

## 균열이 있는 보의 모델링 및 동적 해석에 관한 연구

홍성욱#, 김만달\*, 이종원\*\*

### A study on the Modeling and Dynamic Analysis of Cracked Beam Structures

Seong-Wook Hong<sup>#</sup>, Man-Dal Kim<sup>\*</sup> and Chong-Won Lee<sup>\*\*</sup>

#### ABSTRACT

This paper presents an efficient modeling and dynamic analysis method for open cracked beam structures. An equivalent bending spring model is introduced to represent the structural weakening effect in the presence of cracks. The proposed method adopts the exact dynamic element method (EDEM) to avoid the inconvenience and numerical errors in association with re-meshing the structural model with the crack position changed. The proposed modeling method is validated through a series of simulation and experiments. First, the proposed method is rigorously compared with a commercial finite element code. Then, two kinds of experiments are performed to validate the proposed modeling method. Finally, a diagnostic scheme for open cracked beam structures is proposed and demonstrated through a numerical example.

**Key Words** : Open crack(열린 균열), Flexibility(유연성), Finite element method(유한 요소법), beam(보), Exact dynamic element(엄밀한 동적 요소), Natural frequency(고유진동수), Modal testing(모드 시험)

#### 1. 서론

균열은 시간에 따라 점차 진전되면서 결국 구조물의 파괴를 일으키는 매우 위험한 결함이다. 따라서 균열을 조기에 진단하는 것은 구조물의 안전성을 확보하는데 핵심적인 일이 되고 있다. 일반적으로 구조물에 균열이 발생하게 되면 균열 부위에서의 응력집중으로 인해 해당 부위에 큰 강성의 변화를 일으키게 되며 상대적으로 큰 변형이 발생하는 것으로 알려져 있다. 따라서 균열의 발생은 궁극적으로 구조물의 동특성에 큰 영향을 미치게 된다. 균열의 발생에 따른 이러한 동특성 변

화를 이용하여 구조물을 훼손하지 않는 비파괴적 방법으로 균열을 진단하기 위해 많은 연구가 있어 왔다.<sup>1-12</sup>

동특성 검사에 의해 균열을 진단하기 위해서는 균열 현상에 대한 적절한 모델링과 동시에 전체 구조물에 미치는 영향에 관한 연구가 선행되어야 한다. 근래 균열에 대한 모델링 및 이를 이용한 진단 방법에 대한 많은 연구가 수행되어 왔으며 특히 보 구조물을 중심으로 파괴역학의 개념을 도입하여 균열의 진행에 따른 구조 강성의 변화를 표현하려는 노력이 있어 왔다. 그러나 구조물의 진동에 의해 균열이 열리거나 닫히는 거동을 할

· 2002년 12월 27일 접수  
# 교신저자, 금오공과대학교 기계공학부  
Email : swhong@kumoh.ac.kr, Tel : (054) 467-4214  
\* 금오공과대학교 대학원  
\*\* 한국과학기술원 기계공학과

경우에는 비선형적인 특성을 보이게 되므로 모델링 및 해석 결과의 일반화에 한계가 있는 실정이다. 따라서 대부분의 연구는 아직까지 열린 균열을 중심으로 진행되어 왔다.<sup>2-11</sup> 특히, 최근에는 열린 균열 및 균열 있는 구조물의 효율적 모델링 방법과 해석 방법<sup>2,4</sup>, 그리고 이러한 개념을 기초로 한 균열 진단 방법 연구<sup>5-11</sup> 등이 다양하게 진행되고 있다. 비록 Chondras 등이 제안한 방법<sup>12</sup> 과 같이 균열이 열리거나 닫혔을 때의 변화를 2 단계의 선형식으로 근사화하는 등의 방식으로 비선형성을 적극 도입하려는 노력이 최근 활발히 진행되고 있으나 실용적인 문제에 적용되기 위해서는 보다 많은 노력이 필요한 것으로 파악되고 있다.

