

불균일한 매개변수로 정의된 NURBS 곡면에서의 요소망 자동 생성

채수원[#], 박정민^{*}

Automatic Mesh Generation on Poorly Parameterized NURBS Surfaces

Soo-Won Chae[#], Jung Min Park^{*}

ABSTRACT

The NURBS surfaces are widely employed for exchanging geometric models between different CAD/CAE systems. However if the input NURBS surfaces are poorly parameterized, most surface meshing algorithms may fail or the constructed meshes can be ill-conditioned. In this paper presents a new method is presented that can generate well conditioned meshes even on poorly parameterized NURBS surfaces by regenerating NURBS surfaces. To begin with, adequate points are sampled on original poorly parameterized surfaces and new surfaces are created by interpolating these points. And then, mesh generation is performed on new surfaces. With this method, models with poorly parameterized NURBS surfaces can be meshed successfully.

Key Words : Interpolation(보간), Mesh Generation(요소망 생성), NURBS surface(NURBS 곡면), Parameterization(매개변수화)

1. 서론

IGES 규약으로 모델 데이터를 작성할 경우 기하 형상을 나타내기 위해 대부분 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) 곡면을 사용한다. 그러나 실제로 NURBS 곡면상에서 요소망 생성을 수행하는 경우 요소망 생성이 실패하거나 또는 매우 좋지 않은 요소망이 생성되는 경우가 있다. 이는 NURBS 로 표현된 곡면이 기하학적으로는 문제가 없더라도, 매개 변수 평면을 정의하는 값들이 균일하지 않을 때 발생한다. 특히 이러한 현상은 CAD 시스템을 이용한 설계에서 여러 번의 수정

작업을 통해 곡면이 정의되는 경우 자주 발생하게 된다.

위와 같은 경우, 주어진 곡면과 동일한 형상을 가지면서 이상이 없는 곡면을 생성하여야만 한다. 하지만 곡면을 새로 생성하는 경우에 있어서, 기존의 연구들은 주어진 점 데이터들로부터 부드러운 곡면을 생성하는 방법에 대한 연구가 대부분이다.¹⁻⁴

반면 Razdan⁵ 의 경우 주어진 곡면과 형상이 유사하며, 매개 변수 영역도 이상이 없는 곡면을 생성하는 기법을 제안했지만, 4 개의 경계 곡선을 새로 생성한다는 점과, 조건식에 만족될 때까지

... 2002 년 12 월 23 일 접수
교신저자, 고려대학교 기계공학과
Email : swchae@korea.ac.kr, Tel : (02) 3290-3367
* 한국과학기술원 기계공학과

표본점(sampling points)을 추가하기 때문에 지나치게 많은 표본점이 고려되어, 계산 시간과 곡면의 크기 측면에서 볼 때 실제 문제에 대해 적용하기 어렵다는 점이 있다.

본 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위해서 주어진 NURBS 곡면이 요소망 생성에 부적합할 경우 보간(interpolation)방법을 이용, 본래의 곡면과 유사한 곡면을 새로 생성한 후 요소망을 생성하는 방법을 개발하였다.

2. 요소망 생성에 부적합한 곡면

NURBS 는 매듭값, 조정점, 가중치가 기저 함수와 맞물려 형상의 결정에 관여하게 되므로, 일반적으로 매개 변수와 실제 좌표사이의 길이비가, 각 구간별로 일정하지 않다. 그런데 이런 구간별 길이비가 극단적인 경우도 존재한다. Fig. 1 은 이러한 내용을 매개 변수 구간과 실제 구간을 직선으로 단순화 시켜 나타낸 것이다.

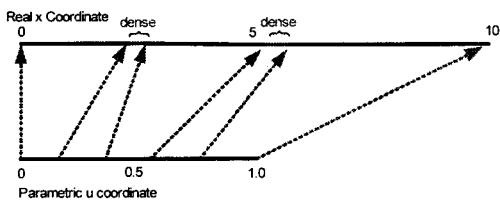
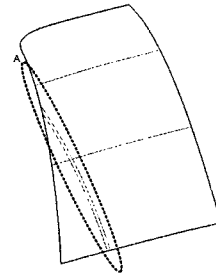
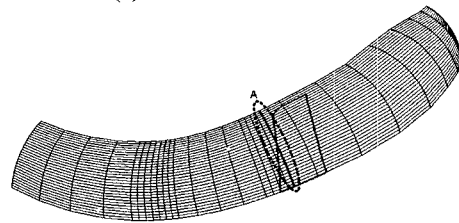


