_{i+1/2,j,k-1}^{n+1}+\left[1+\frac{2C_bD_b}{(\Delta z)^2}\right]E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}-\frac{C_bD_b}{(\Delta z)^2}E_x\Big|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1}\\
&=C_aE_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}-\frac{C_bD_a}{\Delta z}H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{C_bD_a}{\Delta z}H_y\Big|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}\\
&\quad+\frac{C_b}{\Delta y}\left(H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}-H_z\Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}\right)-\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta z}\left(E_z\Big|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2}-E_z\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}\right)\\
&\quad+\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta z}\left(E_z\Big|_{i+1,j,k-1/2}^{n+1/2}-E_z\Big|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.a}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C_bD_b}{\Delta x}E_y\Big|_{i-1,j+1/2,k}^{n+1}+\left[1+\frac{2C_bD_b}{\Delta x}\right]E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}-\frac{C_bD_b}{\Delta x}E_y\Big|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1}\\
&=C_aE_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}-\frac{C_bD_a}{\Delta x}H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}+\frac{C_bD_a}{\Delta x}H_z\Big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}\\
&\quad+\frac{C_b}{\Delta z}\left(H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-H_x\Big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}\right)-\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta y}\left(E_x\Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}\right)\\
&\quad+\frac{C_bD_b}{\Delta x\Delta y}\left(E_x\Big|_{i-1/2,j+1,k}^{n+1/2}-E_x\Big|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.b}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C_bD_b}{(\Delta y)^2}E_z\Big|_{i,j-1,k+1/2}^{n+1}+\left[1+\frac{2C_bD_b}{(\Delta y)^2}\right]E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}-\frac{C_bD_b}{(\Delta y)^2}E_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1}\\
&=C_aE_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}-\frac{C_bD_a}{\Delta y}H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{C_bD_a}{\Delta y}H_x\Big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}\\
&\quad+\frac{C_b}{\Delta x}\left(H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-H_y\Big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}\right)-\frac{C_bD_b}{\Delta y\Delta z}\left(E_y\Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}\right)\\
&\quad+\frac{C_bD_b}{\Delta y\Delta z}\left(E_y\Big|_{i,j-1/2,k+1}^{n+1/2}-E_y\Big|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.c}
$$

$$
\begin{aligned}
H_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}&=D_aH_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{D_b}{\Delta z}\left(E_y\Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}\right)\\
&\quad-\frac{D_b}{\Delta y}\left(E_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1}-E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.d}
$$

$$
\begin{aligned}
H_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}&=D_aH_y\Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}+\frac{D_b}{\Delta x}\left(E_z\Big|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2}-E_z\Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}\right)\\
&\quad-\frac{D_b}{\Delta z}\left(E_x\Big|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.e}
$$

$$
\begin{aligned}
H_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1}&=D_aH_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}+\frac{D_b}{\Delta y}\left(E_x\Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2}-E_x\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}\right)\\
&\quad-\frac{D_b}{\Delta x}\left(E_y\Big|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1}-E_y\Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.f}
$$

여기에서

$$C_a=(4\varepsilon-j\omega_0\varepsilon\Delta t)/(4\varepsilon+j\omega_0\varepsilon\Delta t)$$
$$C_b=(2\Delta t)/(4\varepsilon+j\omega_0\varepsilon\Delta t)$$
$$D_a=(4\mu-j\omega_0\mu\Delta t)/(4\mu+j\omega_0\mu\Delta t)$$
$$D_b=(2\Delta t)/(4\mu+j\omega_0\mu\Delta t)$$

이고 정수 i, j, k 는 공간격자에서 $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$, $z = k\Delta z$ 에 놓여있는 기저함수를 나타낸다. 전자기 필드 성분의 포락선 신호 또한 기존의 FDTD와 같은 공간 격자내에 놓이게 된다. 식 (4)를 이용하여 전계의 포락선 신호들을 음해법으로 방향을 바꾸어 계산한 후 식 (5)와 이전에 계산된 전계의 포락선 신호값을 이용하여 자계에 대한 포락선 신호들은 양해법으로 계산한다. 식 (4)와 (5)의 전계성분을 음해법으로 계산할 때에는 세개의 필드 성분이 연결되어 있는 삼대각 행렬식의 형태이므로 역행렬을 구하지 않고 삼대각행렬 알고리즘을 사용한다[1]~[3],[8]. 식 (4)와 (5)는 중심주파수 ω_0를 0으로 하면 정확하게 기존의 ADI-FDTD[3]와 같은 계산식이 된다.