본 연구에서는 열린 균열이 있는 보 구조물의 효율적인 모델링 방법과 이를 기초로 한 균열 진단 방법을 제안하였다. 먼저, 열린 균열에 의한 강성저하 효과를 표현하기 위해 균열 위치에서의 각 변위에 대한 스프링 모형을 적용하였다. 즉, 열린 균열에 의해 발생하는 강성저하 효과를 기존의 연구<sup>3-5</sup> 에서 많이 채용되어 왔던 유연성(Flexibility) 대신 굽힘 각변위 스프링으로 모형화하는 방법에 대해 기술하였다.

또한, 본 연구에서는 엄밀한 동적 요소 모델링 방법<sup>13</sup> 을 채용함으로써 메쉬에 따른 불편과 오차를 최소화하는 등, 효율적인 모델링이 가능하도록 하였다. 균열이 있는 보 구조물의 모델링 및 해석에 많이 활용되고 있는 기존의 모델링 방법, 예컨대, 전달행렬법이나 유한요소방법 등의 방법에서는 균열의 위치에 따라 메쉬를 다시 해야 하므로 불편할 뿐만 아니라 이에 따른 모델링 오차가 개입되어 정교한 해석에 다소의 문제가 있다. 특히, 균열 진단을 위해서는 균열의 크기 및 위치 변화에 의한 미소한 변화를 적절히 파악하는 것이 매우 중요하므로 모델링 오차를 최소화할 필요가 있다.

제시한 방법의 적정성을 확인하기 위해 균열이 있는 보를 상용 유한요소 코드를 이용한 정밀 분석 결과와 비교하여 적합성을 검증하였다. 또한 두 가지의 실험을 통해 제안된 모델링 방법의 적합성을 검증하였다. 마지막으로, 제안된 방법에 대한 보다 적극적인 응용을 위해 수치예제를 통해 제안된 모델링 방법을 이용하여 균열의 깊이 및 위치에 따른 변화를 분석하였으며 그 결과로부터 균열의 존재를 진단하는 방법을 제안하였다.

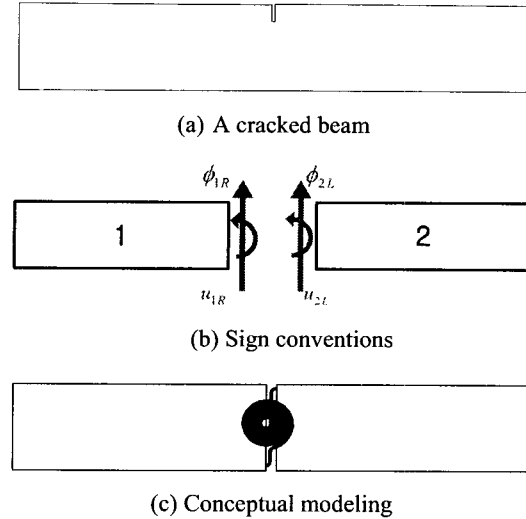


Fig. 1 Modeling of a cracked beam structure

## 2. 균열이 있는 보의 모델링

### 2.1 티모센코 보 이론에 의한 보의 모델링

전단변형과 회전관성을 고려한 보 모델인 티모센코 보의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $u, \phi$  는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고  $f, m$  은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또,  $\rho, G, E$  는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(Shear modulus), 영률(Young's modulus)을 의미하며,  $A$  는 단면적,  $k$  는 단면 보정계수(Shape factor)이다. 또,  $I_d$  는 직경방향 단면 관성 모멘트(Diametral area moment of inertia)를 의미한다.

**2.2 균열 효과의 모델링**

Fig. 1(a)와 같이 보의 특정 부위에 열린 균열이 있는 경우, 균열 부위를 기준으로 Fig. 1(b)와 같이 좌우로 구분하였을 때 다음과 같은 조건이 성립한다고 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{1R} &= u_{2L} \\ f_{1R} &= f_{2L} \\ m_{1R} &= m_{2L} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 1R, 2L 은 각각 보 1 의 우측절점과 보 2 의 좌측절점을 의미한다. 그러나 각변위( $\phi$ )는 균열이 발생한 위치에서 불연속이 되며 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\Delta\phi = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{2L} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{1R} = \frac{1}{k_\theta} m = \frac{h}{EI_d} R(q)m \quad (3)$$

