論 文
52B-7-2

설계민감도해석과 요소망 변형법을 이용한 전자소자의 3차원 형상최적화

3D Shape Optimization of Electromagnetic Device Using Design Sensitivity Analysis and Mesh Relocation Method

柳 在 燮* · Yao Yingying** · 高 彰 燮***
(Jae Seop Ryu · Yingying Yao · Chang Seop Koh)

Abstract - This paper presents a 3D shape optimization algorithm for electromagnetic devices using the design sensitivity analysis with finite element method. The structural deformation analysis based on the deformation theory of the elastic body under stress is used for mesh renewing. The design sensitivity and adjoint variable formulae are derived for the 3D finite element method with edge element. The results of sensitivity analysis are used as the input data of the structural analysis to calculate the relocation of the nodal points. This method makes it possible that the new mesh of analysis region can be obtained from the initial mesh without regeneration. The proposed algorithm is applied to the shape optimization of 3D electromagnet pole to get a uniform flux density at the target region.

Key Words : shape optimization, finite element method, design sensitivity analysis, mesh relocation method

1. 서 론

최근 들어 전기기기 및 전자소자의 형상 최적화(shape optimization) 문제는 기기의 특성 및 성능을 개선하기 위한 방법으로써 그 활용범위가 점점 넓어지고 있다. 최적화 기법에는 비결정론적 방법(non-deterministic method)과 결정론적 방법(deterministic method)이 있다. 유전 알고리즘(Genetic Algorithm)과 진화 알고리즘(evolution strategy) 같은 비결정론적 방법은 전역적인 최적해(global optimum solution)를 찾을 수 있는 장점이 있지만, 설계변수가 많아지면 계산시간이 길어지는 단점이 있다. 반면에, 설계 민감도법(design sensitive analysis)과 같은 결정론적 방법은 지역적인 최적해(local optimum solution)를 찾을 가능성도 있지만 설계변수의 수가 계산시간에 미치는 영향이 적기 때문에 상대적으로 계산시간이 짧은 장점이 있다. 따라서 설계 민감도법을 이용한 형상 최적설계 방법은 설계변수가 많아지는 3차원 유한요소법과 결합하여 사용하기에 매우 유리한 방법이다[1,2,3].

일반적으로 최적화(optimization) 문제에서 목적함수(object function)는 최적화 대상이 되는 소자가 최적의 상태에 있을 때 최대 또는 최소가 되는 값으로 정의되며, 설계변수(design variable)와 상태변수(state variable)의 함수로 표현된다. 설계 민감도법은 설계변수의 민감도(sensitivity)인 설계변수의 변화에 대한 목적함수의 변화율을 계산하여 목적함수가 최적의 상태가 되는 해를 구하는 방법을 말한다[4].

그러나, 유한요소법을 사용하는 경우, 민감도 해석에 의하여 설계변수를 수정한 후에 전체 해석 영역에 대해서 요소를 재구성해야 하는 과정을 거쳐야 한다. 요소를 재구성하는 방법에는 설계변수의 수정 후 자동 요소 분할 방법에 의해 새로운 요소를 만드는 방법과 새로운 요소 분할 없이 요소망을 변형시키는 방법이 있다. 첫 번째 방법은 요소의 질(quality)이 좋아진다는 장점이 있지만 요소의 형태(topology)는 전혀 새로운 것이 된다. 따라서 새로 분할된 요소는 이전의 요소와 근본적으로 달라지기 때문에 자계의 해석 및 민감도 해석에 있어 연속성(continuity)을 기대할 수 없다. 더욱이 이 방법을 이용할 경우에는 최적화 과정이 일괄적으로 이루어지는 것이 아니라, 매 단계마다 수동적으로 요소분할을 해주어야 하는 단점이 있다. 두 번째 방법은 초기 요소를 그대로 사용하면서 각 점들의 좌표만 수정하여 요소망을 변형시키는 방법으로, 요소의 질은 조금 나빠질 수 있지만 초기 요소망의 형태를 그대로 유지할 수 있다는 장점이 있다[5,6,7].

요소의 재분할 없이 초기요소를 수정하는 방법에는 탄성체의 구조변형 해석(structural deformation analysis)에 기초한 요소망 변형법(mesh relocation method)이 있다. 요소망 변형법은 민감도 해석에 의해서 결정된 설계변수의 변위로부터 설계변수와 연결된 각 점의 변위를 계산함으로써 쉽게 요소를 재구성할 수 있다[5.6,7]. 따라서 이 방법은 최적화 과정의 자계 및 특성 해석, 민감도 해석, 그리고 요소망 재구성의 과정을 하나의 프로그램으로 결합하여 전체 과정을 단절 없이 수행할 수 있는 장점을 가지고 있어 유한요소법과 결합하기에 매우 유리한 방법이다. 특히 3차원 해석의 경우 요소분할에 사용되는 시간이 길어지기 때문에 요소망 변형법은 시간적인 면에서도 매우 경제적이다.

본 논문에서는 변요소를 이용한 3차원 유한요소법과 설계

---

* 正 會 員 : 忠北大 電氣工學科 博士課程
** 非 會 員 : Shenyang Univ. of Technology, 忠北大 BK21
***正 會 員 : 忠北大 電氣電子 · 컴퓨터工學部 副教授 · 工博
接受日字 : 2002年 10月 9日
最終完了 : 2003年 5月 20日

민감도 해석, 그리고 요소망 변형법의 결합에 의한 형상최적화 알고리즘을 제시하였다. 설계 민감도 계산은 계산시간의 단축을 위해서 보조변수(adjoint variable)를 도입하였고, 설계 민감도와 보조변수에 관한 식을 변요소를 이용한 3차원 유한요소해석에 적용할 수 있도록 유도하였다. 제안된 알고리즘을 목표영역에서 일정한 자속밀도를 얻기 위한 전자석의 3차원 형상 최적화 문제에 적용하였다.