Fig. 1 Poorly parameterized line

이렇게 매개 변수 구간과 실제 곡면상의 거리비가 구간별로 큰 차이가 있음에도 불구하고, 형상은 제대로 표현할 수 있기에 이러한 모델도 NURBS 로 표현된 적합한 곡면이라 볼 수 있다. 이 같은 상황에 대해 Farin, Razdan 은 "매개변수가 부적절 한(poorly parameterized)"한 NURBS 라 표현하고 있다.⁶ 따라서 형상은 제대로 표현할 수 있다 하더라도 이 같은 경우의 트림된(trimmed) NURBS 곡면에서 요소망을 생성해야 하는 경우는 문제가 있다. 특히 간접 접근 기반의 방법들은 평면 요소망 결과를 곡면으로 변환시에 매개 변수 평면과 실제 곡면과의 관계가 요소망 생성 결과의 품질에 크게 작용한다.⁷ Fig. 2 는 구간별로 매개 변수 영역과 실제 곡면과의 길이비가 극단적인 경우의 트림된 NURBS



(a) Trimmed NURBS surface



(b) Basis NURBS surface

Fig. 2 Poorly parameterized surface

곡면(a)과 그 기저 곡면(b)을 나타낸 것이다.

Fig. 2 에서 내부 격자는 전체 매개 변수 영역을 등간격으로 나누었을 때 실제 곡면상의 구간으로 표시한 것이다. A 로 점선 표시한 부분은 길이비가 주위의 것과 크게 차이가 나는 부분이다. 이 부분에서는 같은 크기의 매개 변수 영역에 대해 실제 구간의 길이가 주위에 비해 크게 작다.

Fig. 3 은 이 같은 곡면에 대해 영역 분할법을 적용하여 곡면 요소망을 생성한 결과를 나타낸 것이다. 그림에서 보듯이 결과 요소망이 일부 구간에 심하게 몰리거나, 찌그러지는 등의 좋지 않은 결과를 얻게 된다.

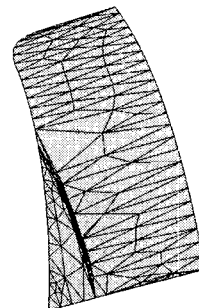


Fig. 3 Meshing result on poorly parameterized surface

3. 곡면의 재생성

이상과 같은 문제점을 해결하기 위해 본 논문에서는 입력된 모델을 토대로 기저(basis)곡면을 다시 생성한 후, 생성된 곡면을 트림된 bicubic B-스플라인 곡면으로 다시 구성하는 방법을 제안하였다.

기저 NURBS 곡면을 재생성하는 방법으로는 주어진 NURBS 곡면으로부터 적절하게 표본점(sampling points)들을 추출한 후, 이 점들을 보간하는 방법을 사용하여 생성하였다. 이 과정은 아래와 같이 크게 4 단계로 이루어진다.

- ① 곡면의 이상 유무 검사
- ② 원래 곡면으로부터 표본점 선택
- ③ 표본점들로부터 보간에 의한 곡면 생성
- ④ 경계 곡선에 대한 매개변수곡선(parameter space curve) 재생성

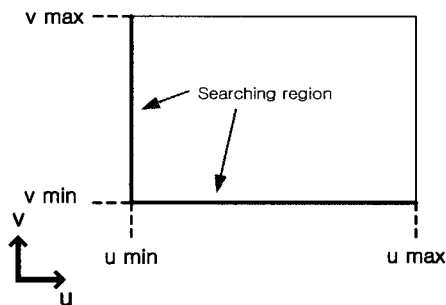
3.1 곡면의 이상 유무 검사

먼저 IGES 파일로부터 NURBS 곡면을 읽어들이고, 입력받은 NURBS 곡면이 요소망 생성에 적합한지를 판단해야 한다.

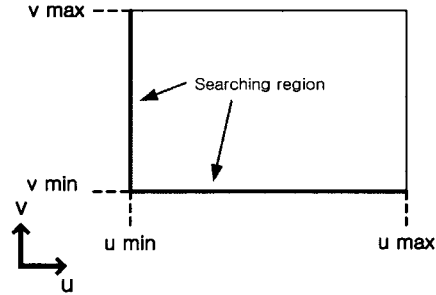
요소망 생성에 적합한 곡면의 판단은 매개변수 영역과 대응하는 실제 곡면상의 길이비를 검사구간에 대해 계산하여 허용된 기준치를 크게 벗어나는지를 판단하여 결정하였다. 좀 더 자세히 설명하면 다음과 같다.