여기서  $e$  를 균열의 깊이,  $h$  를 보의 높이라고 할 때,  $q$  는 무차원 균열깊이 변수  $q = e/h$  로 정의되며 응력집중에 의한 강성 계수 보정 함수는 다음과 같이 표현된다.<sup>1,3</sup>

$$R(q) = 2 \left( \frac{q}{1-q} \right)^2 \{ 5.93 - 19.69q + 37.14q^2 - 35.84q^3 + 13.12q^4 \} \quad (4)$$

따라서 균열에 의한 굽힘 각변위 강성계수는 다음과 같이 모델링을 할 수 있다.

$$k_\theta = \frac{EI_d}{hR(q)} \quad (5)$$

Fig. 1(c)는 균열에 의한 강성변화를 굽힘 각변위 스프링으로 대체하여 모형화한 것을 나타내고 있다.

**2.3 엄밀한 동적 요소에 의한 모델링**

균열 부위를 기준으로 두 개의 요소로 구분한 후 각각의 요소를 엄밀한 동적 요소 모델링 방법에 의해 표현하면 다음과 같다.<sup>13</sup>

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f^*(\xi) \\ m^*(\xi) \end{Bmatrix} = D^b(s, \xi) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u^*(\xi) \\ \phi^*(\xi) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 상첨자 \*는 해당변수에 대한 라플라스 변환 결과를 의미하며 동적행렬은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} D^b(s, \xi) &= \begin{bmatrix} D_{11}(s, \xi) & D_{12}(s, \xi) \\ D_{21}(s, \xi) & D_{22}(s, \xi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1(s, \xi) & d_2(s, \xi) & d_4(s, \xi) & d_5(s, \xi) \\ d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) - d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) & \\ d_4(s, \xi) - d_5(s, \xi) & d_1(s, \xi) - d_2(s, \xi) & & \\ d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) - d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ 2b(1 - \cosh \alpha\xi \cosh \beta\xi) + \frac{\alpha\beta}{c} \{ \mu^2 + \nu^2 \} \sinh \alpha\xi \sinh \beta\xi \} \\ d_1 &= \frac{1}{\Delta} \{ -\mu \sinh \alpha\xi \cosh \beta\xi + \nu \sinh \beta\xi \cosh \alpha\xi \} \\ d_2 &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{(\beta\mu + \alpha\nu)}{\alpha^2 - \beta^2} \sinh \alpha\xi \sinh \beta\xi - \frac{ab - cd}{\alpha^2 - \beta^2} (1 - \cosh \alpha\xi \cosh \beta\xi) \right\} \\ d_3 &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha\beta}{bc} \{ \nu \sinh \alpha\xi \cosh \beta\xi - \mu \sinh \beta\xi \cosh \alpha\xi \} \\ d_4 &= \frac{1}{\Delta} \{ \mu \sinh \alpha\xi - \nu \sinh \beta\xi \} \\ d_5 &= \frac{1}{\Delta} \{ \cosh \alpha\xi - \cosh \beta\xi \} \\ d_6 &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha\beta}{bc} \{ -\nu \sinh \alpha\xi + \mu \sinh \beta\xi \} \\ \alpha^2 &= \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \} \\ \beta^2 &= \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \} \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{(cd - \alpha^2)}{\alpha}, \nu = \frac{(cd - \beta^2)}{\beta}$$

$$a = \rho I_d s^2, b = \frac{1}{EI_d}, c = \rho A s^2, d = \frac{1}{kAG}$$

한편, 이미 앞에서 설명한 바와 같이 균열 위치에서 두 개로 구분한 보의 접합부에서는 각변위에 대한 불연속성이 존재하게 된다. 그러나 변위에서는 연속성이 유지되므로 두 보의 접합부에서 각에 관한 1 개의 자유도가 추가된다. 즉, Fig. 1(b)에서, 보 1 의 우측 절점 횡변위( $u_{1R}$ )와 보 2 의 좌측 절점 횡변위( $u_{2L}$ )가 동일하게 되나 각변위들( $\phi_{1R}, \phi_{2L}$ )은 각각 독립적인 자유도가 되어 두 요소간의 조합은 다음과 같이 특수한 형태를 이루게 된다.

