

플랫폼 토크 명령에 의한 자세오차 미분방정식 유도

Derivation of Attitude Error Differential Equations by Platform Torque Commands

김 갑 진*, 송 기 원
(Kap-Jin Kim and Ki-Won Song)

Abstract : This paper presents new attitude error differential equations to define attitude errors as the rotation vector for inertial navigation systems. Attitude errors are defined with the rotation vector between the reference coordinate frame and the platform coordinate frame, and Platform dynamics to the reference coordinate frame due to platform torque command errors are defined. Using these concepts for attitude error definition and platform dynamics, we have derived attitude error differential equations expressed in original nonlinear form for GINS and SDINS and showed that these are equivalent to attitude error differential equations expressed in known linear form. The relation between attitude errors defined by the rotation vector and attitude errors defined by quaternion is clearly presented as well.

Keywords : inertial navigation system, coordinate frame, attitude error, torque command, rotation vector, quaternion.

I. 서론

관성항법장치(Inertial Navigation System : INS)를 사용하는 비행체에서, 관성좌표계(inertial coordinate frame)나 지구자전좌표계(earth coordinate frame)와 같은 기준좌표계에 대한 위치와 속도를 정밀하게 계산하는 것이 필요하다. 그러나, INS에서는 가속도계와 자이로의 오차, 플랫폼의 초기정렬 오차, 관성센서의 장착오차, 계산오차 등의 여러 가지 종류의 오차가 발생하기 때문에, 오차해석(error analysis)은 INS의 설계와 개발을 지원하는 주요한 해석적 수단 중의 하나가 된다. 오차해석은 INS의 오차모델을 이용하여 수행할 수 있다. 오차모델은 INS의 오차해석을 위한 도구로서, 또는 INS에서 초기정렬(initial alignment)과 교정(calibration), 그리고 INS 동작 중의 보정항법을 위한 칼만필터의 모델 및 실시간 고장 검출을 위해서 이용된다. 즉, 관성항법장치의 오차모델은 관성항법장치의 오차에 대한 거동 특성을 표현하는 중요한 수단이 된다. INS의 오차모델은 오차변수에 따라서 크게 위치, 속도 및 자세오차 모델로 나뉘어진다. 그리고 오차변수를 정의하는 좌표계를 기준으로 항법좌표계(local level coordinate frame)에 대한 플랫폼좌표계(platform coordinate frame)의 상대적 자세각으로 정의되는 ϕ 오차모델과 INS가 가리키는 위치에서의 계산 좌표계(computer coordinate frame)에 대한 플랫폼 좌표계의 상대적 자세각으로 정의되는 ψ 오차모델로 분류된다[1,2].

INS에서 자세변수는 오일러각(Euler angle), 쿼터니언(quaternion) 및 회전벡터(rotation vector)등으로 다양하게 표현될 수 있고, 지금까지 알려진 자세오차 모델은 미소각(infinitesimal angle) 오차모델[1][2], 쿼터니언 오차모델[3] 및 쿼터니언 오차의 선형 및 비선형 등가오차(equivalent tilt) 모델[4][5]등이 있다. 미소각 오차모델의 경우 좌표변환행렬의 부정확도를 근거로 유도되었으며, 쿼터니언 오차모델은 자세변수의 산술적인 섭동오차(perturbation error)를 쿼터니언 미분

방정식에 포함시켜 유도하였다. 그리고 등가오차 모델은 쿼터니언의 산술적인 섭동오차와 미소각 오차의 관계를 이용하여 구하였다.

INS의 자세오차는 일치해야 하는 두 직교좌표계 사이의 불일치의 정도를 의미하고, 자세오차는 두 직교좌표계 사이의 좌표변환의 결과가 일치하지 않아서 발생하는 좌표계 불일치에 의한 자세오차와, 오차가 포함된 자세변수에 의해서 발생하는 자세변수의 산술적 오차에 의한 자세오차로 구체화해서 정의할 수 있다. 안정한 플랫폼(platform)에 자이로와 가속도계를 장착하고 비행체의 각속도와 가속도를 측정하여 현재의 위치, 속도 및 자세를 계산하는 김블형 관성항법장치(Gimbled INS:GINS)의 경우, 기준좌표계에 플랫폼좌표계가 일치하지 못하는 것을 미소각 자세오차로 정의하며, 비행체의 동체에 직접 부착된 자이로와 가속도계의 출력을 이용하여 컴퓨터로 하여금 좌표변환행렬의 계산을 통해 위치, 속도 및 자세를 계산하도록 하는 스트랩다운 관성항법장치(Strapdown INS:SDINS)의 경우, 자세오차는 기준좌표계에 대한 동체좌표계(body coordinate frame)의 쿼터니언 자세변수의 부정확을 자세오차로 정의한다. 더불어 등가오차의 정의는 쿼터니언 자세변수 오차에 상응하는 좌표계 불일치의 미소각 자세오차이다.

본 논문은 자세오차를 정의하고 자세오차의 동적 지배방정식을 유도하는데 있어서 기준좌표계와 플랫폼좌표계 사이의 불일치에 의한 자세오차를 회전벡터(rotation vector)로 명확하게 정의하고, 자세오차의 동적 지배방정식을 기준좌표계와 플랫폼좌표계 사이의 회전벡터 미분방정식으로 제시하였다. 이 과정에서 플랫폼 토크 오차가 기준좌표계와 플랫폼좌표계 사이의 상대적 각운동을 유발시키는 요소임을 새로이 밝혔다. 이와 같은 자세오차의 정의방법과 자세오차 모델의 유도방법은 SDINS에서 해석적 플랫폼의 개념을 도입하여 해석적 플랫폼좌표계를 새롭게 정의하고 이에 대한 플랫폼 토크 명령을 정의함으로써, GINS에서와 같이 회전벡터 미분방정식으로 동적 지배방정식을 유도할 수 있다. 또한 SDINS에서 기준좌표계로부터의 해석적 동체좌표계의 개념을 정의하여

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 2. 11., 채택확정 : 2003. 5. 9.