2. 변요소를 이용한 자계해석 및 설계민감도 해석

정자장 문제를 해석하기 위한 계의 지배방정식은 맥스웰 방정식으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \tag{1}$$

여기에서 $\vec{A}$는 자기벡터 포텐셜이고, μ는 자기 투자율 그리고 $\vec{J}$는 입력 전류밀도이다. Galerkin 법에 의해 근사화한 후 유한요소법을 이용하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[K][A] = [Q] \tag{2}$$

여기에서 [K]와 [Q]는 이산화된 요소로부터 합성된 시스템 행렬 (system matrix)과 구동 벡터 (forcing vector)이고, [A]는 상태변수로서 자계 문제에서는 자기 벡터포텐셜(magnetic vector potential)이다. 사면체 변요소를 이용하는 경우에 임의의 요소 (e)에 대해서 $[K^e]$와 $[Q^e]$는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_e [K^e_{ij}][A^e_i] = \sum_e [Q^e_i] \tag{3}$$

$$K^e_{ij} = \frac{\nu^e}{18^2 V_e^3} \sum_{k=x,y,z} S_{ki} S_{kj}\ , \quad i,j = 1,2,\cdots,6 \tag{4}$$

$$Q^e_i = \frac{1}{36 V_e} \sum_{k=x,y,z} N_{ki} J_{ok}\ , \quad i = 1,2,\cdots,6 \tag{5}$$

여기에서 ν^e와 V_e는 각각 요소 (e)의 자기저항률과 체적을 나타내며, J_o는 입력 전류밀도를 나타낸다. S_k와 N_{ki}는 형상함수로부터 계산된 값이며 각각 다음과 같이 표현된다.

$$S_{xi} = c_m d_n - c_n d_m \tag{6-a}$$

$$S_{yi} = d_m b_n - d_n b_m \tag{6-b}$$

$$S_{zi} = b_m c_n - b_n c_m \tag{6-c}$$

$$N_{xi} = (a_m b_n - a_n b_m) + (c_m b_n - c_n b_m)\bar{y} + (d_m b_n - d_n b_m)\bar{z} \tag{6-d}$$

$$N_{yi} = (a_m c_n - a_n c_m) + (b_m c_n - b_n c_m)\bar{x} + (d_m c_n - d_n c_m)\bar{z} \tag{6-e}$$

$$N_{zi} = (a_m d_n - a_n d_m) + (b_m d_n - b_n d_m)\bar{x} + (c_m d_n - c_n d_m)\bar{y} \tag{6-f}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\ , \quad \bar{y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i\ , \quad \bar{z} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} z_i \tag{6-g}$$

여기에서 계수 a, b, c, d는 요소(e)의 네 절점의 좌표 (x, y, z)로부터 구해지며, 첨자 m과 n은 변 i의 시작점과 끝점을 나타낸다[9].

정자계 문제의 형상 최적화를 다루는 경우에 목적함수는 설계변수 $[p]$와 상태변수 $[A]$의 함수로 정의되며, 다음과 같이 표현할 수 있다[1,3,4].

$$F = f([p], [A(p)]) \tag{7}$$

설계 민감도는 설계변수에 대한 목적함수의 변화율로서, 매질의 특성이 변하지 않는 경우 상태변수가 형상(설계변수)만의 함수라고 가정하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \left.\frac{\partial F}{\partial [p]^T}\right|_{A=const.} + \frac{\partial F}{\partial [A]^T} \cdot \frac{d[A]}{d[p]^T} \tag{8}$$

여기에서 설계변수의 변화에 대한 상태변수의 변화율 $d[A]/d[p]^T$를 구하기 위하여, 식 (2)을 설계변수 $[p]$에 대하여 미분함으로써 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{d[p]^T}\{[K][A] - [Q]\} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d[A]}{d[p]^T} = [K]^{-1}\left\{\frac{d[Q]}{d[p]^T} - \frac{d[K]}{d[p]^T}[\bar{A}]\right\} \tag{10}$$

여기에서 $[\bar{A}]$는 식 (2)의 해를 의미하며, 임의의 요소에서 시스템 행렬 $[K^e_{ij}]$와 구동벡터 $[Q^e_i]$의 설계변수에 대한 미분 항은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{d[K^e_{ij}]}{d[p]^T} &= \frac{d}{d[p]^T}\left\{\frac{\nu^e}{18^2 V_e^3}\sum_k S_{ki}S_{kj}\right\} \\ &= \frac{\nu^e}{18^2}\frac{1}{V_e^3}\left\{\sum_{k=x,y,z}\left(\frac{dS_{ki}}{d[p]^T}\cdot S_{kj} + S_{ki}\cdot\frac{dS_{kj}}{d[p]^T}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{3\nu^e}{18^2}\frac{1}{V_e^4}\left(\sum_{k=x,y,z} S_{ki}S_{kj}\right)\cdot\frac{dV_e}{d[p]^T}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{d[Q^e_i]}{d[p]^T} &= \frac{d}{d[p]^T}\left\{\frac{1}{36 V_e}\sum_k N_{ki}J_{ok}\right\} \\ &= \frac{1}{36 V_e^2}\left\{V_e\sum_{k=x,y,z}\frac{dN_{ki}}{d[p]^T}J_{ok} - \sum_{k=x,y,z} N_{ki}J_{ok}\frac{dV_e}{d[p]^T}\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

상태변수의 미분항 식(9)를 식 (7)에 대입하면,

$$\frac{dF}{d[p]^T}=\frac{\partial F}{\partial[p]^T}+\frac{\partial F}{\partial[A]^T}[K]^{-1}\left\{\frac{d[Q]}{d[p]^T}-\frac{d[K]}{d[p]^T}[A]\right\} \tag{13}$$

로 된다. 이 식에서 시스템 행렬의 역행렬 $[K]^{-1}$는 직접 구하기가 매우 어렵고, 특히 미지수가 많은 3차원 해석의 경우 0이 아닌 항(non-zero)만을 저장하기 때문에 역행렬을 구하기는 불가능하다. 따라서 시스템 행렬의 역행렬을 구하지 않고 계산하기 위하여 보조변수(adjoint variable) λ를 도입하여 계산한다. 보조변수 $[\lambda]$는 다음과 같이 정의하며[3,4],

$$[\lambda]^T=\frac{\partial F}{\partial[A]^T}[K]^{-1} \tag{14}$$

여기에서 시스템 행렬 $[K]$가 대칭인 조건을 이용하면 식 (14)을 다음 식으로 변환하여 보조변수 $[\lambda]$를 구할 수 있다.

$$[K][\lambda]=\frac{\partial F}{\partial[A]^T} \tag{15}$$

따라서 설계 민감도는 (13),(15) 식을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p]^T}=\frac{\partial F}{\partial[p]^T}+\lambda^T\cdot\left\{\frac{d[Q]}{d[p]^T}-\frac{d[K]}{d[p]^T}[A]\right\} \tag{16}$$

각 설계변수의 민감도를 계산한 후에 설계변수는 다음의 식에 의해서 수정된다.

$$[p]^{new}=[p]^{old}-\alpha\cdot F\cdot\frac{dF}{d[p]^T}\Big/\left|\frac{dF}{d[p]^T}\right|^2 \tag{17}$$

여기에서 F는 식 (7)에 의해서 계산된 현재 단계에서의 목적함수의 값을 말하며, 계수 α는 새로 계산된 설계변수의 값이 진동하는 것을 방지하기 위한 완화계수(relaxation factor)이다.