$$\begin{Bmatrix} f_{1L} \\ m_{1L} \\ f_{1R} \\ m_{1R} \\ m_{2L} \\ f_{2R} \\ m_{2R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A+B & A & B & B & B \\ A & A & A & A+k_\theta & -k_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -k_\theta & B+k_\theta & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1L} \\ \phi_{1L} \\ u_{1R} \\ \phi_{1R} \\ \phi_{2L} \\ u_{2R} \\ \phi_{2R} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서 A 와 B 는 각각 보 1, 2 에 관한 요소들의 의미한다. 식(7)과 같이 얻어진 요소행렬을 균열을 포함한 엄밀한 동적 요소 행렬(Exact dynamic element matrix with a crack)로 취급하여 전체 구조물에 대한 전역 행렬을 구하기 위한 조합과정에 활용하면 균열이 있는 구조물을 편리하게 모델링할 수 있다.

### 3. 모델링 방법의 검증

#### 3.1 수치 실험

제안된 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위한 첫 번째 방법으로 균열 보에 균열이 존재하는 경우, 제안된 방법과 상용 유한요소 프로그램을 이용하여 고유진동수를 계산, 비교하였다. 고려한 보는 Fig. 1(a)와 같이 보의 중앙에 균열이 있으며 양단 모두 자유단으로 가정하였다. 자세한 사양은

Table 1 Specification of the numerical beam model

Property	Data
Dimension	L=50cm b=2cm h=5cm
Young's Modulus	$2.08 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Density	7833 kg/m <sup>3</sup>
Poisson Ratio	0.3



Fig. 2 Typical result of finite element analysis for the uniform beam model with a crack at the mid span

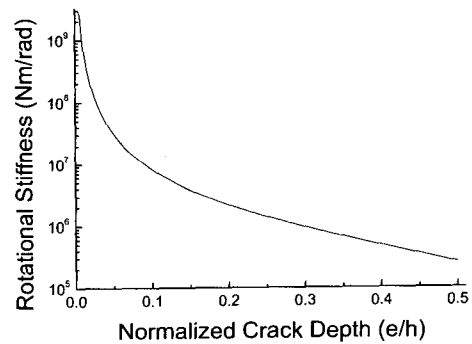


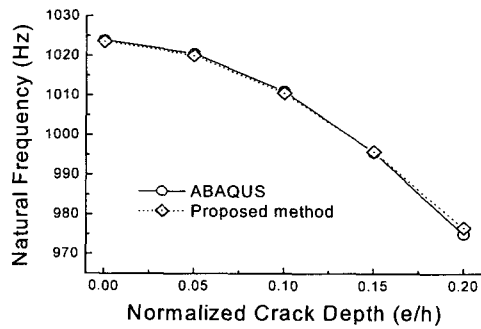
Fig. 3 Equivalent rotational stiffness due to a crack

Table 1 에 주어진 바와 같다. 균열이 있을 때의 동특성 계산을 위한 일반적인 상용 코드로는 ABAQUS<sup>14</sup> 를 이용하였으며 국부적으로 미소한 균열이 존재함을 고려하여 정밀한 모델링을 하여 고유진동수를 계산하였다.

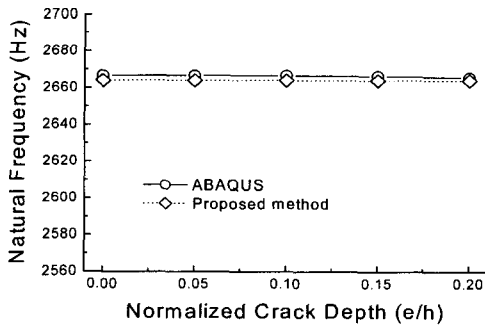
Fig. 2 는 상용 유한 요소 프로그램에 의한 계산결과의 예를 보여주고 있다. 여기서는 요소당 20 절점을 갖는 6 면체형 요소(Hexahedral element)를 이용하였고, 요소의 수는 약 12,000 개를 적용하여 충분한 정밀도를 확보할 수 있도록 하였다. 특히, Fig. 2 에서 알 수 있는 바와 같이 계산정밀도의 향상을 위해 균열이 위치한 보의 중앙부분을 매우 조밀하게 메쉬하였다. 이와 같이 계산된 고

유진동수를 기준으로 두고 제안된 방법에 의해 계산한 고유진동수 결과와 비교하였다.