김갑진, 송기원 : 국방과학연구소

(ilovebach@add.re.kr/sjw4460@kornet.net)

해석적 동체좌표계와 동체좌표계 사이의 자세오차 모델을 유도하는 데에도 그대로 적용할 수 있다. SDINS에서는 쿼터니언을 이용하여 자세계산이 이루어지므로, 회전벡터 모델을 근거로 추정된 자세오차를 쿼터니언 형태로 변환시켜서 보상할 수 있어야 한다. 따라서 본 논문에서 제시한 회전벡터를 이용하여 정의한 자세오차와 쿼터니언으로 정의한 자세오차와의 상관관계가 명확하게 규명되어야 하며, 본 논문에서는 이를 비선형의 형태로 명백하게 유도하였다.

본 논문의 2장에서는 자세오차의 정의 방법에 대해 설명하였고, 3장에서는 GINS의 자세 오차모델의 유도에 대해서 설명하였다. 4장에서는 SDINS의 자세오차 모델을 해석적 플랫폼좌표계에 관하여 유도하였고, 5장에서는 해석적 동체좌표계의 정의에 의한 자세오차 정의방법에 대해서 설명하고, 6장에서는 SDINS의 자세오차 모델을 해석적 동체좌표계에 관하여 유도하였으며, 7장에서는 회전벡터를 이용하여 정의한 자세오차와 쿼터니언으로 정의한 자세오차와의 관계를 유도하였고, 8장에서는 본 논문의 결론을 제시하였다

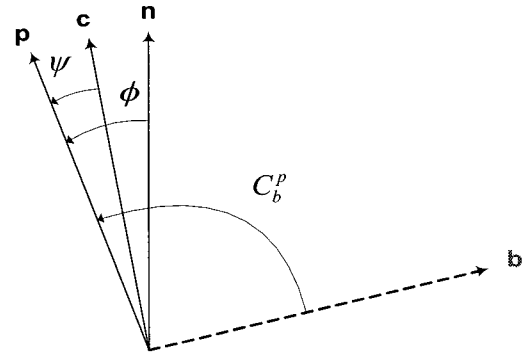


그림 1. 플랫폼좌표계에 의한 자세오차의 정의.
Fig. 1. Attitude errors defined by platform coordinate frame.

되고, 플랫폼이 존재하지 않으며, 동체좌표계에서 측정된 센서 데이터를 기준좌표계로 좌표변환의 계산을 통해 측정한다. 따라서, 본 논문에서는 계산된 좌표변환 행렬을 동체좌표계(b)로부터의 해석적 플랫폼좌표계로 정의하고, SDINS에서 자세오차는 이러한 해석적 플랫폼좌표계로부터 항법좌표계(n)에 대해서는 phi 자세오차로 정의되고, 계산좌표계(c)에 대해서는 phi 자세오차로 정의된다. 이와 같은 자세오차 정의방법은 GINS의 자세오차 정의와 상응하는 등가 오차각(equivalent tilt angle)의 개념을 도입한 것이다.

그림 1은 INS에서 계산좌표계(c) 또는 항법좌표계(n)에 대해 플랫폼좌표계(p)의 불일치로 정의되는 자세오차를 나타낸 것으로, 항법좌표계(n)와 플랫폼좌표계(p)와의 상대적 자세각은 psi, 계산좌표계(c)와 플랫폼좌표계(p)와의 상대적 자세각은 phi로 정의됨을 보이고 있다. 또한 SDINS의 경우에도 계산된 좌표변환행렬을 동체좌표계(b)로부터의 해석적 플랫폼좌표계로의 변환으로 정의하고 있어 GINS의 경우와 자세오차가 동일하게 정의되는 등가오차의 개념을 볼 수 있다.

III. GINS 자세오차 미분방정식

1. 플랫폼 토크 명령

GINS에서 플랫폼 토크 명령은 관성좌표계에 대한 항법좌표계의 각속도에서 발생된다. 그리고, 계산되는 플랫폼 토크 명령은,

$$\hat{\omega}_{in}^n = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\lambda}} \cos \hat{L} \\ -\dot{\hat{L}} \\ -\dot{\hat{\lambda}} \sin \hat{L} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, $\hat{\lambda}$ =Longitude, \hat{L} =Latitude
과 같다[8].

플랫폼 토크 명령에 의해서 플랫폼은 항법좌표계를 지향하게 되는데, 이 때, 관성 좌표계에 대한 플랫폼의 각속도는 플랫폼 토크 명령과 자이로 오차(gyro uncertainty) $\delta\omega$ 에 의한 각속도의 합으로 표현되며,

$$\omega_{ip}^p = \hat{\omega}_{in}^n + \delta\omega \quad (2)$$

<주요 기호>

i : 관성좌표계 n : 항법좌표계 p : 플랫폼좌표계
 b : 동체좌표계 c : 동체좌표계 L : 위도 λ : 경도
 ϕ : phi 자세오차 ψ : psi 자세오차

C_A^B : A좌표계로부터 B좌표계로의 좌표변환행렬

ω_{ij}^k : j 좌표계의 i 좌표계에 대한 각속도를 k 좌표계에서 측정된 값

Ω : ω 벡터의 왜대칭 행렬

$\delta(\cdot)$: 오차를 표현하는 기호

$\hat{(\cdot)}$: 계산된 값을 표현하는 기호

$Q_A^B = [q_{AB0} \ q_{AB1} \ q_{AB2} \ q_{AB3}]^T$: A좌표계로부터 B좌표계로의 쿼터니언 변수

$Q_A^{B*} = [q_{AB0} \ -q_{AB1} \ -q_{AB2} \ -q_{AB3}]^T$: Q_A^B 의 공액(conjugate)