주어진 곡면의 매개변수 평면에서 (u, v_{min}) 영역과 (u_{min}, v) 영역에 대해 Fig. 4 와 같이 선택한 후, 판단 조건을 적용한다.

선택된 u 방향, v 방향 영역에 대해 임의로 설



(a) Parametric plane



(b) 3D surface

Fig. 4 Searching region on surface

정한 50 개의 구간으로 나눈다. 나누는 간격은 매개변수평면에서의 등간격으로 나누어 각 구간별로 실제 3D 곡면에서의 길이를 구하여 저장해둔다. 위 과정을 수행하면 각각의 방향으로 50 개의 값을 얻는데, 구간별 길이값들은 일반적으로 균일하지 않다. 이 구간들에 대해 각각 아래 조건을 적용함으로써 곡면의 적합성 여부를 판단하게 된다.

식(1)에서 k 는 경험적으로 결정된 것이며, v 방향의 경우, 검사 영역이 u 방향에서 v 방향으로 바뀌는 점을 제외하고는 위와 동일하다.

$$\begin{aligned}
 & \text{if } L_i > kC \text{ or } L_i < \frac{C}{k} \\
 & \text{then surface is poorly parameterized surface} \\
 & \text{where } C = (\text{surface chord length at } v=v_{min})/50, \\
 & L_i : \text{length on surface between } S(u_i, v_{min}) \text{ and } S(u_{i-1}, v_{min}) \quad (1) \\
 & i = 0, \dots, 50, k = 4.5
 \end{aligned}$$

3.2 표본점(Sampling points)의 결정

원래 곡면으로부터 표본점을 추출해 내기 위해서는 추출할 점들의 개수가 먼저 결정되어야 하며, 개수가 결정되면 적절한 위치에서 점들을 선택하여야 한다. 표본점의 개수 결정에 있어서, 표본점은 많을수록 좀더 원래의 곡면과 유사한 곡면을 얻을 수 있겠지만, 개수를 많게 설정하는 것은 현실적으로 문제가 많다.

첫째로는 사용하고자 하는 보간 방법이 통과하고자 하는 점들의 개수에 비례하는 개수의 선형계(linear algebra system)에 대한 해를 구하는 것이기 때문에 참조해야할 점들의 수가 많아질 수록, 해를 구하는 시간이 오래 걸리게 된다.

두번째 문제점은, 표본점이 많을수록, 새로 생성될 곡면의 조정점도 그만큼 비례해서 늘어난다는 것이다. 이는 NURBS 곡면 하나에 대한 데이터량의 증가를 의미하는 것이다. 원래 NURBS 곡면의 조정점 개수가 수십여개인 경우, 같은 형상을 표현하고자 하는 새로운 곡면은 수천개의 조정점을 가질 수도 있어 비경제적이라 할 수 있다.

따라서 주어진 곡면을 근사적으로 표현하고자 할 때 가능한 적은 수의 점들이 선택되어 보간 방법에 이용되어야 한다. 본 연구에서는 원래 곡면으로부터 추출할 점의 개수를 u, v 방향으로 각각, 2 차 편미분이 가능한 C² 이상인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어서 결정하였다.

u 방향 또는 v 방향의 기저 함수가 C² 이상인 경우, 식(2)을 이용하여 필요한 점의 개수를 구하였다.⁸

$$n = (b-a) \left(\frac{\sup_{a \leq t \leq b} \|C''(t)\|}{8\epsilon} \right)^{1/2} \quad (2)$$

식(2)에서 ϵ 은 주어진 곡선을 $a \leq t \leq b$ 인 매개변수 구간 사이에서 직선구간으로 근사 시킬 때 허용되는 최대 오차이다. 이 식을 이용해 곡선을 직선의 집합으로 근사화 시키고자 할 때 필요한 점들의 개수를 알 수 있다.