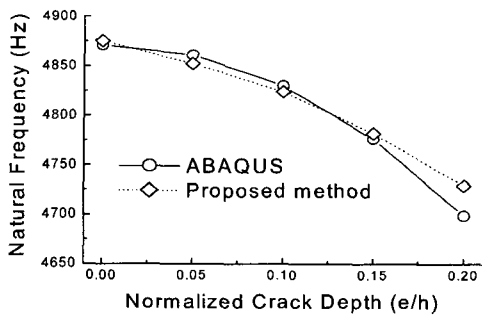
제안된 방법에 의해 모델링을 하기 위해서는 주어진 사양에 대해 균열에 대응되는 굽힘 각변위 스프링 강성계수를 먼저 계산할 필요가 있으며 Fig. 3 은 그 결과를 보여주고 있다. 그림을 보면,



(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 4 Natural frequencies of a uniform beam model with a crack at the mid span by ABAQUS and the proposed method

균열이 얇은 경우 큰 강성을 가지게 되므로 식(3)에 의거, 균열에 의해 구분되는 두 보의 접합면 사이의 각변위차가 작아져서 균열의 효과가 작아지게 됨을 알 수 있다. 균열이 전혀 없는 경우에는 강성이 무한대의 값을 갖게 되므로 각변위차는 없어지게 된다. 반면 균열이 깊어질수록 강성이 작아지게 되어 더욱 큰 각변위차가 유발되며 균열이 동특성에 미치는 영향도 커진다.

Fig. 4 에는 두 방법에 의한 고유진동수 계산 결과를 비교해서 보여주고 있다. 본 예제에서는 제안된 방법을 이용할 경우, 2 개의 요소(또는 균열 요소 1 개)만으로 충분하다. 결과에서 알 수 있는 바와 같이 제안된 방법과 ABAQUS 에 의한 계산 결과가 제시된 3 개 모드에서 모두 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 따라서 제안된 방법에 의한 간단한 모델로부터 상용 프로그램에 이용하여 매우 정교하게 모델링한 결과와 대등한 수준의 정밀도로 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

### 3.2 실험

제안된 모델의 타당성을 확인하기 위하여 두 가지의 실험을 실시하였다. 먼저 균일 보의 중앙에 서로 다른 깊이의 균열을 발생시킨 후 고유진동수를 측정하고 이를 제안된 방법으로 계산한 결과와 비교하였다. 실험에 사용된 시편은 길이가 30cm 로서 중앙에 2mm 의 폭으로 열린 균열을 발생시켰다. Fig. 5 는 실험에 사용된 실제 시편들을 보여주고 있다. Fig. 6 은 실험에 의해 얻어진 고유진동수와 제안된 방법으로 계산한 결과를 비교해서 보여주고 있다. 3 개의 모드에 대해 모두 매우 뛰어난 상관성을 보이고 있음을 알 수 있다. 균열 깊이의 증가에 따라 오차가 조금씩 증가하고는 있으나 모두 0.8% 미만의 오차를 보이고 있어 실제 모델을 정확히 표현하고 있음을 알 수 있다.