ΔQ : multiplicative 쿼터니언 오차

δQ : additive 쿼터니언 오차

II. 자세오차 정의

INS에서 정의되는 좌표계는 관성좌표계(inertial coordinate frame), 항법좌표계, 플랫폼좌표계, 동체좌표계, 계산좌표계로 분류될 수 있다[1]. 자세오차는 기준좌표계와 플랫폼좌표계와의 불일치에 의한 두 좌표계 사이의 상대적 자세각으로 정의된다. GINS는 안정화된 플랫폼 위에 가속도계와 자이로를 장착하고 있는 구조를 가지고 있어서 GINS에서의 자세오차는 항법좌표계(n)와 플랫폼좌표계(p)간의 상대적 자세각으로 표현되는 phi 자세오차와, 계산좌표계(c)와 플랫폼좌표계(p)간의 상대적 자세각으로 표현되는 psi 자세오차로 정의된다. SDINS는 동체좌표계를 기준으로 자이로와 가속도계가 장착

와 같다[8]. (2)에 위치오차를 고려하면, GINS에서 실제로 가리키는 위치를 기준으로 계산좌표계가 항법좌표계를 대신하게 되므로, 최종적으로 (3)을 얻을 수 있다[6]. (3)은 회전벡터로 정의한 자세오차의 미분방정식을 유도하는데 사용된다.

$$\omega_{ip}^p = \omega_{ic}^c + \delta\omega \quad (3)$$

2. psi 자세오차 미분방정식

psi 자세오차는 계산좌표계와 플랫폼좌표계 사이의 회전벡터로 정의하여, 회전벡터와 좌표변환행렬(direction cosine transformation matrix)의 관계와 회전벡터의 특성을 이용하면,

$$\dot{\psi} = [I + \frac{1}{2}\Psi + (\frac{1}{\psi_0^2} - \frac{\sin\psi_0}{2\psi_0(1-\cos\psi_0)})\Psi^2]\omega_{cp}^p \quad (4)$$

와 같이 나타낼 수 있다[7]. 또한, (4)에서 계산좌표계에 대한 플랫폼좌표계의 각운동 ω_{cp}^p 는 (3)의 좌변항을

$\omega_{cp}^p = C_c^p \omega_{ic}^c + \omega_{cp}^p$ 로 치환하고 식을 정리하면,

$$\begin{aligned} \omega_{cp}^p &= (I - C_c^p)\omega_{ic}^c + \delta\omega \\ &= (\frac{\sin\psi_0}{\psi_0}\Psi - \frac{(1-\cos\psi_0)}{\psi_0^2}\Psi^2)\omega_{ic}^c + \delta\omega \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\psi_0 = \sqrt{\psi_n^2 + \psi_e^2 + \psi_d^2}$

와 같이 나타낸다. (5)를 (4)에 대입하고 회전벡터 Ψ 의 차수대로 전개하게 되면,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= [\frac{\sin\psi_0}{\psi_0}\Psi + (\frac{\sin\psi_0}{2\psi_0} - \frac{1-\cos\psi_0}{\psi_0^2})\Psi^2 \\ &+ (-\frac{1-\cos\psi_0}{2\psi_0^2} + \frac{\sin\psi_0}{\psi_0^3} - \frac{\sin^2\psi_0}{2\psi_0^2(1-\cos\psi_0)})\Psi^3 \\ &+ (-\frac{1-\cos\psi_0}{\psi_0^4} + \frac{\sin\psi_0}{2\psi_0^3})\Psi^4]\omega_{ic}^c + D\delta\omega \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $D = I + \frac{1}{2}\Psi + (\frac{1}{\psi_0^2} - \frac{\sin\psi_0}{2\psi_0(1-\cos\psi_0)})\Psi^2$

과 같다. 또한 (6)과 회전벡터의 특성($\Psi^3 = -\psi_0^2\Psi$, $\Psi^4 = -\psi_0^2\Psi^2$)을 이용하여 3, 4차항들을 1, 2차항들로 정리하게 되면,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= [\frac{\sin\psi_0}{\psi_0}\Psi + (\frac{\sin\psi_0}{2\psi_0} - \frac{1-\cos\psi_0}{\psi_0^2})\Psi^2 \\ &+ (\frac{1-\cos\psi_0}{2} - \frac{\sin\psi_0}{\psi_0} + \frac{\sin^2\psi_0}{2(1-\cos\psi_0)})\Psi \\ &+ (\frac{1-\cos\psi_0}{\psi_0^2} - \frac{\sin\psi_0}{2\psi_0})\Psi^2]\omega_{ic}^c + D\delta\omega \\ &= (\frac{1-\cos\psi_0}{2} + \frac{\sin^2\psi_0}{2(1-\cos\psi_0)})\Psi\omega_{ic}^c + D\delta\omega \end{aligned} \quad (7)$$

과 같이 Ψ 의 일차항으로 표현되는 식으로 나타낼 수 있고,

(7)은 다시,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (\frac{(1-\cos\psi_0)^2 + \sin^2\psi_0}{2(1-\cos\psi_0)})\Psi\omega_{ic}^c + D\delta\omega \\ &= \Psi\omega_{ic}^c + D\delta\omega \end{aligned} \quad (8)$$

과 같이 간략하게 나타낼 수 있다. (8)은 회전벡터로 표현된 비선형 psi 자세오차 미분방정식으로, 시스템 행렬은 완전한 선형이고 단지 자이로 오차의 입력행렬만이 비선형으로 보여지고 있다. 그리고 (8)을 선형화하면 (9)와 같은 알려진 선형 psi 자세오차 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\psi} = -\omega_{ic}^c \times \psi + \delta\omega \quad (9)$$

3. phi 자세오차 미분방정식

phi 자세오차는 항법좌표계와 플랫폼좌표계사이의 회전벡터로 정의하여, 미분방정식으로 표현하면,

$$\dot{\phi} = [I + \frac{1}{2}\Phi + (\frac{1}{\phi_0^2} - \frac{\sin\phi_0}{2\phi_0(1-\cos\phi_0)})\Phi^2]\omega_{np}^p \quad (10)$$