식(2)는 곡선에 대한 것이므로 이것을 곡면에 대한 식으로 적용해야 한다. 이는 평가하고자 하는 매개변수좌표(parametric coordinate)와 다른 방향의 매개변수좌표는 고정시킴으로서 쉽게 적용된다. 따라서 위 식을 곡면에 적용한 식은 다음과 같다.

$$n = |u_{\max} - u_{\min}| \left(\frac{\sup_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \|S_{uu}(u, v_{fixed})\|}{8\epsilon_u} \right)^{1/2} \quad \text{at } u \text{ direction} \quad (3)$$

$$n = |v_{\max} - v_{\min}| \left(\frac{\sup_{v_{\min} \leq v \leq v_{\max}} \|S_{vv}(u_{fixed}, v)\|}{8\epsilon_v} \right)^{1/2} \quad \text{at } v \text{ direction}$$

평가식을 전체 곡면 영역에 대해 나누어 적용하여 각각의 결과값을 구한 후, 이들의 평균값을 최종적인 표본점개수로 결정한다.

평가하고자 하는 방향의 기저함수(basis function)의 차수가 2 차 이하인 경우 위와 같은 방법은 사용할 수 없다. 이러한 경우에는 다음 식을 적용하였다.

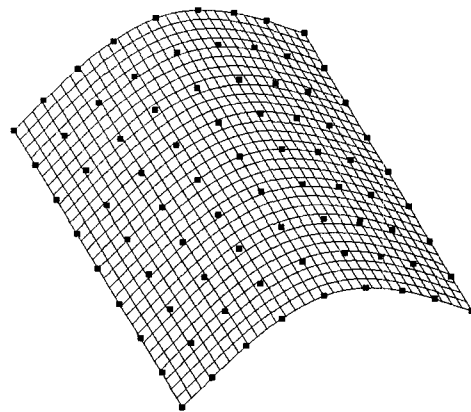
$$\begin{aligned} & (\# \text{ of control points at } u \text{ basis function} - p) \times 3 \quad \text{at } u \text{ direction} \\ & (\# \text{ of control points at } v \text{ basis function} - q) \times 3 \quad \text{at } v \text{ direction} \\ & p: u \text{ direction degree, } q: v \text{ direction degree} \end{aligned} \quad (4)$$

식의 앞부분 항(# of control points - p)의 경우 NURBS 에서 매듭 벡터(knot vector)에서 최대, 최소값의 중복 구간을 제외한 나머지 구간의 개수가 된다. 각 구간별로 3 차 곡선을 만들고자 한다면 최소 4 개의 점이 필요하게 되며, 중복 점들의 개수를 충분히 고려하여, 구간의 개수에 3 배를 취한 만큼의 수라면 충분하다고 판단하였다.

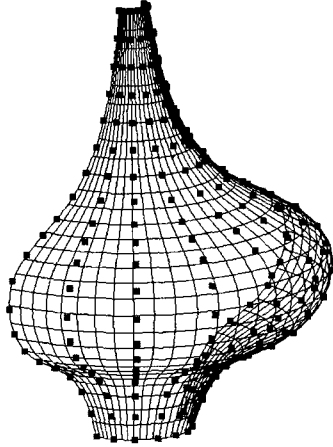
이와 같이 개수를 결정한 후에는 u 매개변수 방향의 개수를 n+1 개, v 매개변수 방향으로 m+1 개의 표본점 좌표를 결정한다. 이러한 표본점들은 각 방향으로 서로간의 거리가 가능한 등간격을 유지되도록 선택한다. Fig. 5 는 곡면위에서 이러한 표본점을 선택한 모습을 나타낸 것이다.

3.3 보간에 의한 곡면

보간으로서 곡면을 생성하는 경우, 같은 표본점들이 주어져도 기저 함수의 차수, 각 조정점에 대한 매듭 벡터의 매개 변수화, 경계 조건(end condition)



(a) u direction degree=3, v direction degree=1



(b) u direction degree=4, v direction degree=3

Fig. 5 Sampling points on surfaces

의 고려 여부에 따라 조금씩 다른 결과를 얻게 되며, 이에 대해서는 많은 연구들이 발표된 바 있다.¹⁻³

본 연구에서는 다른 방법들에 비해 구현이 용이하며, C^2 연속성을 보장하는 bicubic B-스플라인 보간법을 사용하였다.⁹⁻¹⁰ 곡면의 보간은 매개 변수값의 결정 과정과 조정점을 구하기 위한 선형계의 계산 과정으로 이루어진다.