3. 요소망 변형

3차원 구조해석에서 탄성체의 변형 벡터(strain vector)는 다음과 같이 정의된다[8,10].

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\frac{\partial u_x}{\partial x},\frac{\partial u_y}{\partial y},\frac{\partial u_z}{\partial z},\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x},\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y},\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right]^T$$
$$=\boldsymbol{B}\ \mathbf{a}^e=[\ \boldsymbol{B}_i,\ \boldsymbol{B}_j,\ \boldsymbol{B}_m,\ \boldsymbol{B}_p]\ \mathbf{a}^e \tag{18}$$

이 때,

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}, & 0, & 0, & \frac{\partial N_i}{\partial x}, & 0, & \frac{\partial N_i}{\partial x},\\ 0, & \frac{\partial N_i}{\partial y}, & 0, & \frac{\partial N_i}{\partial y}, & \frac{\partial N_i}{\partial y}, & 0,\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}, & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}, & \frac{\partial N_i}{\partial z},\end{bmatrix}^T \tag{19}$$

이며, N_i는 절점에 대한 형상함수(shape function)이고, 변위벡터(displacement vector) $\mathbf{u}$는 좌표 x,y,z의 함수로 정의되며 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}=[\ \mathbf{I}N_i,\ \mathbf{I}N_j,\ \mathbf{I}N_m,\ \mathbf{I}N_p]\ \mathbf{a}^e \tag{20}$$

$$\mathbf{a}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i\\ \mathbf{a}_j\\ \mathbf{a}_m\\ \mathbf{a}_p\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_i=\begin{bmatrix}u_x(x,y,z)\\ u_y(x,y,z)\\ u_z(x,y,z)\end{bmatrix} \tag{21}$$

여기에서 $\mathbf{I}$는 3×3 단위행렬(identity matrix), $\mathbf{a}^e$는 한 요소의 변위벡터이고, $\mathbf{a}_i$는 한 절점의 변위벡터이며, i,j,m,n은 한 요소의 네 절점을 나타내는 첨자이다.

선형 탄성체의 응력(stress)과 변형(strain)의 관계는 탄성행렬(elasticity matrix)을 이용하면 다음과 같이 정의되며 [8,10],

$$\sigma=\mathbf{D}(\varepsilon-\varepsilon_0)+\sigma_0 \tag{22}$$

여기에서 ε_0와 σ_0는 각각 초기 변형(initial strain)과 초기 잔류 응력(initial residual stress)을 나타내고, 행렬 D는 탄성행렬(elasticity matrix)로 다음과 같다.

$$D=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}(1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0\\ & & 1 & 0 & 0 & 0\\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0\\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0\\ \textit{symmetric} & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2}\end{bmatrix} \tag{23}$$

여기에서 E는 영율(Young's modulus)이고, ν 는 포아송 비(Poisson's ratio)이다.

식 (18)과 (22)에 대하여 사면체 요소를 이용하는 3차원 유한요소법을 적용하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다 [5,6,7,8,10].

$$[\ \mathbf{K}]\{\mathbf{a}\}=[\ \mathbf{f}] \tag{24}$$

여기에서 $\{\mathbf{a}\}$는 각 절점의 변위이고, $[\ \mathbf{f}]$는 변위에 대한 구동벡터(forcing vector)이다. $[\ \mathbf{K}]$는 요소의 형상과 탄성체의 물질 상수에 의해 결정되는 행렬로써 다음과 같으며 [8,10],

$$\mathbf{K}_{ij}^{e} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}\, \mathbf{B}_j V_e \tag{25}$$

$$= \frac{E(1-\nu)}{36V_e(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} K_{ij}^{xx} & K_{ij}^{xy} & K_{ij}^{xz} \\ K_{ij}^{yx} & K_{ij}^{yy} & K_{ij}^{yz} \\ K_{ij}^{zx} & K_{ij}^{zy} & K_{ij}^{zz} \end{bmatrix}$$

여기에서 K_{ij}^{xx}는 다음과 같다.

$$K_{ij}^{xx} = b_i b_j + c_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + d_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-a}$$

$$K_{ij}^{yy} = c_i c_j + b_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + d_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-b}$$

$$K_{ij}^{zz} = d_i d_j + c_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + b_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-c}$$

$$K_{ij}^{xy} = b_i c_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + c_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-d}$$

$$K_{ij}^{xz} = b_i d_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + d_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-e}$$

$$K_{ij}^{yx} = c_i b_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + b_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-f}$$

$$K_{ij}^{yz} = c_i d_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + d_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-g}$$

$$K_{ij}^{zx} = d_i b_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + b_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-h}$$

$$K_{ij}^{zy} = d_i c_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + c_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{26-i}$$

식(24)을 최적화 과정에서 요소망의 변형에 이용되는 각 절점의 변위를 구하기 위한 식으로 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다[5,6,7].

$$[\mathbf{K}]\{\triangle \mathrm{x}\} = [\mathbf{f}] \tag{27}$$

여기에서 $[\mathbf{K}]$는 응력해석에 사용되는 전체 요소 행렬(global stiffness matrix)이고, $\{\triangle x\}$는 요소망 변형에서 좌표변환에 이용되는 각 점의 변위이며, $[\mathbf{f}]$는 요소의 질을 조절하기 위한 가상의 부하(fictitious load force)이다. 요소망에 가해지는 외부의 인위적인 힘이 없다는 조건과 경계면 상의 절점의 변위를 이용하여 해석 영역 내부에 위치한 각 점의 변위는 식 (27)을 변형하여 다음 식에 의해서 구할 수 있다[5,6,7].