과 같다[7]. 또한 (3)에서 좌변을 $\omega_{np}^p = \omega_{in}^n + \omega_{np}^p$ 로 치환하여 항법좌표계에 대한 플랫폼좌표계의 각운동 ω_{np}^p 를 구하면,

$$\begin{aligned} \omega_{np}^p &= (I - C_n^p)\omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n + \delta\omega \\ &= (\frac{\sin\phi_0}{\phi_0}\Phi - \frac{(1-\cos\phi_0)}{\phi_0^2}\Phi^2)\omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n + \delta\omega \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $\delta\omega_{in}^n = \omega_{ic}^c - \omega_{in}^n$, $\phi_0 = \sqrt{\phi_n^2 + \phi_e^2 + \phi_d^2}$

과 같다. (11)을 (10)에 대입하여 psi 자세오차 미분방정식을 유도하는 방법으로 정리하면 (12)과 같은 비선형 phi 자세오차 미분방정식을 얻을 수 있다. (12)에서 비선형 psi 자세오차 미분방정식과 마찬가지로 시스템 행렬은 완전한 선형이고 단지 자이로 오차의 입력행렬만이 비선형으로 나타나는 것이 보여지고 있다. 마찬가지로 (12)을 선형화하면 (13)와 같은 알려진 선형 phi 자세오차 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\phi} = \Phi\omega_{in}^n + D(\delta\omega_{in}^n + \delta\omega) \quad (12)$$

$$\dot{\phi} = -\omega_{in}^n \times \phi + \delta\omega_{in}^n + \delta\omega \quad (13)$$

IV. SDINS 자세오차 미분방정식

1. 해석적 플랫폼 토크 명령

일반적으로 동체좌표계에서 항법좌표계로의 좌표변환행렬을 구하는 좌표변환행렬의 미분방정식은,

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b \quad (14)$$

과 같다[8]. 좌표변환행렬 C_b^n 는 Ω_{nb}^b 를 입력값으로 해서 얻어지는데, Ω_{nb}^b 는 ω_{nb}^b 의 각 성분으로 구성된 왜대칭 행렬(skew symmetric matrix)이다. 또한 이 미분방정식의 해를 구

하는데 있어서, 항법좌표계에 대한 동체좌표계의 각운동 ω_{nb}^b 가 입력값이 되는데,

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n \quad (15)$$

과 같다[9]. 그러나, 실제로 (14), (15)는 계산되어지는 좌표변환행렬과 각운동으로서,

$$\dot{C}_b^n = \hat{C}_b^n \hat{\Omega}_{nb}^b \quad (16)$$

$$\hat{\omega}_{nb}^b = \hat{\omega}_{ib}^b - \hat{C}_n^b \hat{\omega}_{in}^n \quad (17)$$

과 같이 표현할 수 있다. 여기서 $\hat{\omega}_{in}^n$ 은 계산되어지는 각속도이고, $\hat{\omega}_{ib}^b$ 는 자이로에서 측정되는 각속도이다.

SDINS에서는 GINS와 같이 실제 물리적인 플랫폼이 존재하지 않고, 동체좌표계로부터 항법좌표계로 좌표변환이 이루어지는데, 이 때 좌표변환 행렬에 오차가 존재하면 동체좌표계로부터 가상의 플랫폼좌표계로 좌표변환되는 것으로 가정할 수 있으며, 이를 해석적 플랫폼좌표계로 정의하면, 좌표변환 행렬의 미분방정식은,

$$\dot{C}_b^p = C_b^p \Omega_{pb}^b \quad (18)$$

와 같이 나타낼 수 있다. (18)에서 좌표변환행렬을 구할 때, 입력값은 좌표변환행렬의 초기값과 ω_{pb}^b 가 된다. 따라서 해석적 플랫폼의 개념을 적용하여 플랫폼좌표계가 항법좌표계를 대신하도록 하고, 계산오차가 존재한다고 가정하면, $\hat{\omega}_{in}^n$ 를 ω_{ic}^c 로 치환할 수 있고,

$$\omega_{pb}^b = \hat{\omega}_{ib}^b - C_p^b \omega_{ic}^c \quad (19)$$

과 같은 각운동 식을 얻을 수 있다. 또한 (19)에서 자이로 오차 $\delta\omega$ 를 고려하고 관성좌표계에 대한 해석적 플랫폼의 각운동이 되는 ω_{ip}^p 의 식으로 정리하면 (20)을 얻는다. (20)은 회전벡터로 정의된 자세오차의 미분방정식을 유도하는데 사용된다.

$$\omega_{ip}^p = \omega_{ic}^c - C_b^p \delta\omega \quad (20)$$

2. psi 자세오차 미분방정식

psi 자세오차는 계산좌표계와 해석적 플랫폼좌표계 사이의 회전벡터로 정의하여, 미분방정식으로 표현하면,

$$\dot{\psi} = [I + \frac{1}{2}\Psi + (\frac{1}{\psi_0^2} - \frac{\sin\psi_0}{2\psi_0(1-\cos\psi_0)})\Psi^2] \omega_{cp}^p \quad (21)$$

과 같다[7]. (20)에서 좌변항을 $\omega_{ip}^p = C_c^p \omega_{ic}^c + \omega_{cp}^p$ 로 치환하고 식을 정리하면,

$$\omega_{cp}^p = (I - C_c^p) \omega_{ic}^c - C_b^p \delta\omega = (\frac{\sin\psi_0}{\psi_0} \Psi - \frac{(1-\cos\psi_0)}{\psi_0^2} \Psi^2) \omega_{ic}^c - C_b^p \delta\omega \quad (22)$$

$$\text{여기서, } \psi_0 = \sqrt{\psi_n^2 + \psi_e^2 + \psi_d^2}$$

와 같은 계산좌표계에 대한 해석적 플랫폼좌표계의 각운동 ω_{cp}^p 를 구할 수 있다. (22)을 (21)에 대입하고 정리하면,

$$\dot{\psi} = \Psi \omega_{ic}^c - [I + \frac{1}{2}\Psi + (\frac{1}{\psi_0^2} - \frac{\sin\psi_0}{2\psi_0(1-\cos\psi_0)})\Psi^2] C_b^p \delta\omega \quad (23)$$

과 같은 비선형 psi 자세오차 미분방정식을 유도할 수 있다. (23)에서 시스템 행렬은 완전한 선형이고 단지 자이로 오차의 입력행렬만이 비선형으로 나타나는 것이 보여지고 있다. 또한 (23)을 선형화하면,

$$\dot{\psi} = -\omega_{ic}^c \times \psi - C_b^p \delta\omega \quad (24)$$

와 같은 선형 psi 자세오차 미분방정식을 얻을 수 있다.