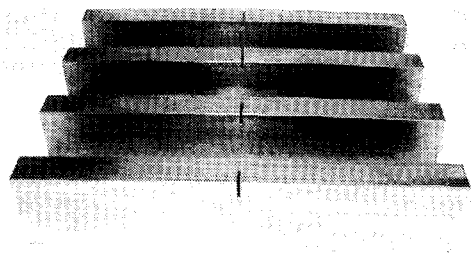
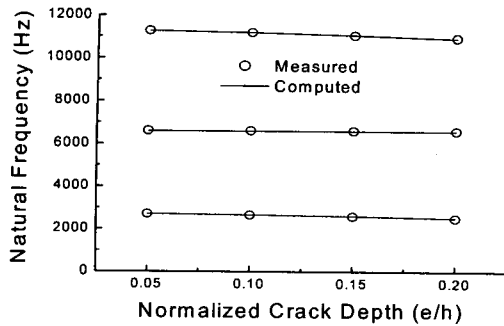
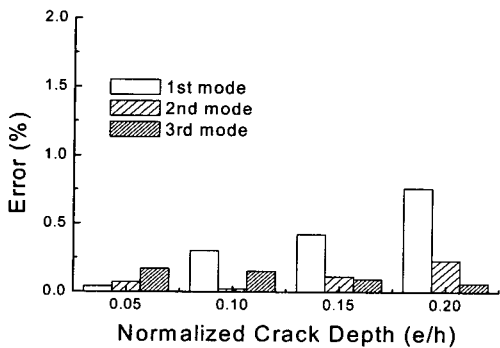


Fig. 5 Open cracked beams for experiment I



(a) First three natural frequencies



(b) Errors of computed natural frequencies

Fig. 6 Comparison of measured and computed natural frequency with the crack depth changed (experiment I)

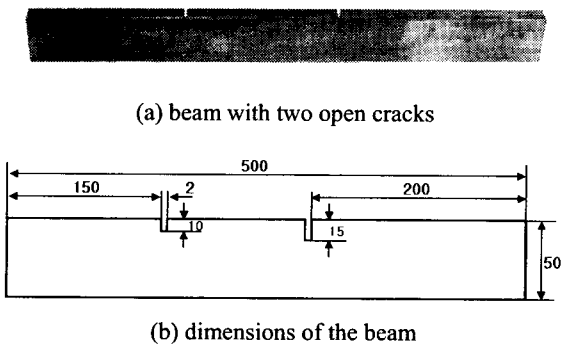


Fig. 7 Experiment II: a uniform beam with two cracks

두 번째 실험으로는 Fig. 7 과 같이 서로 다른 깊이를 갖는 두 개의 균열이 보에 존재하는 시편에 대해 고유진동수를 측정하였고 이를 제안된 방법으로 계산한 결과와 비교하였다. 참조를 위해

Table 2 Comparison of natural frequency in experiment II

Mode	Natural frequency (Hz)			Error(%)  E-P /E x100
	E Experiment	A ABAQUS	P Proposed	
1	919	910	920	0.11
2	2470	2447	2462	0.32
3	4775	4727	4758	0.36

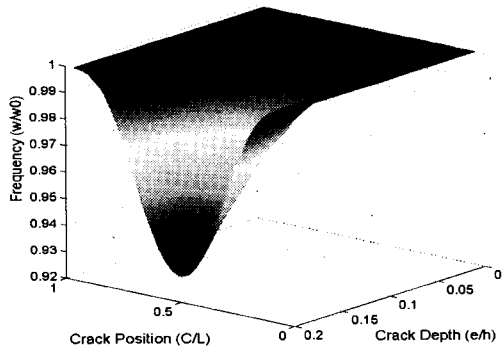
ABAQUS를 이용한 계산도 병행하였다. Table 2는 두 가지 방법에 의한 계산 결과 및 제안된 방법과 실험결과 사이의 오차를 보여주고 있다. 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 균열이 한개 이상 존재하는 경우에도 제안된 방법에 의해 균열 효과를 높은 정밀도로 예측할 수 있음을 확인할 수 있다.