Envelope ADI-FDTD의 시간 간격에 상관없는 무조건 안정성은 참고문헌 [5]에 기술된 푸리에 방식(Fourier method)과 같은 과정을 통하여 설명할 수 있다. n과 $n+1$시간 사이의 필드들의 포락선 신호간의 관계를 파수영역에서 구할 수 있으며 이것은 다음 식 (6)과 같이 행렬형태로 표시할 수 있다.

합성벡터 X는 파수영역에서 6개의 전계와 자계의 포락선 신호로, $X^{n+1} = [\ \vec{E}^{n+1}\ \ \vec{H}^{n+1}]^T$, $X^n = [\ \vec{E}^n\ \ \vec{H}^n]^T$와 같이 벡터 형태로 나타낼 수 있고, 위첨자 T는 전치행렬을 말한다. 중심주파수 ω_0와 시간간격 Δt에 상관없는 Envelope ADI-FDTD의 안정성을 확인하기 위해서, 행렬 Λ의 고유값(eigenvalue)들을 구해야 하지만 그 과정이 복잡하고 어렵기 때문에 [6]에서와 같이 중심주파수 ω_0와 시간간격 Δt를 변화시키면서 수치적으로 고유값를 구하여보았다. 이렇게 수치적으로 구해진 고유값들의 절대값이 모두 1로 Envelope ADI-FDTD가 수치적으로 안정한 알고리즘임을 확인하였다. 수치적으로 고유값을 구할 때 중심주파수 ω_0의 값은 0부터 $1/(2\Delta t)$ 까지 변화시켰고, 손실이 있는 매질을 가정하게 되면 고유값은 1보다 적은 절대값을 갖는다.

Envelope ADI-FDTD의 수치분산 특성을 기존의 FDTD와 ADI-FDTD[7]의 수치분산 특성과 비교하기위해서 2차원 TM의 자유공간(free-space)에서 선전류원(line current source)이 놓여있는 그림 1과 같