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \triangle x_b \\ \triangle x_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

여기에서 $\{\triangle x_b\}$는 이미 알고 있는 경계상의 절점의 변위이고, $\{\triangle x_d\}$는 미지수로서 내부 절점의 변위를 나타낸다. $[f_b]$는 경계의 절점에 작용하는 가상의 힘이며, 여기에서는 민감도 해석에서 얻어진 결과에 따라서 경계 상의 절점이 위치만 변화하고 외부에서 가해지는 힘이 없기 때문에 그 값을 0으로 놓고 계산한다[5,6,7]. 따라서 내부 절점의 변위는 다음 식에 의하여 구할 수 있다.

$$[K_{dd}]\{\triangle x_d\} = -[K_{db}]\{\triangle x_b\} \tag{29}$$

이때, $\{\triangle x_b\}$ 중에서 설계변수에 해당하는 절점은 민감도 해석에서 계산된 변위를 사용하고, 그 외의 절점 중에서 변위가 발생하지 않을 것으로 예상되는 점들은 0으로 취급한다. 또한 각 점의 변위를 계산하기 위한 구조 해석의 영역을 유한요소 해석영역 전체로 하지 않고 변위가 발생할 영역만을 설정하여 계산하면 계산시간을 단축할 수도 있다.

4. 해석사례

그림 1에는 설계 민감도 계산 및 요소망 변형법에 의한 최적화 알고리즘을 보이고 있다. 제안된 최적화 알고리즘은 전자석의 상부표면으로부터 20[mm] 떨어진 표면의 자속밀도 Bz를 일정하게 만들기 위한 3차원 전자석의 형상최적화 문제에 적용하였다. 그림 2에는 해석모델의 형상 및 치수를 보이고 있다. 해석 영역은 그림 3과 같이, 전자석의 대칭성을 고려하여 전체 영역의 1/8만 해석하였다. 입력전류는 1500[AT]이고, 전자석의 비투자율은 500이다. 설계변수는 전자석의 상부표면에 있는 전체 절점 121개 중에서 대칭성을 고려하여 66개의 절점을 선택하여 사용하였다.

목표 영역은 $0 \le x \le 65$, $0 \le y \le 65$, $z = 70$ [mm]인 영역으로 설정하였으며, 목표 영역에서의 설계 목표 값은 100[Gauss]이고, 목적함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$F = \sum_{n=1}^{np} (B_n^z - B_t)^2 \tag{30}$$

여기에서 B_n^z는 목표 절점에서 자속밀도의 Bz 값이고, B_t는 설계 목표 값이며, np는 목표 영역에서 선택된 절점의 개수이다.

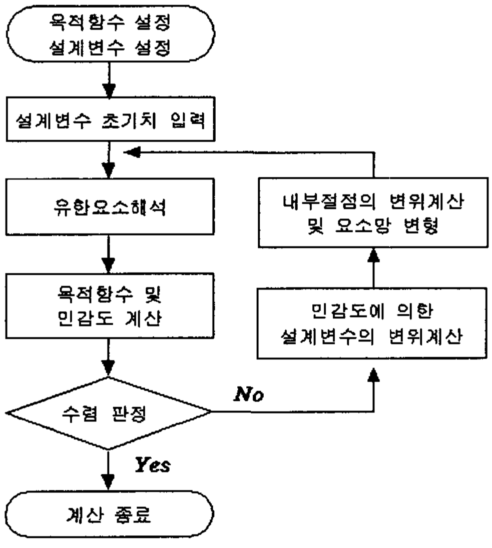
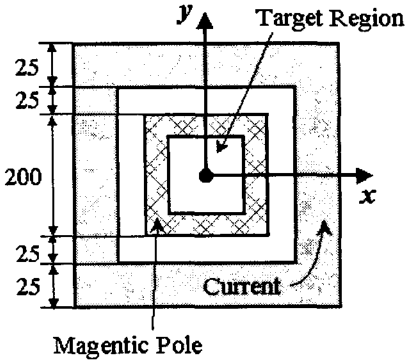
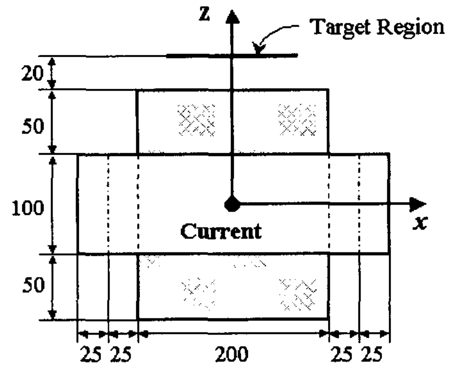


그림 1 요소망 변형법에 의한 최적화 알고리즘
Fig. 1 Shape optimization algorithm using mesh relocation



(a) 평면도



(b) 측면도

그림 2 3차원 전자석 모델의 형상[단위:mm]

Fig. 2 Shape of 3D electromagnetic pole model

식 (30)으로 정의된 목적함수로부터 민감도는 다음과 같이 된다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \sum_{n=1}^{np} 2(B_n^z - B_t)\frac{\partial B_n^z}{\partial [p]^T} + \sum_{n=1}^{np} 2(B_n^z - B_t)\frac{\partial B_n^z}{\partial [A]^T} \cdot \frac{d[A]}{d[p]^T} \tag{31}$$

여기에서 우변의 첫 번째 항은 설계변수가 목표영역에서 떨어진 위치에 있으므로 설계변수에 대한 자속밀도의 변화율은 0이 된다. 그리고 두 번째 항에서 상태변수(자기 벡터포텐셜)에 대한 자속밀도의 변화율은 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{\partial B_n^z}{\partial [A]^T} = \frac{1}{\sum_i \gamma_i} \sum_i \gamma_i \frac{\partial B_i^z}{\partial [A]^T} \tag{32}$$

여기에서 i는 n번째 목표절점을 포함하는 요소를 나타내고, γ_i는 요소 i에서 절점 n의 입체각을 나타낸다.

민감도 계산 후 설계변수의 수정을 반복하는 과정에서 요소의 구조 해석에 사용된 영율(Young's modulus) E와 포아송 비(Poisson's ratio) ν 는 각각 0.5와 0.3을 주어 계산하였다. 이것은 E와 ν의 값을 변화시키면서 얻은 요소의 질을 검토한 후 가장 좋은 결과를 얻을 수 있는 값을 선택한 것으로, 구조 해석에서는 재질에 따라 그 값이 다르지만 요소망 변형법에 사용할 경우에는 재질에 관계없이 이 값을 사용하면 된다[7].