3. phi 자세오차 미분방정식

phi 자세오차는 항법좌표계와 해석적 플랫폼좌표계사이의 회전벡터로 정의하여, 미분방정식으로 표현하면,

$$\dot{\phi} = [I + \frac{1}{2}\Phi + (\frac{1}{\phi_0^2} - \frac{\sin\phi_0}{2\phi_0(1-\cos\phi_0)})\Phi^2] \omega_{np}^p \quad (25)$$

와 같다[7]. 또한 (20)과 $\omega_{ip}^p = \omega_{in}^n + \omega_{np}^p$ 의 관계식으로부터 항법좌표계에 대한 해석적 플랫폼좌표계의 각운동 ω_{np}^p 를 구하면,

$$\omega_{np}^p = (I - C_n^p) \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n - C_b^p \delta\omega = (\frac{\sin\phi_0}{\phi_0} \Phi - \frac{(1-\cos\phi_0)}{\phi_0^2} \Phi^2) \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n - C_b^p \delta\omega \quad (26)$$

$$\text{여기서, } \delta\omega_{in}^n = \omega_{ic}^c - \omega_{in}^n, \phi_0 = \sqrt{\phi_n^2 + \phi_e^2 + \phi_d^2}$$

과 같다. (26)을 (25)에 대입하여 정리하면,

$$\dot{\phi} = \Phi \omega_{in}^n + [I + \frac{1}{2}\Phi + (\frac{1}{\phi_0^2} - \frac{\sin\phi_0}{2\phi_0(1-\cos\phi_0)})\Phi^2] (\delta\omega_{in}^n - C_b^p \delta\omega) \quad (27)$$

과 같은 phi 비선형 자세오차 미분방정식으로 유도할 수 있다. (27)에서 비선형 psi 자세오차 미분방정식과 마찬가지로 시스템 행렬은 완전한 선형이고 단지 자이로 오차의 입력행렬만이 비선형으로 나타나는 것이 보여지고 있다. 또한 (27)을 선형화하면,

$$\dot{\phi} = -\omega_{in}^n \times \phi + \delta\omega_{in}^n - C_b^p \delta\omega \quad (28)$$

과 같은 알려진 선형 phi 미분방정식을 얻을 수 있다.

V. 동체좌표계 기준의 자세오차 정의

본 논문에서는 항법좌표계(n) 또는 계산좌표계(c)로부터 계산된 좌표변환행렬을 이용하여 좌표변환한 가상의 동체좌표계의 개념을 적용하여 이를 해석적 동체좌표계로 정의하고,

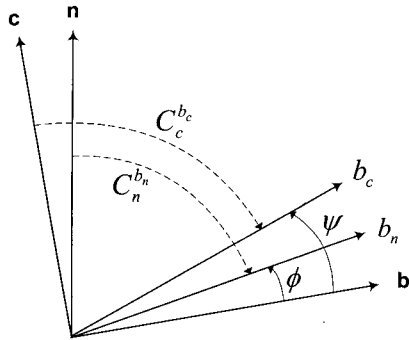


그림 2. SDINS에서의 해석적 동체좌표계에 의한 자세오차의 정의.

Fig. 2. Attitude errors defined by analytic body coordinate frame for SDINS.

항법좌표계(n)에 대한 해석적 동체좌표계(\$b_n\$)의 경우, 해석적 동체좌표계(\$b_n\$)와 실제 동체좌표계(b) 사이의 자세각을 phi 자세오차로 정의하며, 계산좌표계(c)에 대한 해석적 동체좌표계(\$b_c\$)의 경우, 해석적 동체좌표계(\$b_c\$)와 실제 동체좌표계(b) 사이의 자세각을 psi 자세오차로 정의한다. 그림 2는 SDINS의 경우에 계산된 좌표변환행렬이 계산좌표계(c)로부터의 해석적 동체좌표계 \$b_c\$, 또는 항법좌표계(n)으로부터의 해석적 동체좌표계 \$b_n\$으로 정의되고, 이러한 해석적 동체좌표계들과 동체좌표계(b)가 불일치 됨으로 인해 정의되는 자세오차를 각각 psi와 phi 자세오차로 나타내고 있다. 또한 각각의 좌표변환행렬은 동체좌표계에서 해석적 플랫폼좌표계로 계산된 좌표변환행렬을 기준으로 하고, 상대적인 좌표변환을 의미하기 때문에 동일한 것으로,

$$C_b^p = C_b^c = C_{b_n}^n \tag{29}$$

와 같이 표현할 수 있다.