$$X^{n+1} = \Lambda X^n \tag{6}$$

여기에서

$$\Lambda = \begin{bmatrix}
\frac{A_1+B_3}{Q_xQ_yQ_z} & \frac{4C_bD_b(1+C_a)W_x\cdot W_y}{Q_yQ_z} & \frac{4C_aC_bD_b(1+D_a)W_x\cdot W_z}{Q_xQ_z} & j\frac{8C_b^2D_b(1+D_a)W}{Q_xQ_z} & -j\frac{2D_2}{Q_xQ_yQ_z} & -j\frac{2C_bD_a(1+C_a)W_y}{Q_yQ_z} \\
\frac{4C_aC_b(1+D_a)W_x\cdot W_y}{Q_xQ_y} & \frac{A_2+B_1}{Q_xQ_yQ_z} & \frac{4C_bD_b(1+C_a)W_y\cdot W_z}{Q_xQ_z} & -j\frac{2C_bD_a(1+C_a)W_z}{Q_xQ_z} & j\frac{8C_b^2D_b(1+D_a)W}{Q_xQ_y} & -j\frac{2D_3}{Q_xQ_yQ_z} \\
\frac{4C_bD_b(1+C_a)W_x\cdot W_z}{Q_xQ_y} & \frac{4C_aC_bD_b(1+D_a)W_y\cdot W_z}{Q_xQ_z} & \frac{A_3+B_2}{Q_xQ_yQ_z} & -j\frac{2D_1}{Q_xQ_yQ_z} & -j\frac{2C_bD_a(1+C_a)W_x}{Q_xQ_y} & j\frac{8C_b^2D_b(1+D_a)W}{Q_xQ_z} \\
j\frac{8C_bD_b^2(1+C_a)W}{Q_xQ_y} & -j\frac{2C_aD_b(1+D_a)W_z}{Q_yQ_z} & -j\frac{2D_4}{Q_xQ_yQ_z} & \frac{A_4+B_1}{Q_xQ_yQ_z} & \frac{4C_bD_aD_b(1+C_a)W_x\cdot W_y}{Q_xQ_y} & \frac{4C_bD_b(1+D_a)W_x\cdot W_z}{Q_yQ_z} \\
-j\frac{2D_3}{Q_xQ_yQ_z} & j\frac{8C_bD_b^2(1+C_a)W}{Q_xQ_y} & -j\frac{2C_aD_b(1+D_a)W_x}{Q_xQ_z} & \frac{4C_bD_b(1+D_a)W_x\cdot W_y}{Q_xQ_z} & \frac{A_5+B_2}{Q_xQ_yQ_z} & \frac{4C_bD_aD_b(1+C_a)W_y\cdot W_z}{Q_yQ_z} \\
-j\frac{2C_aD_b(1+D_a)W_y}{Q_xQ_y} & -j\frac{2D_6}{Q_xQ_yQ_z} & j\frac{8C_bD_b^2(1+C_a)W}{Q_xQ_z} & \frac{4C_bD_aD_b(1+C_a)W_x\cdot W_z}{Q_xQ_z} & \frac{4C_bD_b(1+D_a)W_y\cdot W_z}{Q_xQ_y} & \frac{A_6+B_3}{Q_xQ_yQ_z}
\end{bmatrix}$$

$$W_\alpha = \frac{1}{\Delta\alpha}\cdot\sin\left(\frac{k_\alpha\Delta\alpha}{2}\right),\quad \alpha = x, y, z$$

$$Q_\alpha = 1 + 4C_bD_bW_\alpha^2,\quad \alpha = x, y, z$$

$$W = W_xW_yW_z$$

$$A_1 = C_a^2 + 4C_aC_bD_b\left(C_aW_x^2 - W_y^2 - W_z^2\right) + 64C_b^3D_b^3W_x^2W_y^2W_z^2$$

$$A_2 = C_a^2 + 4C_aC_bD_b\left(C_aW_y^2 - W_z^2 - W_x^2\right) + 64C_b^3D_b^3W_x^2W_y^2W_z^2$$

$$A_3 = C_a^2 + 4C_aC_bD_b\left(C_aW_z^2 - W_x^2 - W_y^2\right) + 64C_b^3D_b^3W_x^2W_y^2W_z^2$$

$$A_4 = D_a^2 + 4D_aC_bD_b\left(D_aW_x^2 - W_y^2 - W_z^2\right) + 64C_b^3D_b^3W_x^2W_y^2W_z^2$$

$$A_5 = D_a^2 + 4D_aC_bD_b\left(D_aW_y^2 - W_z^2 - W_x^2\right) + 64C_b^3D_b^3W_x^2W_y^2W_z^2$$

$$A_6 = D_a^2 + 4D_aC_bD_b\left(D_aW_z^2 - W_x^2 - W_y^2\right) + 64C_b^3D_b^3W_x^2W_y^2W_z^2$$

$$B_1 = 16C_b^2D_b^2\left(W_x^2W_y^2 - C_aW_y^2W_z^2 - D_aW_z^2W_x^2\right)$$

$$B_2 = 16C_b^2D_b^2\left(W_y^2W_z^2 - C_aW_z^2W_x^2 - D_aW_x^2W_y^2\right)$$

$$B_3 = 16C_b^2D_b^2\left(W_z^2W_x^2 - C_aW_x^2W_y^2 - D_aW_y^2W_z^2\right)$$

$$D_1 = C_bW_y\left(16C_b^2D_b^2(1+D_a)W_x^2W_z^2 + 4C_bD_b(1-D_a^2)W_x^2 + 4C_bD_b(D_a-C_a)W_z^2 - C_a - D_a^2\right)$$