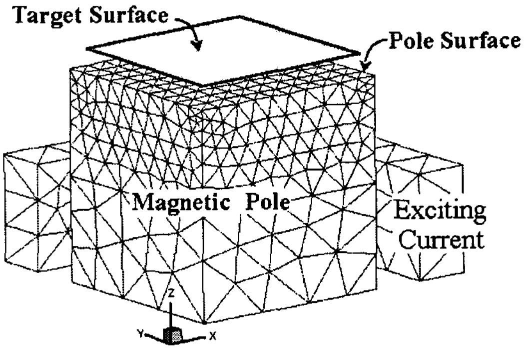


그림 3 전자석 및 전류영역의 요소분할도

Fig. 3 Finite element meshes of magnetic pole and current region

그림 4는 목표영역에서 목적함수의 변화를 나타낸 것이다. 5번째 반복 계산 후 목적 함수의 값은 초기치의 1.0% 이하의 값으로 감소하였고, 이 후 약간의 진동을 보였으나, 13번째 수정 후에는 진동 없이 수렴하였다. 최종 설계변수 수정 후에 목적함수 값은 초기형상에서 목적함수 값의 0.152476%로 감소하였다.

그림 5는 대칭면(y=0)에서 자속밀도 Bz의 분포가 변화하는 모습을 보이고 있으며, 목표영역 부근의 Bz 분포가 점점 평탄해 지는 것을 볼 수 있다. 그림 6은 같은 대칭면(y=0)에 대해서 자속밀도 분포를 보이고 있다. 그림 7은 전자석의 형상에 따른 목표영역에서 자속밀도 Bz의 분포 변화를 보이고 있다. 초기 형상에서 자속밀도 Bz의 크기는 전자석의 바깥쪽보다 중심부분(x=0,y=0)에서 작게 나타났지만, 최적화 과정을 반복하면서 중심부의 자속밀도는 점점 증가하여 최종형상에서는 목표영역에서의 자속밀도 분포가 목표치인 100[Gauss]의 값을 가지며 평탄한 분포를 보이고 있다. 그림 8은 최적화 과정을 반복하면서 변화하는 전자석의 표면 형상을 보이고 있다. 또한 최적화 과정을 반복하면서 얻어진 새로운 요소망은 초기 요소망의 형상(topology)은 그대로 사용하고 절점의 위치만 변화시켜 요소망이 구성되었음이 그림에 잘 나타나 있다.

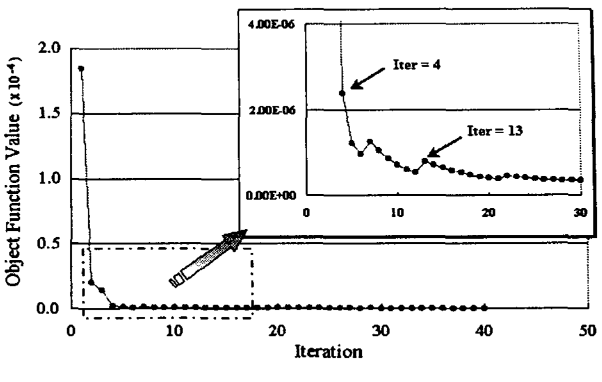
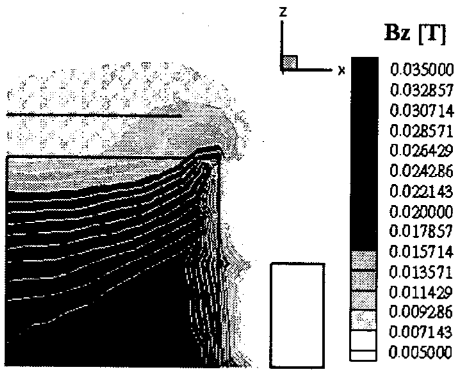
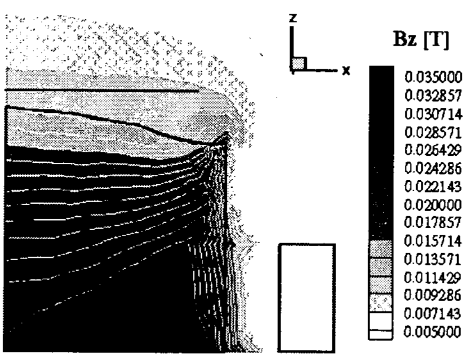


그림 4 목적함수의 변화

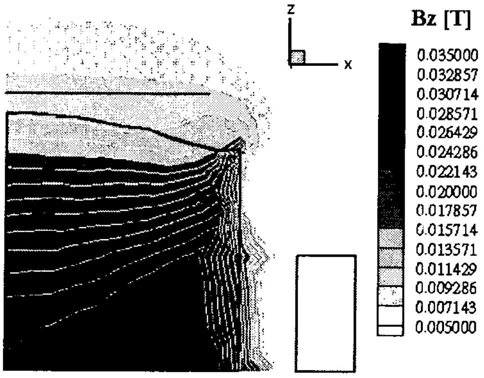
Fig. 4 Variation of the objective function



(a) 초기 분포



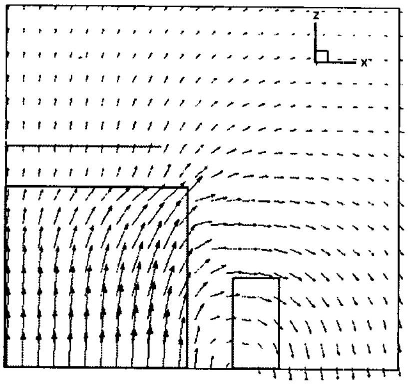
(b) 13번째 반복계산 후 분포



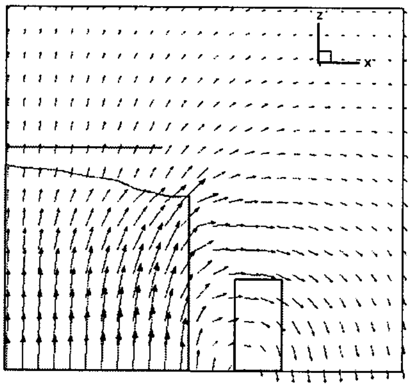
(e) 40번째 반복계산 후 분포

그림 5 대칭면(y=0)에서 자속밀도 Bz의 분포

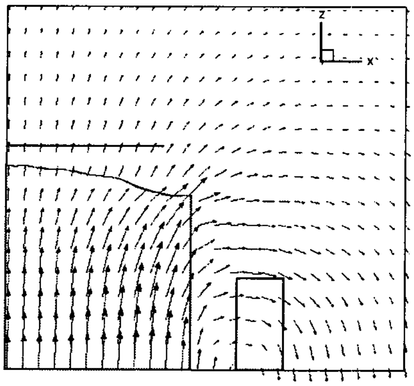
Fig. 5 Distributions of Bz at symmetric surface(y=0)