VI. 동체좌표계 기준의 자세오차 미분방정식

1. 해석적 동체좌표계 토크명령

SDINS에서 계산되는 좌표변환 행렬은 항법좌표계로부터 동체좌표계로 변환하게 되는 것으로 생각할 수 있는데, 이 때 좌표변환 행렬에 오차가 존재하면 항법좌표계를 기준으로 가상의 동체좌표계로 좌표변환되는 것으로 가정할 수 있으며, 본 논문에서는 이를 해석적 동체좌표계 \$b_n\$으로 정의하였다. 해석적 플랫폼 토크 명령에서 유용한 방법을 이용하면, 이러한 좌표변환 행렬의 미분방정식은

$$\dot{C}_{b_n}^n = C_{b_n}^n \Omega_{nb_n}^{b_n} \tag{30}$$

과 같이 표현할 수 있고, 입력값이 되는 각운동 \$\omega_{nb_n}^{b_n}\$는,

$$\omega_{nb_n}^{b_n} = \hat{\omega}_{ib}^b - C_n^{b_n} \omega_{ic}^c \tag{31}$$

과 같다. 또한, 자이로 오차 \$\delta\omega\$를 고려하면 해석적 동체좌

표계 \$b_n\$의 각운동 \$\omega_{ib_n}^{b_n}\$는,

$$\omega_{ib_n}^{b_n} = \omega_{ib}^b - C_n^{b_n} \delta\omega_{in}^n + \delta\omega \tag{32}$$

여기서, \$\delta\omega_{in}^n = \omega_{ic}^c - \omega_{in}^n\$

와 같이 구해진다.

SDINS에서 계산되는 좌표변환 행렬은 또한 계산좌표계로부터 동체좌표계로 변환하게 되는 것으로 생각할 수 있는데, 이 때 좌표변환 행렬에 오차가 존재하면 계산좌표계를 기준으로 가상의 동체좌표계로 좌표변환되는 것으로 가정할 수 있으며, 본 논문에서는 이를 해석적 동체좌표계 \$b_c\$로 정의하였다. 항법좌표계를 기준으로 한 해석적 동체좌표계에서 해석적 동체좌표계의 각운동을 구하는 방법을 그대로 적용하면,

$$\omega_{ib_c}^{b_c} = \omega_{ib}^b + \delta\omega \tag{33}$$

과 같은 계산좌표계 기준의 해석적 동체좌표계의 각운동에 관한 식을 얻을 수 있다.

2. psi 자세오차 미분방정식

psi 자세오차는 계산좌표계로부터의 좌표변환행렬을 이용해서 변환된 해석적 동체좌표계 \$b_c\$와 동체좌표계 사이의 회전벡터로 정의하여, 미분방정식으로 표현하면,

$$\dot{\psi}_b = [I + \frac{1}{2} \Psi_b + (\frac{1}{\psi_{b0}^2} - \frac{\sin \psi_{b0}}{2\psi_{b0}(1 - \cos \psi_{b0})}) \Psi_b^2] \omega_{bb_c}^{b_c} \tag{34}$$

와 같다[7]. (33)에서 좌변항을 \$\omega_{ib_c}^{b_c} = C_b^{b_c} \omega_{ib}^b + \omega_{bb_c}^{b_c}\$로 치환하고 식을 정리하면,

$$\begin{aligned} \omega_{bb_c}^{b_c} &= (I - C_b^{b_c}) \omega_{ib}^b + \delta\omega \\ &= (\frac{\sin \psi_{b0}}{\psi_{b0}} \Psi - \frac{(1 - \cos \psi_{b0})}{\psi_{b0}^2} \Psi^2) \omega_{ib}^b + \delta\omega \end{aligned} \tag{35}$$

여기서, \$\psi_{b0} = \sqrt{\psi_{bn}^2 + \psi_{be}^2 + \psi_{bd}^2}\$

과 같이 동체좌표계에 대한 해석적 동체좌표계 \$b_c\$의 각운동 \$\omega_{bb_c}^{b_c}\$를 구할 수 있다. (35)를 (34)에 대입하고 회전벡터의 특성을 이용하면,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_b &= \Psi_b \omega_{ib}^b \\ &+ [I + \frac{1}{2} \Psi_b + (\frac{1}{\psi_{b0}^2} - \frac{\sin \psi_{b0}}{2\psi_{b0}(1 - \cos \psi_{b0})}) \Psi^2] \delta\omega \end{aligned} \tag{36}$$

과 같이 시스템 행렬은 완전한 선형이고 단지 자이로 오차의 입력행렬만이 비선형으로 나타나는 비선형 psi 자세오차 미분방정식을 구할 수 있다. 이 때, 시스템 행렬은 해석적 플랫폼좌표계에서의 자세오차 미분방정식에서의 시스템 행렬 \$\omega_{in}^n\$과 달리 \$\omega_{ib}^b\$로 나타난다. 즉, 해석적 동체좌표계에서의 자세오차는 시간변화에 따라 크게 변화하는 동특성을 가진

다. 그리고 (36)을 선형화하면,

$$\dot{\psi}_b = -\omega_{ib}^b \times \psi_b + \delta\omega \quad (37)$$

과 같은 알려진 선형 psi 자세오차 미분방정식을 얻을 수 있다.

3. phi 자세오차 미분방정식

phi 자세오차는 항법좌표계로부터의 좌표변환행렬을 이용해서 변환된 해석적 동체좌표계 b_n 와 동체좌표계 사이의 회전벡터로 정의하여, 미분방정식으로 표현하면,

$$\dot{\phi}_b = [I + \frac{1}{2}\Phi_b + (\frac{1}{\phi_{b0}^2} - \frac{\sin\phi_{b0}}{2\phi_{b0}(1-\cos\phi_{b0})})\Phi_b^2]\omega_{bb_n}^{b_n} \quad (38)$$

과 같다. 또한 (32)의 좌변을 $\omega_{ib_n}^{b_n} = C_b^{b_n}\omega_{ib}^b + \omega_{bb_n}^{b_n}$ 로 치환하면 동체좌표계에 대한 해석적 동체좌표계 b_n 의 각운동 $\omega_{bb_n}^{b_n}$ 는,

$$\begin{aligned} \omega_{bb_n}^{b_n} &= (I - C_b^{b_n})\omega_{ib}^b - C_n^{b_n}\delta\omega_{in}^n + \delta\omega \\ &= (\frac{\sin\phi_{b0}}{\phi_{b0}}\Phi_b - \frac{(1-\cos\phi_{b0})}{\phi_{b0}^2}\Phi_b^2)\omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n - C_b^n\delta\omega \end{aligned} \quad (39)$$