$$D_2 = C_bW_z\left(16C_b^2D_b^2(1+D_a)W_y^2W_x^2 + 4C_bD_b(1-D_a^2)W_y^2 + 4C_bD_b(D_a-C_a)W_x^2 - C_a - D_a^2\right)$$

$$D_3 = C_bW_x\left(16C_b^2D_b^2(1+D_a)W_z^2W_y^2 + 4C_bD_b(1-D_a^2)W_z^2 + 4C_bD_b(D_a-C_a)W_y^2 - C_a - D_a^2\right)$$

$$D_4 = D_bW_y\left(16C_b^2D_b^2(1+C_a)W_x^2W_z^2 + 4C_bD_b(C_a-D_a)W_x^2 + 4C_bD_b(1-C_a^2)W_z^2 - C_a^2 - D_a\right)$$

$$D_5 = D_bW_z\left(16C_b^2D_b^2(1+C_a)W_y^2W_x^2 + 4C_bD_b(C_a-D_a)W_y^2 + 4C_bD_b(1-C_a^2)W_x^2 - C_a^2 - D_a\right)$$

$$D_6 = D_bW_x\left(16C_b^2D_b^2(1+C_a)W_z^2W_y^2 + 4C_bD_b(C_a-D_a)W_z^2 + 4C_bD_b(1-C_a^2)W_y^2 - C_a^2 - D_a\right)$$

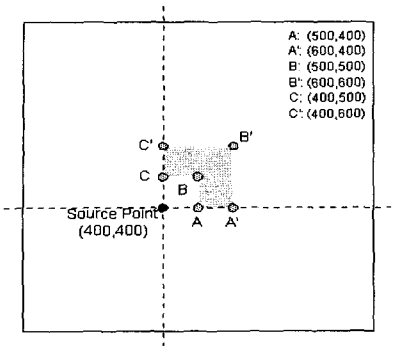
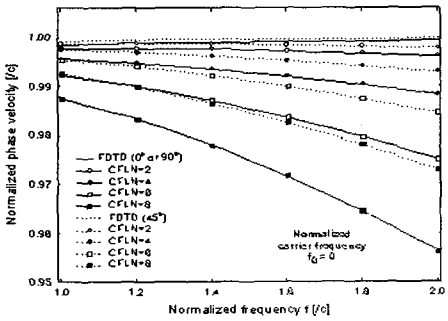


그림 1. 2-D TM의 경우에 해당하는 자유공간에서 방사하는 선 전류원 구조. 6개의 전류원과 떨어진 관찰 지점이 있으며, 괄호 안의 값은 관찰지점의 위치를 나타낸다. 해석영역의 크기는 $10\lambda_0 \times 10\lambda_0$이다.

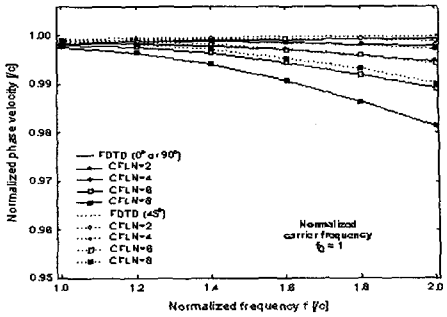
Fig. 1. A line current source model radiating in free-space for 2-D TM case. There are 6 observation points separated from the line current source. The value in parenthesis is a location of the observation points. The problem size is $10\lambda_0 \times 10\lambda_0$.

은 구조를 해석하였다. 전류원과 떨어진 지점에 위치한 6개의 관찰 지점(observation point)은 축방향과 대각선 방향에 놓여있으며, AA′, BB′, CC′을 통과하는 평면파의 진행 방향(wave-propagation angle)은 각각 0° , 45° , 90° 이다. 6개의 관찰 지점에서 수치적인 위상속도를 구하기 위해서 시간영역에서 전계성분을 저장한 후 수치적인 전파상수 $\tilde{\beta}$를 푸리에 영역(또는 위상영역)에서 구하였다[1],[7].