#### 4. 수치 예제

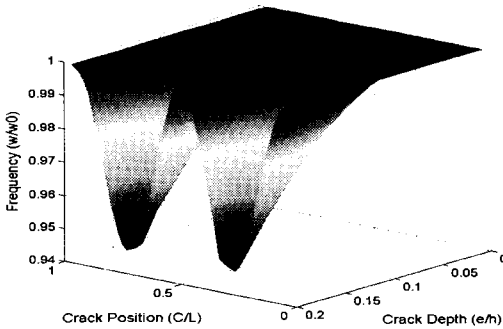
앞서 기술한 균열 효과에 대한 모델링과 검증 과정을 통해, 제안된 방법을 사용하면 균열이 있는 보에 대한 정밀한 해석이 가능함을 확인하였다. 본 절에서는 제안된 방법에 대한 적극적 응용 관점에서 균열 진단에 관련된 수치예제를 제시하고자 한다.

균열 효과에 대한 모델링은 균열의 진단에 직접적인 활용이 가능하다. 균열 모델을 균열 진단에 활용하는 예를 보이기 위해 간단한 보에서 균열의 크기와 위치에 따른 효과를 분석하였다. 앞서 균열 모델을 검증하기 위해 활용하였던 Fig. 1 (a), Table 1의 수치모델에 대해 균열의 위치와 크기가 변할 때의 고유진동수 변화를 Fig. 8에 보여주고 있다. 본 연구에서 제시한 모델링 방법에서는 엄밀한 동적 요소 모델링 방법을 사용하고 있으므로 균열의 위치가 바뀌어도 매쉬를 다시 할 필요가 없고, 균열의 위치를 기준으로 구분되는 보의 좌, 우측 요소의 길이에 관한 데이터만 교체하면 된다. 따라서 매우 효과적이고도 정확한 계산을 할 수 있다.

균열이 1개 존재한다고 가정하면 그 균열의 크기와 위치를 찾는 것은 2개의 고유진동수에 대한 변화를 관찰함으로써 가능하다. 예컨대 균열의 발생에 따른 1, 2차 고유진동수의 변화를 측정했다고 가정하면, Fig. 8의 모드별 고유진동수 변화 선도를 활용하여 균열의 위치와 깊이를 알 수 있다.



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

Fig. 8 Variation of natural frequencies due to a crack: the effect of crack depth and position

즉, Fig. 9 와 같이 각 모드별로 해당 고유진동수의 변화에 대응되는 등고선을 구하고 이 등고선들의 교차점에서 균열의 크기와 위치를 확인할 수 있다. Fig. 10 은 그 한 예로서, 균열에 의해 1 차 고유진동수 2%, 2 차 고유진동수 3%가 각각 감소한 경우의 등고선을 동시에 보여주고 있다. 따라서 등고선이 겹쳐지는 점 P 로부터 균열의 위치와 깊이를 결정할 수 있다. 본 예제의 경우에는 좌우 대칭인 균열 보이므로 동일한 고유진동수 변화가 발생하는 균열의 위치가 좌우 대칭인 두 곳이 될 수 있다.

### 5. 요약 및 결론

본 연구에서는 열린 균열을 있는 보 구조물에 대한 동적 모델링 방법을 제시하였다. 열린 균열

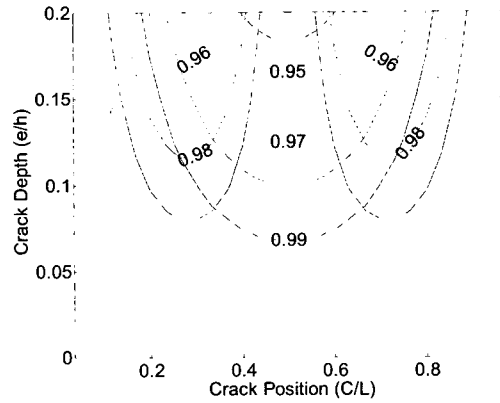


Fig. 9 Contour plot for the first two modes with respect to crack depth and position

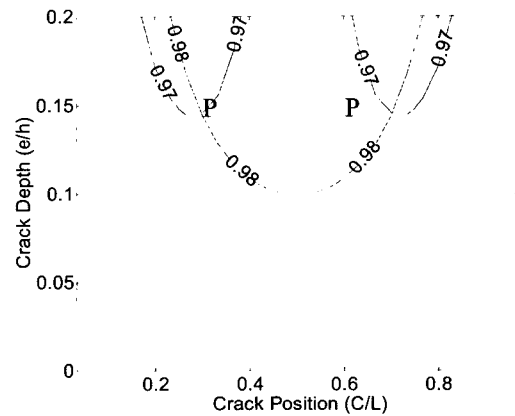


Fig. 10 Determination of the crack depth and position when the first two natural frequencies are shifted by 2,3%, respectively