보간에 의한 곡면을 생성하기 위해서는 먼저 표본점들에 상응하는 u, v 매개변수 값과, 매듭 벡터가 결정 되어야 한다. 본 논문에서는 널리 쓰이며 구현이 용이한 현의 길이에 의한 결정방법(chord length method)을 사용하였다. 이 방법은 표본점들간의 간격이 크게 불균일 할 경우 좋지 않은 결과를 얻을 수도 있다고 알려졌으나, 본 연구에서는 표본점들 간의 간격이 가능한 균일하도록 선택하였으므로 큰 문제는 없다고 판단된다.

매듭 벡터값 이외의 필요한 값들로, 각 방향의 차수 p, q 를 3 으로 설정하고, 모든 가중치 값은 1.0 으로 설정하였다. 곡면을 얻기 위해서 남은 미지항은 조정점들이며, 아래와 같은 선형식에서 R 을 구한 후 이로부터 P 를 계산하여 얻을 수 있다.⁹⁻¹⁰

이와 같은 과정을 거쳐서 새로운 bicubic B-스플라인 곡면을 얻을 수 있다.

$$Q_{k,l} = S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l)$$

where $Q_{k,l}$: sampling points,

$$k = 0, \dots, n \quad l = 0, \dots, m$$

$$Q_{k,l} = S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \left(\sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^m N_{i,p} R_{i,j} \quad (5)$$

$$\text{where } R_{i,j} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j}$$

3.4 매개변수곡선(parameter space curve)의 재 생성

트림된 NURBS 곡면은 NURBS 기저 곡면과, 경계 곡선의 매개변수곡선 (parameter space curve, 이하 PS 곡선이라 칭한다)과 경계 곡선의 실제 좌표계에서의 곡선(model space curve, 이하 MS 곡선이라 칭한다)으로 이루어져 있다. 이 중에서 NURBS 기저 곡면이 바뀌게 되면, 이전의 경계 PS 곡선은 사용할 수 없게 된다. 따라서 새로 생성된 기저 곡면과 MS 곡선정보를 이용하여 PS 곡선을 새로 만들어야 한다. PS 곡선의 생성 과정은 아래와 같다.

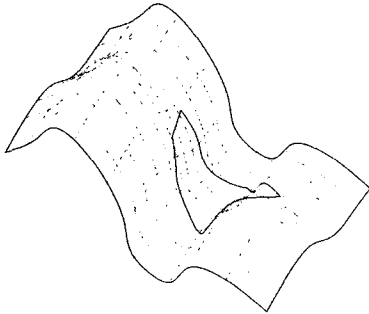
각각의 MS 곡선으로부터 임의로 선정한 51 개의 점을 등간격으로 추출한 후, 각 점의 3 차원 좌표와 허용 오차 내에서 가장 유사한 점을 새로 생성된 곡면에서 찾아 해당되는 u, v 매개변수 값을 저장한다. 이와 같이 찾은 51 개의 (u, v) 좌표값들을 보간 방법을 적용하여 3 차 NURBS 곡선으로 만든다.

위 과정에서 PS 곡선을 MS 곡선으로부터 얻어진 51 개의 점으로만 생성하기 때문에 기하학적 정확도가 높은 PS 곡선을 얻기에는 무리이다. 그러나 본 연구에서 다루는 요소망 생성과정에 실제로 쓰기에는 큰 문제가 되지 않았다. 그 이유는 경계 절점들 자체가 경계 곡선을 큰 기하학적 오차를 가지고, 직선구간으로 분할한다는 의미를 가지고 있기 때문이다.

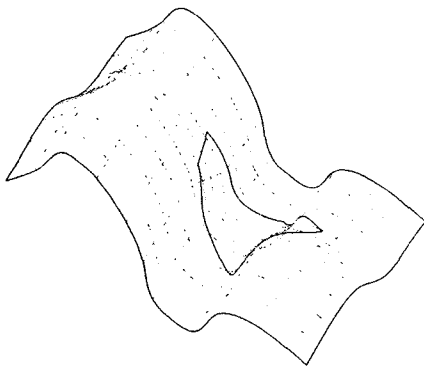
3.5 보간에 의한 곡면 생성 결과

Fig. 6, 7 은 이러한 과정을 IGES 로부터 주어진 곡면에 대해 적용한 예이다. 곡면내의 격자선들은 매개변수 평면에서 등간격으로 격자를 주었을 때 실제 곡면위에서 곡선으로 나타난 것이다. Fig. 6 은 정상적인 NURBS 곡면에 대해 강제로 위와 같

은 과정을 적용시킨 것이며 Fig. 7 은 매개 변수화
 가 잘못된 곡면에 대해 적용한 것이다. 특히 Fig.
 7 에서 보면 원래의 곡면은 일정 구간이 국부적으
 로 심하게 물려있는 데 반해 보간 과정을 거친 곡
 면은 이러한 현상이 사라졌음을 확인할 수 있다.