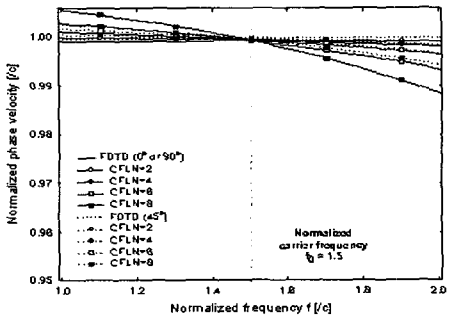
그림 2에서는 위에서 기술한 Envelope ADI-FDTD의 정규화된 수치적인 위상속도 $\tilde{v}_p = \omega/(\tilde{\beta}c)$를 서로 다른 중심주파수 ω_0=0 , $2\pi c$, $3\pi c$에 따라 보여주



(a)



(b)



(c)

그림 2. 서로 다른 중심주파수에 대한 Envelope ADI-FDTD의 정규화된 수치적인 위상속도 (a) $\omega_0 = 0$, (b) $\omega_0 = 2\pi c$, (c) $\omega_0 = 3\pi c$. Envelope ADI-FDTD는 CFLN = 2, 4, 6, 8에 대하여 해석하였으며, FDTD는 CFLN =1 이다. 전파방향이 0°에 해당하는 위상속도는 실선으로 45°에 해당하는 것은 점선으로 표시하였고, 공간의 격자크기는 모두 $\Delta = \Delta x = \Delta y = \lambda/100$ 이다.

Fig. 2. Normalized numerical phase velocity of the Envelope ADI-FDTD with different carrier frequencies (a) ω_0=0, (b) ω_0=2π c, (c) ω_0=3π c. The results of the Envelope ADI-FDTD are obtained with CFLN = 2, 4, 6, 8. The reference curve of the traditional FDTD is obtained with CFLN = 1. The wave-propagation angle of solid lines is 0° and that of dotted lines is 45°. Square grid is used for all the cases with $\Delta = \Delta x = \Delta y = \lambda/100$.

고 있다. Envelope ADI-FDTD의 해석에서 시간간격은 기존의 FDTD의 CFL 안정조건에 의해 제한되는 최대값과의 비율로 CFLN= $\Delta t/\Delta_{CFL}$과 같이 정의하여 나타내었다. 그림 2(a)는 중심주파수 ω_0가 0으로

필드의 포락선이 아닌 그 자체를 해석한 것과 같기 때문에 기존의 ADI-FDTD[7]의 결과와 동일하다. 실선(0℃ 또는 90℃ 전파방향)과 점선 (45℃ 전파방향)의 차이는 수치해석 영역내에서 방향에 따라 전파속도가 차이가 나는 것을 보여준다(anisotropy of numerical wave propagation). 시간간격을 주파수 ω_0를 기준으로 그 주변에서 이상적인 정규화된 위상속도 1과 차이가 많이 나는 것을 관찰할 수 있다. 그러므로, 중심주파수 ω_0를 적절히 결정하게 되면 높은 주파수영역에서도 수치적인 위상속도를 이상적인 값에 가깝도록 만들어줄 수 있게 된다. 즉, Envelope ADI-FDTD는 필드의 포락선을 해석함으로써 높은 주파수 대역에서의 수치정확성(numerical accuracy)을 향상시킬 수 있다. 이러한 특성은 관심주파수의 파장에 비해서 전기적으로 매우 세밀한 구조를 해석하는 경우 수치정확성을 유지하면서 시간간격을 기존의 ADI-FDTD보다도 더 키울 수 있으므로 효율적인 알고리즘으로 사용이 가능하다. 특히 단일 주파수 또는 제한된 밴드폭의 응답을 구하고자 할 때 Envelope ADI-FDTD는 계산량(computational burden)을 효율적으로 줄일 수 있는 전자기해석 방법임을 알 수 있다.