(a) 초기 분포



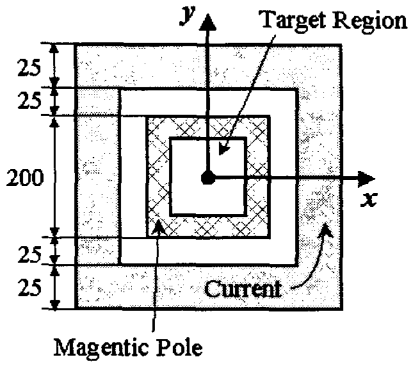
(b) 13번째 반복계산 후 분포



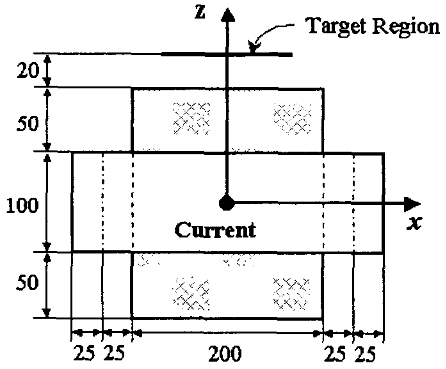
(c) 40번째 반복계산 후 분포

그림 6 대칭면(y=0)에서의 자속밀도 분포

Fig. 6 Distributions of magnetic flux density at the symmetric surface(y=0)



(a) 평면도



(b) 측면도

그림 2 3차원 전자석 모델의 형상[단위:mm]

Fig. 2 Shape of 3D electromagnetic pole model

식 (30)으로 정의된 목적함수로부터 민감도는 다음과 같이 된다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \sum_{n=1}^{np} 2(B_n^z - B_t)\frac{\partial B_n^z}{\partial [p]^T} + \sum_{n=1}^{np} 2(B_n^z - B_t)\frac{\partial B_n^z}{\partial [A]^T} \cdot \frac{d[A]}{d[p]^T} \quad (31)$$

여기에서 우변의 첫 번째 항은 설계변수가 목표영역에서 떨어진 위치에 있으므로 설계변수에 대한 자속밀도의 변화율은 0이 된다. 그리고 두 번째 항에서 상태변수(자기 벡터포텐셜)에 대한 자속밀도의 변화율은 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{\partial B_n^z}{\partial [A]^T} = \frac{1}{\sum_i \gamma_i} \sum_i \gamma_i \frac{\partial B_i^z}{\partial [A]^T} \quad (32)$$

여기에서 i는 n번째 목표절점을 포함하는 요소를 나타내고, γ_i는 요소 i에서 절점 n의 입체각을 나타낸다.

민감도 계산 후 설계변수의 수정을 반복하는 과정에서 요소의 구조 해석에 사용된 영율(Young's modulus) E와 포아송 비(Poisson's ratio) ν 는 각각 0.5와 0.3을 주어 계산하였다. 이것은 E와 ν의 값을 변화시키면서 얻은 요소의 질을 검토한 후 가장 좋은 결과를 얻을 수 있는 값을 선택한 것으로, 구조 해석에서는 재질에 따라 그 값이 다르지만 요소망 변형법에 사용할 경우에는 재질에 관계없이 이 값을 사용하면 된다[7].

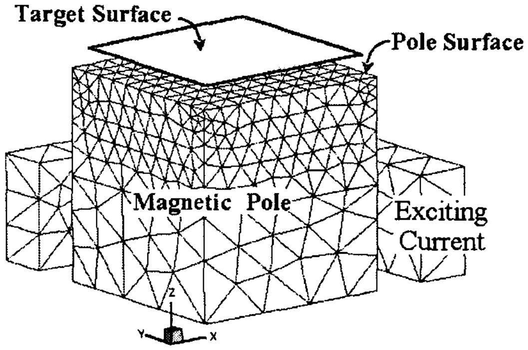


그림 3 전자석 및 전류영역의 요소분할도

Fig. 3 Finite element meshes of magnetic pole and current region

그림 4는 목표영역에서 목적함수의 변화를 나타낸 것이다. 5번째 반복 계산 후 목적 함수의 값은 초기치의 1.0% 이하의 값으로 감소하였고, 이 후 약간의 진동을 보였으나, 13번째 수정 후에는 진동 없이 수렴하였다. 최종 설계변수 수정 후에 목적함수 값은 초기형상에서 목적함수 값의 0.152476%로 감소하였다.

그림 5는 대칭면(y=0)에서 자속밀도 Bz의 분포가 변화하는 모습을 보이고 있으며, 목표영역 부근의 Bz 분포가 점점 평탄해 지는 것을 볼 수 있다. 그림 6은 같은 대칭면(y=0)에 대해서 자속밀도 분포를 보이고 있다. 그림 7은 전자석의 형상에 따른 목표영역에서 자속밀도 Bz의 분포 변화를 보이고 있다. 초기 형상에서 자속밀도 Bz의 크기는 전자석의 바깥쪽보다 중심부분(x=0,y=0)에서 작게 나타났지만, 최적화 과정을 반복하면서 중심부의 자속밀도는 점점 증가하여 최종형상에서는 목표영역에서의 자속밀도 분포가 목표치인 100[Gauss]의 값을 가지며 평탄한 분포를 보이고 있다. 그림 8은 최적화 과정을 반복하면서 변화하는 전자석의 표면 형상을 보이고 있다. 또한 최적화 과정을 반복하면서 얻어진 새로운 요소망은 초기 요소망의 형상(topology)은 그대로 사용하고 절점의 위치만 변화시켜 요소망이 구성되었음이 그림에 잘 나타나 있다.