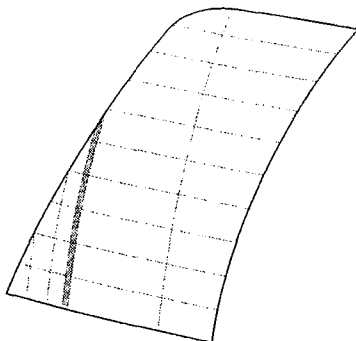


(a) Original surface

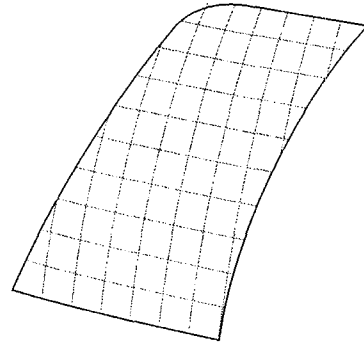


(b) Interpolated surface

Fig. 6 Well parameterized surface interpolation result



(a) Original surface



(b) Interpolated surface

Fig. 7 Poorly parameterized surface interpolation result

4. 곡면에서의 요소망 생성

본 논문에서는 곡면 유한요소망 생성을 위해
 기존에 연구되었던 방법들 중 신뢰성이 높은 영역
 분할법(domain decomposition)을 기반으로 하였다.
 곡면 요소망 생성 과정의 개략적인 과정은 다음 5
 단계로 이뤄져 있다.

- ① 주어진 곡면에 적합한 변환 평면을 결정한다.
- ② 곡면의 경계곡선에 절점을 생성한다.
- ③ 경계절점 좌표를 변환평면으로 변환한다.
- ④ 변환평면에서 삼각형 또는 사각형 요소를 분할법에 의해 생성한다.
- ⑤ 결과 요소망을 곡면 영역의 좌표로 바꾼다.

이에 대한 자세한 내용은 참고 문헌 7 에 나타
 나 있다.

5. 구현 및 적용 예

본 연구의 내용 구현은 PC 기반의 윈도우즈
 플랫폼에서 C++ 언어를 사용하여 구현되었다. 구
 현된 프로그램은 CAD 시스템으로부터 IGES 파일
 을 읽어들이며, 내부 정보의 출력으로 2 가지 형식
 을 갖추고 있다. 기하(Geometry)구조 정보는 IGES
 파일로 출력, 요소망 결과는 UNV 파일 형식으로
 출력할 수 있도록 하였다.

Fig. 8~10 은 본 연구의 내용을 적용하여, 요소
 망 생성을 수행한 모습을 나타낸 것이다. 왼쪽의

그림들은 입력된 곡면을 수정하지 않은 상태에서 요소망 생성을 수행한 결과이다. 그림에서 보듯이 요소망이 심하게 찌그러지거나 또는 요소망 생성 자체가 실패했음을 알 수 있다. 오른쪽 그림들은 본 연구의 내용을 적용하여, 입력된 곡면을 재생성한 후 요소망을 생성한 결과를 나타낸 것이다.