여기서, $\delta\omega_{in}^n = \omega_{ic}^c - \omega_{in}^n$, $\phi_{b0} = \sqrt{\phi_{bn}^2 + \phi_{be}^2 + \phi_{bd}^2}$

와 같이 구해진다. (39)를 (38)에 대입하고 회전벡터의 특성을 이용하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_b &= \Phi_b\omega_{ib}^b \\ &+ [I + \frac{1}{2}\Phi_b + (\frac{1}{\phi_{b0}^2} - \frac{\sin\phi_{b0}}{2\phi_{b0}(1-\cos\phi_{b0})})\Phi_b^2](-C_n^{b_n}\delta\omega_{in}^n + \delta\omega) \end{aligned} \quad (40)$$

과 같이 표현되는 비선형 phi 자세오차 미분방정식을 구할 수 있다. (40)에서 비선형 psi 자세오차 미분방정식과 마찬가지로 시스템 행렬은 완전한 선형이고 단지 자이로 오차의 입력행렬만이 비선형으로 나타나는 것이 보여지고 있다. 또한 (40)을 선형화하면,

$$\dot{\phi}_b = -\omega_{ib}^b \times \phi_b - C_n^{b_n}\delta\omega_{in}^n + \delta\omega \quad (41)$$

과 같은 알려진 선형 phi 자세오차 미분방정식을 얻을 수 있다.

VII. 쿼터니언 자세오차와의 관계

본 논문에서 지금까지 회전벡터로 정의되는 각각의 자세오차에 대한 자세오차 미분방정식을 유도하였다. SDINS에서는 쿼터니언(quaternion)을 이용하여 자세계산이 이루어진다. 따라서 본 논문에서 회전벡터로 정의한 자세오차와 실제로 자세계산에 사용되는 쿼터니언으로 정의한 자세오차와의 관계를 밝혀두고자 한다. 이러한 관계로부터 회전벡터 모델을 근거로 추정된 자세오차를 쿼터니언 형태로 변환시켜 보상할 수 있다.

SDINS의 경우에 회전벡터를 이용하여 정의한 자세오차로

부터 쿼터니언으로 정의한 자세오차로의 변환을 수행함에 있어서 지금까지 알려진 선형화된 관계식이 아닌 원형의 비선형 관계식으로 표현되는 관계를 구해보고자 한다. 쿼터니언 오차는 쿼터니언 오차가 플랫폼좌표계와 항법좌표계사이의 오차로 정의되기 때문에 phi 자세오차모델로 가정된다. 회전벡터로 정의되는 자세오차는 multiplicative 쿼터니언 오차로,

$$\begin{aligned} \Delta Q &= [\Delta q_0 \quad \Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \Delta q_3]^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi_0}{2} & \frac{\phi_n}{\phi_0}\sin\frac{\phi_0}{2} & \frac{\phi_e}{\phi_0}\sin\frac{\phi_0}{2} & \frac{\phi_d}{\phi_0}\sin\frac{\phi_0}{2} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (42)$$

여기서, $\phi_0 = \sqrt{\phi_n^2 + \phi_e^2 + \phi_d^2}$

와 같이 표현할 수 있으며 회전벡터 오차에서 multiplicative 쿼터니언 오차로 변환할 수 있다[9]. 또한, 이 때의 multiplicative 쿼터니언 자세오차의 정의는 (43)과 같고[10], (44)와 같이 additive 쿼터니언 오차를 정의하여[11] (43)의 multiplicative 쿼터니언 오차에 대입하면 (45)를 얻을 수 있다.

$$Q_b^n = \Delta Q * \hat{Q}_b^n, \quad \Delta Q = Q_b^n * \hat{Q}_b^{n*} \quad (43)$$

$$Q_b^n = \hat{Q}_b^n - \delta Q \quad (44)$$

$$\Delta Q = (\hat{Q}_b^n - \delta Q) * \hat{Q}_b^{n*} = 1 - \delta Q \hat{Q}_b^{n*} \quad (45)$$

(45)로부터 쿼터니언 곱을 계산하여[1], multiplicative 쿼터니언 오차와 회전벡터 오차의 관계로 정리하게 되면,

$$\phi = -\frac{\phi_0}{\sin\frac{\phi_0}{2}} R(\hat{Q}_b^n)\delta Q \quad (46)$$

$$\text{여기서, } R(\hat{Q}_b^n) = \begin{bmatrix} -\hat{q}_{bn1} & \hat{q}_{bn0} & -\hat{q}_{bn3} & \hat{q}_{bn2} \\ -\hat{q}_{bn2} & \hat{q}_{bn3} & \hat{q}_{bn0} & -\hat{q}_{bn1} \\ -\hat{q}_{bn3} & -\hat{q}_{bn2} & \hat{q}_{bn1} & \hat{q}_{bn0} \end{bmatrix}$$

과 같이 additive 쿼터니언 오차에서 회전벡터 오차로 변환하는 식을 얻는다. 또한 (43)을 (44)에 대입하고 additive 쿼터니언 오차에 대한 식으로 정리하면,

$$\delta Q = \hat{Q}_b^n - \Delta Q \hat{Q}_b^n \quad (47)$$

과 같이 multiplicative 쿼터니언 오차가 포함되는 식을 얻을 수 있고, (47)로부터 쿼터니언 곱을 계산하여[1], additive 쿼터니언 오차와 회전벡터 오차의 관계로 정리하면,

$$\delta Q = -\frac{\sin\frac{\phi_0}{2}}{\phi_0} T^T(\hat{Q}_b^n)\phi + \left[\hat{Q}_b^n - \hat{Q}_b^n \cos\frac{\phi_0}{2} \right] \quad (48)$$

$$\text{여기서, } T(\hat{Q}_b^n) = \begin{bmatrix} \hat{q}_{bn1} & \hat{q}_{bn0} & \hat{q}_{bn3} & -\hat{q}_{bn2} \\ \hat{q}_{bn2} & -\hat{q}_{bn3} & \hat{q}_{bn0} & \hat{q}_{bn1} \\ \hat{q}_{bn3} & \hat{q}_{bn2} & -\hat{q}_{bn1} & \hat{q}_{bn0} \end{bmatrix}$$

과 같다. (46)과 (48)은 비선형의 관계식이며, 이를 선형화하면

알려져 있는 선형화된 쿼터니언 오차와 회전벡터 오차간의 관계식을 얻을 수 있다[10].