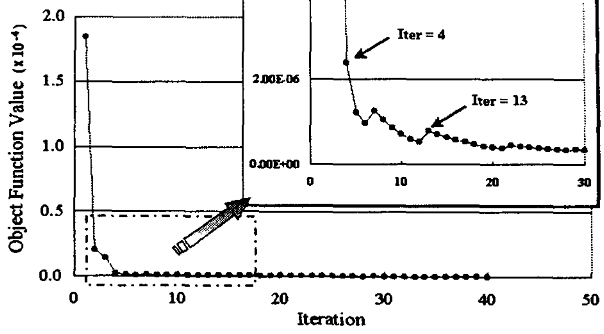
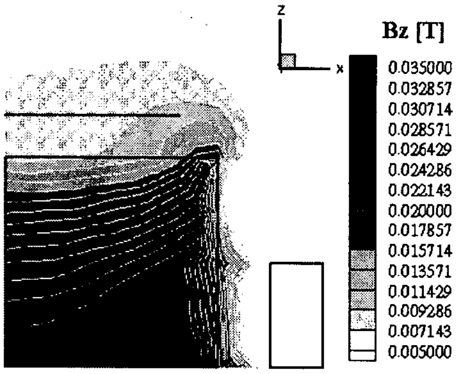
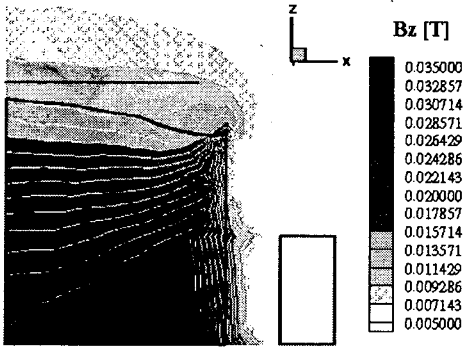


그림 4 목적함수의 변화

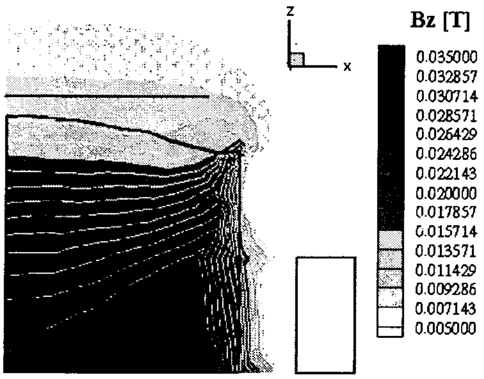
Fig. 4 Variation of the objective function



(a) 초기 분포



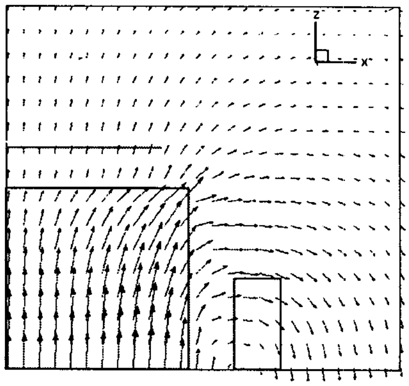
(b) 13번째 반복계산 후 분포



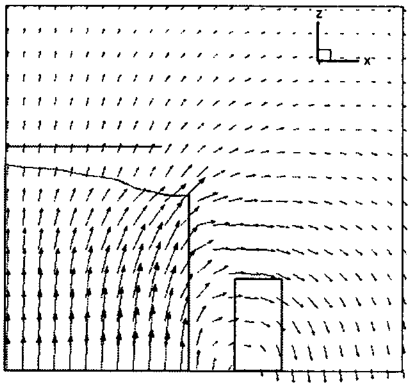
(e) 40번째 반복계산 후 분포

그림 5 대칭면(y=0)에서 자속밀도 Bz의 분포

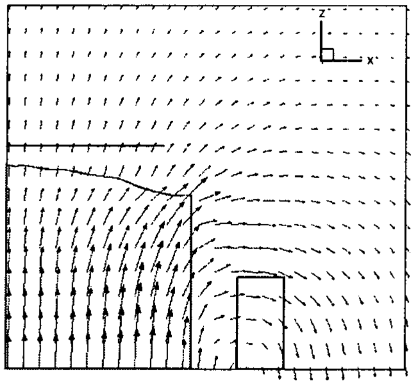
Fig. 5 Distributions of Bz at symmetric surface(y=0)



(a) 초기 분포



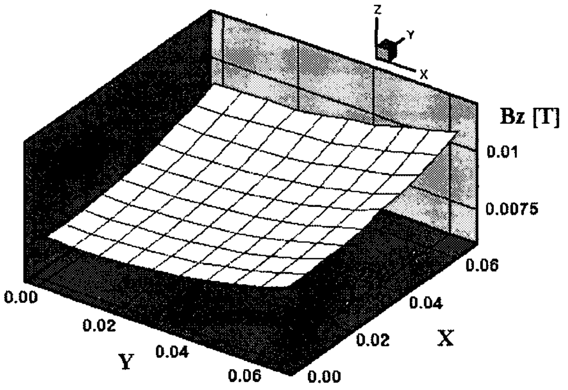
(b) 13번째 반복계산 후 분포



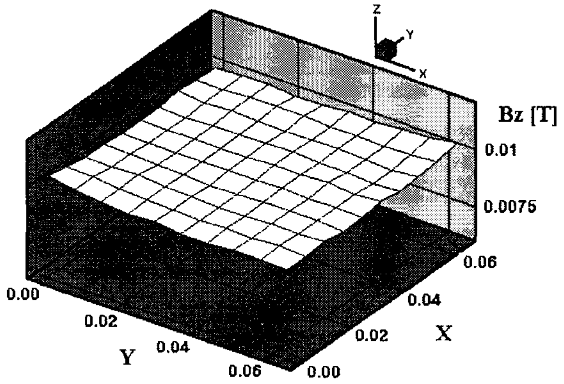
(c) 40번째 반복계산 후 분포

그림 6 대칭면(y=0)에서의 자속밀도 분포

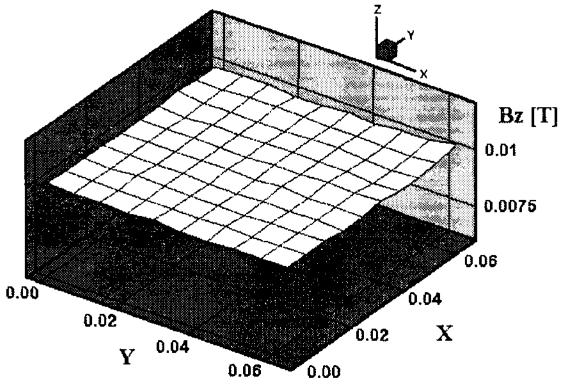
Fig. 6 Distributions of magnetic flux density at the symmetric surface(y=0)