에 의한 강성 저하 효과를 고려하기 위해 균열 부위를 경계로 발생하는 각변위 차이에 관한 굽힘 스프링으로 모델링하였으며 균열 부위의 위치 변화에 대해 보다 효과적으로 대처할 수 있는 엄밀한 동적 요소 모델링 방법을 도입하였다. 제안된 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위해 상용 유한 요소 프로그램을 이용한 정밀한 모델과 제안된 방법으로 얻어진 간편한 모델의 결과를 비교하였으며 매우 우수한 상관성을 얻을 수 있다. 또한 실제 균열이 있는 보에 대해 실행된 실험과 제안된 방법에 의한 얻어진 고유진동수를 비교한 결과를 통해 매우 정확한 예측이 가능함을 확인하였다.

제안된 모델링 방법의 응용 관점에서 균열의 크기 및 위치에 따른 고유진동수 변화에 관한 등고선을 구했으며 이를 근거로 한 균열의 크기 및 위치를 규명하는 수치 예를 제시하였다. 본 연구에서 제안한 모델링 방법은 균열이 있는 보의 동특성에 대한 정밀한 예측이 가능하도록 함으로서 궁극적으로 균열이 있는 보 구조물에 대한 효과적인 진단에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

### 후 기

이 논문은 금오공과대학교 학술공모과제 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

### 참고문헌

1. Tada, H., Paris, P. and Irwin, G, The Stress Analysis of Cracks Handbook, 2nd ed., St. Louis, Research Cooperation, 1985.
2. Gounaris, G. D. and Papadopoudos, C. A., "Analytical and experimental crack identification of beam structures in air or in fluid," Computer and Structures, Vol. 65, No. 5, pp. 633-639, 1997.
3. Fernandez-Saez, J., Rubio, L. and Navarro, C., "Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 225, No. 2, pp. 345-352, 1999.
4. Zheng, D. Y. and Fan, S. C., "Natural frequency changes of a cracked Timoshenko beam by modified Fourier series," Journal of Sound and Vibration, Vol. 246, No. 2, pp. 297-317, 2001.
5. Yang, X. F., Swamidas, A. S. J. and Seshadri, R., "Crack identification in vibrating beams using the energy method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 244, No. 2, pp. 339-357, 2001.
6. Hjelstad, K. D. and Shin, S., "Crack identification in a cantilever beam from modal response," Journal of Sound and Vibration, Vol. 198, No. 5, pp. 527-545, 1996.
7. Boltezar, M., Strancar, B. and Kuhelj, A., "Identification of transverse crack location in flexural vibration of free-free beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 211, No. 5, pp. 729-734, 1998.
8. Viola, E., Federici, L. and Nobile, L., "Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis," Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 36, pp. 23-35, 2001.
9. Chinchalkar, S., "Determination of crack location in beams using natural frequencies," Journal of Sound and Vibration, Vol. 247, No. 3, 417-429, 2001.
10. Dimarogonas, A. D., "Vibration of cracked structures: a state of the art review," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, pp. 831-857, 1996.
11. Narayana, K. L. and Jebaraj, C., "Sensitivity analysis of local/global modal parameters for identification of a crack in a beam," Journal of Sound and Vibration, Vol. 228, No. 5, pp. 977-994, 1999.
12. Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, D., "Vibration of a beam with a breathing crack," Journal of Sound and Vibration, Vol. 239, No. 1, pp. 57-67, 2001.
13. Hong, S. W., Kim, J. W. and Park, J. H., "A method for determining exact modal parameters of non-uniform, continuous beam structures with damping elements," Journal of the KSPE, Vol. 15, No. 12, 1998, 202-211.
14. ABAQUS User's Manual Version 5.7, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 1997.