지금까지의 결과들을 동체좌표계 회전벡터 오차에 대해서도 적용이 가능하다. 동체좌표계의 multiplicative 쿼터니언 오차와 additive 쿼터니언 오차를 정의하면[11], 동일한 방법으로, multiplicative 쿼터니언 오차와 회전벡터 오차와의 관계를,

$$\Delta Q = [\Delta q_{b0} \quad \Delta q_{b1} \quad \Delta q_{b2} \quad \Delta q_{b3}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi_{b0}}{2} & \frac{\phi_{bn}}{\phi_{b0}} \sin \frac{\phi_{b0}}{2} & \frac{\phi_{be}}{\phi_{b0}} \sin \frac{\phi_{b0}}{2} & \frac{\phi_{bd}}{\phi_{b0}} \sin \frac{\phi_{b0}}{2} \end{bmatrix}^T \quad (49)$$

여기서 $\phi_{b0} = \sqrt{\phi_{bn}^2 + \phi_{be}^2 + \phi_{bd}^2}$

와 같이 나타낼 수 있고, additive 쿼터니언 오차와 회전벡터 오차와의 관계는,

$$\phi_b = -\frac{\phi_{b0}}{\sin \frac{\phi_{b0}}{2}} T(\hat{Q}_b^n) \delta Q \quad (50)$$

$$\delta Q = -\frac{\sin \frac{\phi_{b0}}{2}}{\phi_{b0}} R^T(\hat{Q}_b^n) \phi_b + \left[\hat{Q}_b^n - \hat{Q}_b^n \cos \frac{\phi_{b0}}{2} \right] \quad (51)$$

과 같이 비선형의 관계식으로 나타난다.

VIII. 결론

본 논문은 관성항법장치의 자세오차 모델을 유도하는데 있어서 지금까지의 접근방식과는 달리 자세오차를 GINS에서는 실제 존재하는 플랫폼좌표계와 항법좌표계 또는 계산좌표계 사이의 자세각으로 정의하여 이 자세각을 회전벡터로 표현하는 방법을 도입하고 플랫폼좌표계의 각운동량인 플랫폼 토크 명령을 이용하여 자세오차에 관한 원형의 비선형 미분방정식을 유도하였다. SDINS에서는 기준좌표계로부터 좌표변환되는 해석적 플랫폼좌표계의 개념을 도입하여 자세오차를 정의하고 또한 해석적 동체좌표계의 개념을 적용하여 자세오차를 정의한 후 자세오차에 관한 원형의 비선형 미분방정식을 유도하는 새로운 유도방식을 제시하였다. 그리고, 회전벡터로 표현되는 자세오차와 쿼터니언으로 표현되는 자세오차와의 관계를 기존의 선형관계식이 아닌 원형의 비선형 관계식으로 나타내고, 이 관계식을 선형화할 때 기존의

선형관계식과 동일함을 밝혔다.

비선형 자세오차 미분방정식의 시스템 행렬은 선형이며, 단지 자이로 오차의 입력행렬이 비선형으로 나타나며, 비선형 자세오차 미분방정식 결과들을 선형화하면 지금까지 알려진 선형 자세오차 미분방정식과 동일함을 보였다.

참고문헌

- [1] G. M. Siouris, *Aerospace Avionics Systems : A Modern Synthesis*, Academic Press, 1993.
- [2] Goshen-Meskin and I. Y. Bar-Itzhack, "Unified approach to inertial navigation system error modeling", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 3, May-June 1992.
- [3] B. Friedland, "Analysis strapdown navigation using quaternion", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-14, no.5, Sep., 1978.
- [4] 유명중, 김현백, 전창배, "스트랩다운 관성항법시스템의 비선형 자세오차 미분방정식", 한국항공우주학회지, 23권, 5호, pp. 118-125, 1995.
- [5] 이형근, 이장규, 노용규, 박찬국, "쿼터니언 오차모델과 등가오차모델의 비교", 한국항공우주학회지, 25권, 2호, pp. 142-154, 1997.
- [6] D. O. Benson, JR., "A comparison of two approaches to pure-inertial and doppler-inertial error analysis", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-11, no.4, July, 1975.
- [7] Y. F. Jiang, Y. P. Lin, "On the rotation vector differential equation", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 27, no. 1, Jan., 1991.
- [8] K. R. Britting, *Inertial Navigation System Analysis*, John Wiley&Sons, Inc, 1971.
- [9] D. H. Titterton, J.L.Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Peter Peregrinus Ltd. 1997.
- [10] M. J. Yu, J. G. Lee, H. W. Park, "Comparison of SDINS in-flight alignment using equivalent error models", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 35, no. 3, July., 1999.
- [11] 유명중, 이장규, 박찬국, "Lyapunov 변환을 이용한 SDINS 등가오차모델", *Journal of Control, Automation and Systems Engineering*, vol. 8, no. 2, Feb., 2002.



김 갑 진

1995년 한양대학교 제어계측공학과(학사). 1997년 한양대학교 제어계측공학과(석사). 1997년~2001년 LG산전 빌딩시스템연구소. 2001년~현재 국방과학연구소 연구원. 연구 관심분야는 추정이론 및 가관측성 분석기법, 유도항법제어.



송 기 원

1984년 성균관 대학교 전자공학과(학사). 1992년 충남대학교 전자공학과(석사). 2002년 충남대학교 전자공학과(박사). 1984~현재 국방과학연구소 선임연구원. 연구 관심분야는 강인제어/필터, 추정이론 및 가관측성 분석기법.