(a) 초기 분포

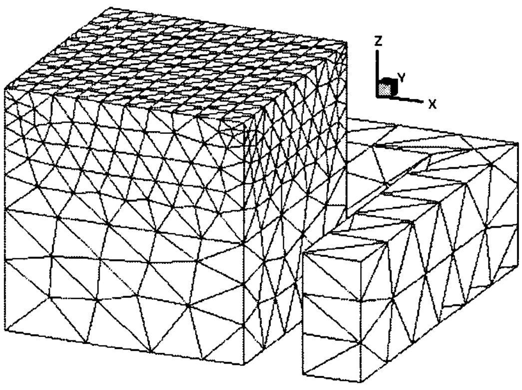


(b) 13번째 반복계산 후 분포

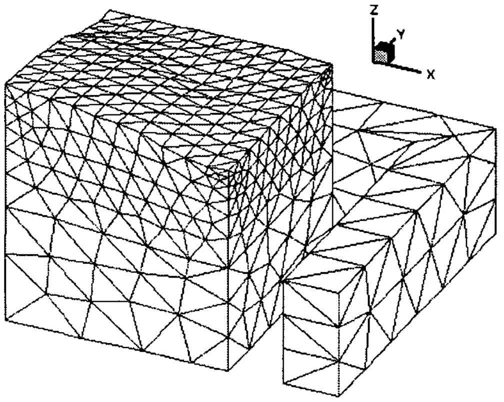


(c) 40번째 반복계산 후 분포

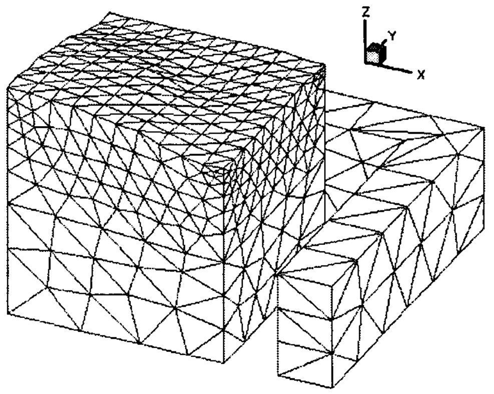
그림 7 목표영역에서의 Bz 분포
Fig. 7 Distributions of Bz at the target region



(a) 초기 형상



(b) 13번째 변경 후 형상



(c) 최종 형상

그림 8 전자석 표면의 형상
Fig. 8 Shape of the electromagnetic pole surface

4. 결 론

본 논문에서는 유한요소법과 설계 민감도 해석, 그리고 요소망 변형법에 의한 3차원 전자소자의 형상 최적화 알고리즘에 대해서 연구하였다. 민감도 해석 과정에서 보조변수를 도입하여 계산시간을 단축하였고, 민감도와 보조변수에 관한 식을 변요소를 이용한 3차원 유한요소해석에 직접 적용할 수 있도록 유도하였다. 민감도 해석을 통해서 설계변수를 수정한 후에 탄성체의 구조해석 이론에 기초한 요소망 변형법을 이용하여 새로운 요소 분할 없이 초기 요소의 형상을 그대로 유지하는 변형된 요소망을 얻을 수 있었다.

제안된 알고리즘을 3차원 전자석의 최적형상설계 문제에 적용하였다. 5번째 반복 계산 후 목적 함수의 값은 초기치의 1.0% 이하의 값으로 감소하였고, 이 후 약간의 진동을 보였으나, 13번째 반복 계산 후에는 진동 없이 수렴하였다. 최종 설계변수 수정 후에 목적함수 값은 초기형상에서 목적함수 값의 0.152476%로 감소하였다.

해석 결과로부터, 요소 재분할에 많은 시간이 소요되는 3차원 유한요소법을 이용한 형상 최적화 문제에서는 제안된 요소망 변형법이 효과적으로 잘 적용됨을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안된 방법으로 최적화 과정의 자계해석 및 민감도 해석, 그리고 요소망 변형법을 하나의 연속된 알고리즘으로 구현할 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

[1] J.A.Ramirez, et al., "Sensitivity Analysis for the Automatic Shape Design of Electromagnetic Devices in 3D Using FEM",*IEEE Trans. on Magn*, Vol.33, No.2, pp.1856-1859, 1997

[2] C. S. Koh, et al., "Design sensitivity analysis for shape optimization of 3-D electromagnetic devices", *IEEE Trans. on Magn*, Vol.29, No.2, pp.1753-1757, 1993

[3] Il-han Park, et al., "Stator Slot Shape Design of Induction Motors for Iron Loss Reduction," *IEEE Trans. on Magn.*, Vol.31, No.3, pp. 2004-2007, 1995

[4] 박일한, *전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석*, 박사학위논문, 서울대학교, 1990

[5] Konrad Weeber and S.R.H. Hoole, "A Structural Mapping Technique for Geometric Parameterization in the Optimization of Magnetic Devices", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.33, pp.2145-2179, 1992.

[6] Konrad Weeber, S.R.H. Hoole, "Geometric Parametrization and Constrained Optimization Techniques in the Design of Salient Pole Synchronous Machines," *IEEE Trans. on Magn.*, Vol. 28, No.4, pp. 1948-1960, 1992

[7] Yingying Yao, 고창섭, Dexin Xie, "전자소자의 형상최적화를 위한 3차원 요소의 재생성법" ,대한전기학회 하계학술대회 논문집 B권, pp.841-843, 2002.

[8] O.C.Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1977.

[9] 河瀨順洋, *最新 三次元有限要素法による 電氣・電子器機の 實用解析*, 森北出版株式會社, 1997.

[10] J.S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural analysis*, McGraw-Hill, 1985.

저 자 소 개

류 재 섭(柳 在 燮)
1973년 12월 15일생. 1997년 충북대 전기공학과 졸업. 1999년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1999~현재 동 대학원 전기공학과 박사과정 수료.
Tel : 043-274-2426
E-mail : jsryu@vod.chungbuk.ac.kr

Yao Yingying (姚 纓 英)
1983년 Heifei University of Technology 전기공학과 졸업(학사). 1987년 Chongqing University 전기공학과 졸업(석사). 2000년 Shenyang University of Technology 전기공학부 졸업(박사). 2001~2002 충북대학교 전기공학과 BK21 방문연구원. 현재 Shenyang University of Technology 전기공학부 교수.
Tel : +86-24-2569202
E-mail : yaoying62@hotmail.com

고 창 섭(高 彰 燮)
1964년 2월 18일생. 1986년 서울대 전기공학과 졸업(학사). 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(공박). 1993~1994년 미국 Florida International University 전기 및 컴퓨터 공학과 객원연구원. 1994~1996년 삼성전기(주) 종합연구소 선임연구원. 1996~현재 충북대 전기전자 및 컴퓨터 공학부 부교수.
Tel : (043) 261-2426.
E-mail : kohcs@chungbuk.ac.kr