Ⅲ. 결 론

Envelope ADI-FDTD의 수치적인 특성을 해석하여 기존의 FDTD와 ADI-FDTD와 비교하였다. Envelope ADI-FDTD는 시간간격 Δt와 중심주파수 ω_0의 값과 관계없이 수치적으로 안정하며, 기존의 ADI-FDTD의 단점인 높은 주파수 대역에서의 정확도 문제를 개선시킬 수 있는 방법임을 확인하였다. 해석결과로부터 전기적으로 매우 작은 구조를 갖는 해석의 단일주파수 응답이나 제한대역폭 응답을 구하는데 Envelope ADI-FDTD가 효과적으로 적용될 수 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Taflove, S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 2nd Ed.*, Norwood, MA: Artech House, 2000.

[2] T. Namiki, "3-D ADI-FDTD method unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwells equations", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 48, pp. 1743-1748, Oct. 2000.

[3] F. Zheng, Z. Chen and J. Zhang, "Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite difference time-domain method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 48, pp. 1550-1558, Sep. 2000.

[4] H. Rao, R. Scarmozzino and R. M. Osgood, Jr., "An improved ADI-FDTD method and its application to photonic simulations", *IEEE Photonics Tech. Lett.*, vol. 14, pp. 477-479, Apr. 2002.

[5] F. Zheng, Z. Chen, "Numerical dispersion analysis of the unconditionally stable 3-D ADI-FDTD method", *IEEE Microwave Theory and Tech.*, vol. 49, pp. 1006-1009, May 2001.

[6] S. D. Gedney, G. Liu, J. A. Roden and A. Zhu, "Perfectly matched layer media with CFS for anunconditionally stable ADI-FDTD method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 49, pp. 1554-1559, Nov. 2001.

[7] T. Namiki, K. Ito, "Investigation of numerical errors of the two-dimensional ADI-FDTD method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 48, pp. 1950-1956, Nov. 2000.

[8] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, New York, NY: Cambridge Press, 1988.

주 세 훈

1997년 2월: 한양대학교 전파공학과 (공학사)
1999년 2월: 한양대학교 전파공학과 (공학석사)
1999년 3월~2000년 2월: 서울대학교 수중음향특화연구센터 연구원
2000년 3월~현재: 한양대학교 전자통신전파공학과 박사과정
2002년 9월~현재: 서울대학교 수중음향특화연구센터 연구원
[주 관심분야] 안테나 및 마이크로파 회로 설계, 전자파 수치해석

정 경 영

1996년 2월: 한양대학교 전파공학과 (공학사)
1998년 2월: 한양대학교 전파공학과 (공학석사)
1998년 1월~2000년 4월: Hynix 연구원
2000년 5월~현재: Pantech & Curitel 연구원
[주 관심분야]이동통신용 안테나 및 마이크로파 회로 설계, 전자파 수치해석

김 형 훈

1986년 2월: 전남대학교 계산통계학과 (이학사)
1988년 2월: 한국과학기술원 전산학과 (이학석사)
1988년 3월~1990년 9월: 기아자동차 기술센터 연구원
1990년 9월~1994년 7월: 휴먼컴퓨터 선임연구원
1995년 3월~현재: 전남대학교 계산통계학과 박사과정
1994년 9월~현재: 광주여자대학교 컴퓨터공학과
[주 관심분야] 컴퓨터 프로그래밍

김 형 동

1984년 2월: 서울대학교 공과대학 전자공학과 (공석사)
1986년 2월: 서울대학교 공과대학 전자공학과 (공학석사)
1992년 5월: The University of Texas at Austin (PH. D) 마이크로공학 전공
1989년 5월~1992년 5월: Microwave Research Lab., Dept. of Electrial and Computer Eng., The University of Texas at Austin: Research Assistant
1992년 6월~1993년 1월: Microwave Research Lab., Dept. of Electrial and Computer Eng., The University of Texas at Austin: Postdoctoral Fellow
1993년 3월~1996년 2월: 한양대학교 전파공학과 전임강사
1996년 3월~2001년 2월: 한양대학교 전파공학과 조교수
2001년 3월~현재: 한양대학교 전자전기공학부 부교수
[주 관심분야]이동통신용 안테나, 마이크로파 회로, 초음파 공학 전자파 수치해석, 웨이블릿 변환의 수치해석 응용, EMI/EMC 해석