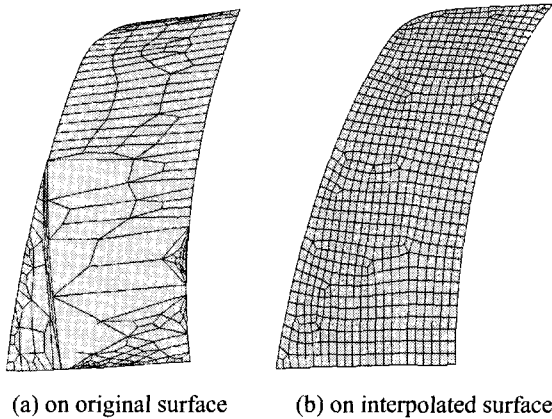


Fig. 8 Mesh generation example 1

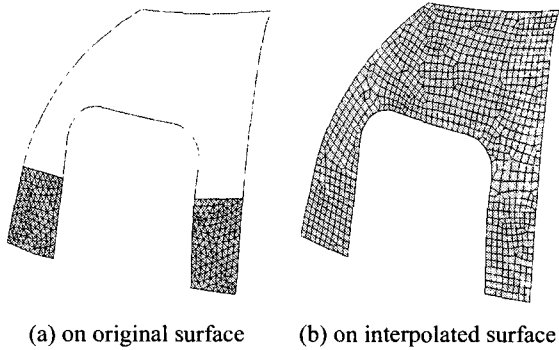


Fig. 9 Mesh generation example 2

6. 결론

본 논문에서는 기하 형상에는 큰 문제가 없으나, 기저 곡면의 매개변수화가 부적절하게 정의된 트림된 NURBS 곡면에서 요소망 생성이 가능하도록 하는 방법을 제안하였다. 이는 주어진 곡면 모델과 유사한 bicubic B-스플라인 곡면을 재생성함으로써 요소망 생성이 가능하도록 하는 방법이다.

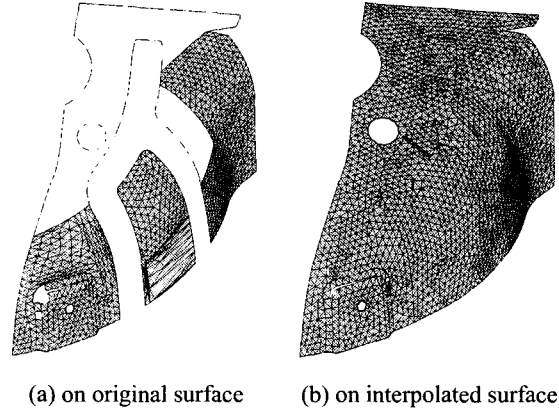


Fig. 10 Mesh generation example 3

먼저 트림된 NURBS 곡면이 입력되었을 때, 기저 곡면의 매개 변수 영역과 실제 곡면에서의 길이비가 구간별로 크게 차이가 나는지를 판단하고, 만약 곡면이 요소망 생성에 적합하지 않다고 판단되면 곡면을 재구성하여 요소망을 생성하는 것이다.

곡면을 재구성 하는 과정은 크게 표본점의 개수 결정과 선택, 표본점들을 통과하는 기저 곡면의 생성과 생성된 기저 곡면과 경계 곡선의 MS 곡선정보로부터 새로운 PS 곡선의 생성과정으로 이루어진다.

이러한 일련의 과정들을 통해서 기존의 방법에 의하면 요소망 생성이 불가능했던 곡면 모델에 대해서도 요소망 생성이 가능하도록 하였다.

후 기

본 연구는 고려대학교 특별연구비에 의해 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

1. Kolb, A. and Seidel, H. P., "Interpolating Scattered Data With C2 Surfaces," Computer-Aided Design, Vol. 27, No. 4, pp. 277-282, 1995.
2. Neilson, G. M., "A Method for Interpolating Scattered Data Based upon a Minimum Norm Network," American Math. Soc. Math. Comput, Vol. 40, pp. 253-271, 1993.

3. Weiyin, M. and Kruth, J. P., "Parameterization of Randomly Measured Points for Least Squares Fitting of B-Spline Curves and Surfaces," *Computer-Aided Design*, Vol. 27, No. 9, pp. 663-675, 1995.
4. Cho Jae Hyung and Cho Myung-Woo, "Reverse Engineering for Sculptured Surfaces by Using NURBS Approximation," *J. of the KSPE*, Vol. 19, No. 8, pp. 108-115, 2002.
5. Razdan, A., "Healing NURB Surface," Ph.D Thesis, Arizona State Univ., 1995.
6. Razdan, A. and Farin, G., "Determination of End Conditions for NURBS Surface Interpolation," *Computer-Aided Geometric Design*, Vol. 15, pp. 757-768, 1998.
7. Chae Soo-Won and Kwon Ki-Youn, "Quadrilateral Mesh Generation on Trimmed NURBS Surfaces," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 4, pp. 592-601, 2001.
8. Filip, D., Magedson, R., and Markot, R., "Surface Algorithm Using Bounds of Derivatives," *Computer-Aided Geometric Design*, Vol. 3, pp. 295-311, 1986.
9. Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer, Germany, 1995.
10. Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design- A Practical Guide*, Fourth Edition, Academic Press, 1997.